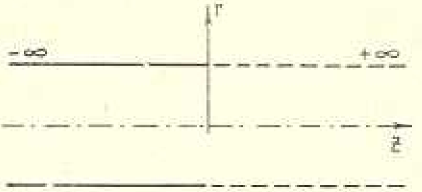
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 5, 1969 Механика

М. Г. ХУБЛАРЯН

О ВИНТОВОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАТОПЛЕННОЙ СТРУЕ

Рассмотрим вытекание однородной осесимметричной винтовой струи* из полубесконечной трубы радиуса a в свободное пространство, заполненное жидкостью (фиг. 1).



Фиг. 1.

Уравнение однородного винтового потока для функции тока в цилиндрической системе координат z, r, φ имеет вид

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right)+k^2\Psi=-kc \qquad (k,\ c=\mathrm{const}) \tag{1}$$

Составляющие скорости винтового потока связаны с функцией тока Ψ следующими соотношениями:

$$v_z=-\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r},\qquad v_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial z},\qquad v_\varphi=\frac{k\Psi+c}{r} \tag{2}$$

Граничными условиями для (1) будут

$$\begin{aligned}&\Psi=0 \quad \text{при} \quad r=0 \quad -\infty<z<\infty\\ &\Psi=0 \quad \text{при} \quad r=\infty \quad -\infty<z<\infty\\ &\Psi=\Psi_0 \quad \text{при} \quad r=a \quad -\infty<z<0\end{aligned} \tag{3}$$

Задачу будем решать методом Винера-Хопфа. Введем в правую часть уравнения (1) множитель $e^{-\lambda|z|}$, в окончательном результате устремим λ к нулю.

Применяя к уравнению (1) преобразование Фурье по переменной z

$$\psi(\alpha,r)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Psi(r,z)\,e^{i\alpha z}dz,\quad \left(\Psi(r,z)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\psi(\alpha,r)\,e^{-i\alpha z}d\alpha\right) \tag{4}$$

найдем

* Движение называется винтовым, когда вектор вихря коллинеарен вектору скорости, т. е. $\vec{V}\times\operatorname{rot}\vec{V}=0$.

$$r\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\psi}{dr}\right)-\gamma^2\psi=-\frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda}-\frac{i}{\alpha-i\lambda}\right) \tag{5}$$

Здесь α и k — комплексные величины, где

$$\gamma=(\alpha^2-k^2)^{1/2}=-i(k^2-\alpha^2)^{1/2},\quad \alpha=\sigma+i\tau,\quad k=k_1+ik_2,\quad k_2>0$$

Общее решение однородного уравнения, соответствующее неоднородному уравнению (5), выберем в следующем виде:

$$\psi_1=A_1(\alpha)\,rH_1^{(1)}(i\gamma r)+A_2(\alpha)\,rH_1^{(2)}(i\gamma r)\qquad \text{при}\quad r>a$$

$$\psi_2=B_1(\alpha)\,r\,J_1(i\gamma r)+B_2(\alpha)\,rN_1(i\gamma r)\qquad \text{при}\quad 0\leqslant r\leqslant a$$

Здесь $J_1(x)$, $N_1(x)$, $H_1(x)$ — соответственно функция Бесселя, Неймана и Ханкеля.

В качестве частного решения уравнения (5) возьмем

$$\psi=\frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{1}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda}-\frac{i}{\alpha-i\lambda}\right)$$

Учитывая два первых граничных условия из (3), а также используя соотношение

$$2K_1(x)=-\pi H_1^{(1)}(ix),\qquad I_1(x)=-iJ_1(ix)$$

получим

$$\psi_1=-\frac{2}{\pi}A(\alpha)\,rK_1(\gamma r)+\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda}-\frac{i}{\alpha-i\lambda}\right) \tag{6}$$

$$\psi_2=iB(\alpha)\,rI_1(\gamma r)+\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda}-\frac{i}{\alpha-i\lambda}\right) \tag{7}$$

где $I_1(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента, $K_1(x)$ — функция Макдональда.

Выбор решения уравнения (5) в форме (7) предполагает такую униформизацию радикала $\gamma=(\alpha^2-k^2)^{1/2}$, при котором выполнились бы условия

$$\operatorname{Re}\gamma>0\qquad \text{для}\quad -k_2<\tau<k_2$$

Для этого необходимо провести разрезы в комплексной плоскости так, чтобы $\gamma=-ik$ при $\alpha=0$.

Следуя методу Джонса [1], из формулы (6) и (7), найдем

$$\psi_{1+}(a)+\psi_{1-}(a)=-\frac{2}{\pi}A(\alpha)\,aK_1(\gamma a)+\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda}-\frac{i}{\alpha-i\lambda}\right) \tag{6'}$$

$$\psi_{2+}(a)+\psi_{2-}(a)=iB(\alpha)\,aI_1(\gamma a)+\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda}-\frac{i}{\alpha-i\lambda}\right) \tag{7'}$$

$$\psi'_{1+}(a)+\psi'_{1-}(a)=-\frac{2}{\pi}A(\alpha)\,[aK_1(\gamma a)]'$$

$$\psi'_{2+}(a) + \psi'_{2-}(a) = iB(\alpha)\,[aI_1(\gamma a)]'$$

Учитывая, что при $r = a$

$$\psi_{1+}(a) + \psi_{1-}(a) = \psi_{2+}(a) + \psi_{2-}(a) = -\frac{2}{\pi} A(\alpha)\,aK_1(\gamma a) +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda} - \frac{i}{\alpha-i\lambda}\right) = iB(\alpha)aI_1(\gamma a) + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda} - \frac{i}{\alpha+i\lambda}\right)$$

$$\psi'_{1+}(a) - \psi'_{2+}(a) = 0, \qquad \psi'_{1-}(a) - \psi'_{2-}(a) \neq 0$$

получим

$$A(\alpha) = -\frac{\psi_{2+}(a) + \psi_{2-}(a) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda} - \frac{i}{\alpha+i\lambda}\right)}{\frac{2}{\pi}\,aK_1(\gamma a)} \tag{8}$$

$$B(\alpha) = \frac{\psi_{2+}(a) + \psi_{2-}(a) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda} - \frac{i}{\alpha-i\lambda}\right)}{iaI_1(\gamma a)} \tag{9}$$

$$\psi'_{1-}(a) - \psi'_{2-}(a) = -\frac{2}{\pi} A(\alpha)\,[aK_1(\gamma a)]' - iB(\alpha)\,[aI_1(\gamma a)]'$$

Подставляя значения $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ из (8) в (9) и учитывая при этом, что

$$[xI_1(x)]' = xI_0(x), \qquad [xK_1(x)]' = -xK_0(x)$$

$$I_0(x)\,K_1(x) + I_1(x)\,K_0(x) = \frac{1}{x}$$

после ряда преобразований будем иметь

$$\frac{a}{2} K(\alpha)\,w'_-(a) = \psi_{2+}(a) + \psi_{2-}(a) - \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda} - \frac{i}{\alpha-i\lambda}\right) \tag{10}$$

где

$$w'_-(a) = \psi'_{1-}(a) - \psi'_{2-}(a), \qquad K(\alpha) = 2K_1(\gamma a)\,I_1(\gamma a)$$

$$\psi_{2-}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int\limits_{-\infty}^{0} \Psi_0 e^{i\alpha z}\,dz = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \frac{\Psi_0}{i\alpha}$$

Здесь интеграл сходится только при $\tau < 0$. Функция $\psi_{2-}(a)$ имеет особенность на линии $\tau = 0$.

Таким образом, получено одно уравнение с двумя неизвестными $w'_-(a)$ и $\psi_{2+}(a)$, которое может быть решено методом Винера-Хопфа, для чего следует факторизовать функцию

$$K(\alpha) = K_-(\alpha)/K_+(\alpha)$$

где $K_-(\alpha)$ аналитична и не имеет нулей в полуплоскости $\operatorname{Im}\alpha < \operatorname{Im} k$, а $K_+(\alpha)$ — когда $\operatorname{Im}\alpha > -\operatorname{Im} k$.

Если $K(\alpha)$ — целая функция, которую можно представить в виде бесконечного произведения, то факторизация получается сразу. В тех случаях, когда факторизованная функция имеет точку ветвления, метод бесконечных произведений не годится. Процесс, используемый в этом случае, заключается в применении интегральной формулы Коши, причем контуром интегрирования служит граница области аналитичности $K(\alpha)$.

Исследуем область аналитичности функции $K(\alpha)$. Функция $K(\alpha) = 2K_1(\gamma a)\, I_1(\gamma a) = i\pi H_1^{(1)}(i\gamma a)\, J_1(i\gamma a)$ имеет особенности в точках $\alpha = \pm k$, которые являются точками ветвления и функций Хенкеля. Принимая $ka < \varkappa \approx 3.832$*, где $\varkappa_j$ — корни функции Бесселя $J_1(\varkappa_j) = 0$ и учитывая, что функция $H_1^{(1)}(z)$ не имеет нулей в области

$$-\frac{\pi}{2} \leqslant \arg z \leqslant \frac{3\pi}{2} \qquad \text{и} \qquad \operatorname{Re}\gamma a \geqslant 0$$

увидим, что функция $K(\alpha)$ в полосе $-\operatorname{Im} k < \operatorname{Im}\alpha < \operatorname{Im} k$ в нуль не обращается. Следовательно, функция $K(\alpha)$, как функция аналитическая в полосе, может быть представлена в виде

$$\ln K(\alpha) = \ln K_-(\alpha) - \ln K_+(\alpha)$$

где

$$\ln K_-(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c^-} \frac{\ln\left[2K_1(\gamma\alpha)\, I_1(\gamma a)\right]}{\zeta - \alpha}\, d\zeta$$

$$\ln K_+(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{c^+} \frac{\ln\left[2K_1(\gamma a)\, I_1(\gamma a)\right]}{\zeta - \alpha}\, d\zeta$$

Функция $\ln K_-(\alpha)$ аналитична при $\operatorname{Im}\alpha < \operatorname{Im} k$, а $\ln K_+(\alpha)$ при $\operatorname{Im}\alpha > \operatorname{Im} k$. Контуры интегрирования показаны на фиг. 2а. При $\operatorname{Im} k \to 0$ контуры интегрирования c^+ и c^- совпадают с действительной осью, за исключением особых точек подынтегрального выражения, правило обхода которых ясно из фиг. 2б.

Что касается асимптотического поведения функции $K_\pm(\alpha)$, то оно следующее:

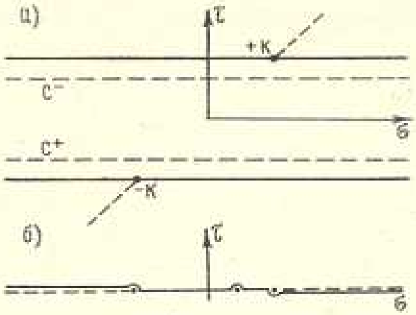
$$|K_\pm(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1/2} \qquad \text{при} \quad \alpha \to \infty$$

Теперь уравнение (10) можно написать в виде

* Когда $ka > 3.832$ при деформации пути интегрирования следует учесть нули функции $J_1(i\gamma a)$.

$$\frac{a}{2}w'_-(a)K_-(\alpha)=\left|\psi_{2+}(a)+\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{\Psi_0}{i\alpha}-\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{kc}{\gamma^2}\left(\frac{i}{\alpha+i\lambda}-\frac{i}{\alpha-i\lambda}\right)\right|K_+(\alpha) \tag{11}$$

Второй член в правой части уравнения (11) имеет полюс в точке $\alpha=0$, а третий — в точках $\alpha=k$ и $\alpha=i\lambda$.



Фиг. 2.

Устраняя эти полюсы обычным способом, будем иметь

$$\frac{a}{2}w'_-(a)K_-(\alpha)-\frac{K_+(0)}{i\alpha}\frac{\Psi_0}{(2\pi)^{1/2}}+\frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{i}{(\alpha-k)}\frac{K_+(k)}{2k(k+i\lambda)}-$$

$$-\frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(i\lambda)}{2k(\alpha-i\lambda)}\frac{i}{(i\lambda-k)}=\psi_{2+}(a)K_+(\alpha)+\frac{\Psi_0}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(\alpha)-K_+(0)}{i\alpha}-$$

$$-\frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{i}{(\alpha-k)}\left[\frac{K_+(\alpha)}{(\alpha+k)(\alpha+i\lambda)}-\frac{K_+(k)}{2k(k+i\lambda)}\right]+$$

$$+\frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{i}{(\alpha-i\lambda)}\left[\frac{K_+(\alpha)}{(\alpha-k)(\alpha+k)}-\frac{K_+(i\lambda)}{(i\lambda+k)(i\lambda-k)}\right] \tag{12}$$

Асимптотическое поведение функций $w'_-(a)$ и $\psi_{2+}(a)$ при $|\alpha|\to\infty$ определяется поведением их оригиналов в окрестности ребра. Для нахождения асимптотического поведения этих функций положим в (1) $k=0$ и рассмотрим задачу для уравнения Лапласа в декартовых координатах. С физической точки зрения такая задача соответствует исследованию течения несжимаемой жидкости в окрестности кромки пластины.

Известно, что в этом случае комплексный потенциал

$$w=Az^{1/2}\qquad (w=\varphi+i\psi,\quad z=x+iy)$$

Отсюда легко вытекает, что

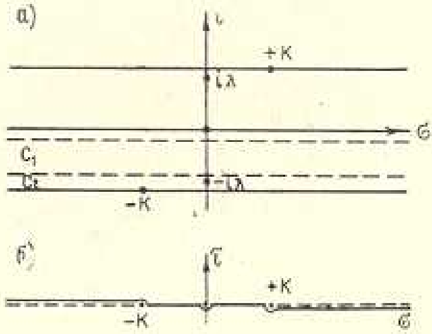
$$\psi\sim x^{1/2}\qquad \text{при}\quad x\to+0$$

$$v_x\sim x^{-1/2}\qquad \text{при}\quad x\to-0$$

Тогда, учитывая соотношения, связывающие асимптотику функций с асимптотикой ее преобразований Фурье, получим

$$|\psi_{2+}(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1} \quad \text{и} \quad |w'_-(\alpha)| \sim |\alpha|^{-1/2} \qquad \text{при} \quad \alpha \to \infty$$

Таким образом, левая часть уравнения (12) аналитична в полуплоскости ниже прямой c_1, правая — выше прямой c_2 и обе аналитичны в полосе между c_1 и c_2 (фиг. 3а). Следовательно, левая часть уравнения (12) является аналитическим продолжением его правой части, и равенство (12) определяет функцию, аналитическую во всей плоскости комплексного переменного α.



Фиг. 3.

Следовательно, по теореме Лиувилля, написанное уравнение (12) определяет целую функцию, которая тождественно равна нулю,

$$w'_-(\alpha) = \frac{2}{aK_-(\alpha)}\left[\frac{\Psi_0}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(0)}{i\alpha} - \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(k)}{2k(\alpha-k)}\frac{i}{(k+i\lambda)} + \right.$$

$$\left. + \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(k)}{2k(k-i\lambda)}\frac{i}{(\alpha-k)} - \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(i\lambda)}{(k+i\lambda)}\frac{i}{(k-i\lambda)(\alpha-i\lambda)}\right] \tag{13}$$

Используя выражения (8), (11) и (13), для определения $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ получим

$$A(\alpha) = -\frac{\pi}{2a}\frac{F(\alpha)}{K_+(\alpha)K_1(\gamma a)}, \qquad B(\alpha) = -\frac{i}{a}\frac{F(\alpha)}{K_+(\alpha)I_1(\gamma a)}$$

где

$$F(\alpha) = \frac{\Psi_0}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(0)}{i\alpha} - \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(k)}{2k(\alpha-k)}\frac{i}{k+i\lambda} +$$

$$+ \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(k)}{2k(k-i\lambda)}\frac{i}{(\alpha-k)} - \frac{kc}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(i\lambda)}{(k+i\lambda)}\frac{i}{(k-i\lambda)(\alpha-i\lambda)}$$

Подставим значения $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ в (6) и (7) соответственно. Проделав обратное преобразование Фурье и устремив λ и k_2 $(k = k_1 + ik_2)$ к нулю, для Ψ получим следующие выражения:

$$\Psi_1 = -\frac{c}{k} + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{r}{a}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\frac{K_1(\gamma r)}{K_+(\alpha)K_1(\gamma a)}e^{-i\alpha z}d\alpha, \qquad r \geqslant a \tag{14}$$

$$\Psi_2 = -\frac{c}{k} + \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{r}{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\frac{I_1(\gamma r)}{K_+(\alpha) I_1(\gamma a)} e^{-i\alpha z} d\alpha, \qquad 0 \leqslant r \leqslant a \quad (15)$$

где

$$F(\alpha) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\frac{K_+(0)}{i\alpha}\left(\Psi_0 + \frac{c}{k}\right)$$

В этих интегралах особенности подынтегральных функций нужно обходить, как показано на фиг. 3б.

Автор признателен Л. А. Галину за интересные обсуждения.

Всесоюзный научно-исследовательский институт гидротехники и мелиорации им. А. Н. Костякова

Поступила 5 III 1969

Մ. Հ. ԽՈՒԲԼԱՐՅԱՆ

ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ, ԽՈՐԱՍՈՒԶՎԱԾ ՊՏՈՒՏԱԿԱՅԻՆ ՇԻԹԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտվում է՝ առանցքասիմետրիկ, համասեռ, պտտական շիթի արտահոսումը կիսաանվերջ խողովակից՝ ազատ տարածություն։

Ֆուրյեի ինտեգրալ ձևափոխման և Ջոնսի մեթոդի միջոցով, ստացվում է մեկ ֆունկցիոնալ հավասարում երկու անհայտ ֆունկցիաներով, որը լուծվում է Վիներ-Խոպֆի մեթոդով։ Լուծումը տրվում է քառակուսացման ձևով։

M. H. KHUBLARJAN

ON A SWIRLING AXISYMMETRIC SUBMERGED JET

Summary

Discharging of a homogeneous swirling axisymmetric jet out of a semi-infinite tube into a free space is considered.

A functional equation with two unknown functions is obtained after the integral Fourrier transformations by the variable z (the axis z coincides with the symmetric axis of the tube) and with the aid of Jones' method. This equation is solved by the Wiener-Hopf method. In consequence the solution in quadrature has been found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. Изд-во ИЛ, 1962.