ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 5, 1969 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ВСТРЕЧИ ФРОНТОВ ВОЛН

1. Рассматривается задача определения давления и скоростей жидкости в окрестности точки соединения некоторого фронта волны S, несущей заданную особенность, с дифракционной волной Σ. Поскольку структура решения в малых областях для различных граничных задач описывается единообразно, вначале рассмотрена задача о проникании давления в жидкость. Выбирая оси $0x$ по поверхности жидкости, ось $0y$ — в глубь нее и задавая граничное условие для давления на поверхности в виде

$$P(x,\ 0,\ t) = \begin{cases} P_1(x,\ t) & |x| < R(t) \\ 0 & |x| > R(t) \end{cases} \tag{1.1}$$

решение линеаризованной плоской задачи по методу Адамара запишется

$$\varphi = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_0^{r_0^*} dx' \int_{f(x')}^{t-\frac{1}{a}\sqrt{(x-x')^2+y^2}} \frac{\varphi_1(x',\ t')\,dt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \dfrac{(x-x')^2+y^2}{a^2}}} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{r_1^*}^{0} dx' \int_{f(-x')}^{t-\frac{1}{a}\sqrt{(x-x')^2+y^2}} \frac{\varphi_1(x',\ t')\,dt'}{\sqrt{(t-t')^2 - \dfrac{(x-x')^2+y^2}{a^2}}} \tag{1.2}$$

где решена граничная задача для потенциала φ, причем $\varphi_1(x,\ t) = \int_{f(x)}^{t} P_1 dt$ [1], a — скорость звука невозмущенной жидкости, $t = f(x)$ — функция, обратная $x = R(t)$, $x' = r_{0,\,1}^*$ — корни уравнений

$$r_0^* = R(t'), \qquad r_1^* = -R(t'), \qquad t' = t - \frac{\sqrt{(x-x')^2+y^2}}{a} \tag{1.3}$$

Решение (1.2) имеет место в области $r \leqslant at$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

При $R'(0) > a$ граница возмущенного движения жидкости состоит из волны AB, несущей граничное условие при $x = R(t)$, и дифракционной волны BB_1, соответствующей границе области влияния начального возмущения в 0, с уравнением $t = \dfrac{r}{a}$.

Вблизи точки B соединения волн в (1.2) выражение $t - \frac{r}{a}$ мало, причем приближенно

$$f(x') = \frac{x'}{V} - \frac{R''(0)}{2V^3} x'^2 = f, \qquad x' \approx \sqrt{t - \frac{r}{a}} \approx \sqrt{t'} \quad (1.4)$$

в первом слагаемом и $r_1^* \approx t - \frac{r}{a}$, причем второе слагаемое в (1.2) следует отбросить. Граничное условие на поверхности можно взять в виде

$$\eta_1(x', t') = A(t' - f)^{\alpha} t'^{\beta} \quad (1.5)$$

где A, α, β — постоянные, причем α характеризует степень гладкости AB, β — порядок затухания волны в точке B.

Если ввести переменную $t' - f = \xi$, учесть порядок $\xi \approx t - \frac{r}{a}$, $x' \approx x - \frac{a^2 t}{V}$ и в подкоренном выражении оставить малые порядка $t - \frac{r}{a}$ в окрестности точки B, имеющей полярные координаты $r = at$, $\theta = \theta_0$, $\cos\theta_0 = \frac{1}{M}$, решение (1.2) можно записать в виде

$$\varphi = -\frac{A_1}{V^{\beta}} \frac{1}{\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_0^{\sqrt{\frac{2t\delta}{\lambda_0}} - \theta t} x_4^{\beta} dx_4 \int\limits_0^{\delta - \frac{(x_4 + t\theta)^2}{2t}\lambda_0} \frac{\xi^{\alpha} d\xi}{\sqrt{2t\delta - \lambda_0 (x_4 + t\theta)^2 - 2t\xi}} \quad (1.6)$$

$$\lambda_0 = 1 - t \frac{R'' a^2}{V^3 \sin^2 \theta_0}$$

где обозначено $\frac{\theta - \theta_0}{\lambda_0}$ через θ, $x' = \frac{a x_4}{\sin\theta_0}$, $\delta = t - \frac{r}{a} + \frac{t}{2}\lambda_0 \theta^2$, причем $\delta = 0$ есть уравнение AB около B; интегрирование по ξ ведется поперёк волны AB, по x_4 — вдоль нее

$$A_1 = A\left(\frac{a}{\sin\theta_0}\right)^{\beta+1} \quad (1.7)$$

Решение (1.6) годится в области $t > \frac{r}{a}$. При $t < \frac{r}{a}$ решение дается (1.2), где $r_2^* < x' < r_1^*$, $r_{1,2}^*$ — корни уравнения (1.3), и (1.6) перепишется

$$\varphi = \frac{A_1}{V^3}\sin\theta_0 \frac{1}{\pi}\frac{1}{\sqrt{2t}}\int\limits_{-\sqrt{\frac{2t\delta}{\lambda_0}}-\theta t}^{\sqrt{\frac{2t\delta}{\lambda_0}}-\theta t} x_4^\beta\left\{\delta-\lambda_0\frac{(x_4+t\theta)^2}{2t}\right\}^{\alpha-\frac{1}{2}}\times$$

$$\times dx_4\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)B\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\right) \qquad (1.8)$$

По такому же типу запишется решение в окрестности точки соединения произвольной волны AB, имеющей начальный профиль $A(-\tau_1)^\lambda\left(\frac{x_4}{ct}\right)^\beta$, где $t=\tau_1$ — уравнение AB, $\tau_1=0$ — начальное положение AB, x_4 — координата вдоль AB, $x_4\approx ct(\theta_0-\theta)$ при $t\to 0$. Решение на AB при $\beta=0$ найдено в [2] с помощью формулы Адамара решения задачи Коши с начальными данными, взятыми из указанного профиля волны.

Решение [2] годится и для $\beta\neq 0$, а также не только на самой AB, но и во всей окрестности точки B, будучи исправлено в соответствии с (1.6) и (1.8). Тогда можно получить для $t>\tau$

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\pi(ct)^\beta}\frac{\lambda A c^{-\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_\beta|_{M_0}}}\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2c\delta}{k_1-k_2}}-\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}} x_4^\beta dx_4\times$$

$$\times\int\limits_0^{c\delta-\frac{k_1-k_2}{2}\left(x_4+\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2}\frac{y_2^{\lambda-1}\,dy_2}{\sqrt{c\delta-\frac{k_1-k_2}{2}\left(x_4+\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2-y_2}} \qquad (1.9)$$

где $\delta=t-\tau+\frac{1}{2c}\frac{(\theta-\theta_0)^2}{k_1-k_2}$, $\delta=0$ есть уравнение AB, $t=\tau$ есть уравнение BB_1, $\theta=\theta_0$ дает луч, проходящий через B, k_2 — кривизна начальной волны, M — точка вблизи фронта волны, M_0 — точка на начальной волне $0=\tau_1$, k_1 — кривизна гиперсферы $(t=\tau_0)$ с центром в M, взятая в M_0, $\bar{x}$ — радиус-вектор точки M_0 с центром в M, β — угол наклона лучей, выходящих из M, к оси $0y$ и образующих коноид $t=\tau_0$, c — скорость звука в M_0, θ — угол выхода лучей к оси $0x$ с начальной волны [2].

Решение (1.9) можно переписать в виде

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\pi(ct)^\beta}\frac{\lambda A c^{-\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_\beta|_{M_0}}}B\left(\lambda,\ \frac{1}{2}\right)\int\limits_0^{\sqrt{\frac{2c\delta}{k_1-k_2}}-\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}} x_4^\beta\times$$

$$\times\left\{c\delta-\frac{k_1-k_2}{2}\left(x_4+\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2\right\}^{\lambda-\frac{1}{2}} dx_4 \qquad (1.10)$$

Замена переменной

$$\xi = \frac{x_4 + \dfrac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2}}{\sqrt{\dfrac{2c\delta}{k_1 - k_2}}} \tag{1.11}$$

приводит (1.10) к виду

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi (ct)^{\beta}} \frac{\lambda A \delta^{\lambda}}{\sqrt{|x_{\beta}|_{M_0}}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{k_1 - k_2}} \left(\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}\right)^{\frac{\beta}{2}} \times$$

$$\times \int_{\alpha_0}^{1} (1 - \xi^2)^{\lambda - \frac{1}{2}} (\xi - \alpha_0)^{\beta} \, d\xi$$

$$\alpha_0 = \frac{\theta - \theta_0}{\sqrt{2c(k_1 - k_2)\delta}} \tag{1.12}$$

Заменой переменной

$$1 - \xi = (1 - \alpha_0) y \tag{1.13}$$

из (1.12) можно найти решение через гипергеометрическую функцию

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi (ct)^{\beta}} \frac{\lambda A \delta^{\lambda}}{\sqrt{|x_{\beta}|_{M_0}}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{k_1 - k_2}} \left(\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}\right)^{\frac{\beta}{2}} 2^{\lambda - \frac{1}{2}} \times$$

$$\times (1 - \alpha_0)^{\lambda + \frac{1}{2} + \beta} \frac{\Gamma\left(\lambda + \dfrac{1}{2}\right) \Gamma(1 + \beta)}{\Gamma\left(\lambda + \dfrac{3}{2} + \beta\right)} \times$$

$$\times F\left(-\lambda + \frac{1}{2}, \ \lambda + \frac{1}{2}, \ \lambda + \frac{3}{2} + \beta, \ \frac{1 - \alpha_0}{2}\right) \tag{1.14}$$

Полагая в (1.14) $\lambda = 0$, $\beta = 0$, можно найти решение плоской задачи для давления через арктангенсы [3].

В области $t < \tau$ согласно (1.8) в решении (1.9) следует нижний предел для x_4 заменить на $-\sqrt{\dfrac{2c\delta}{k_1 - k_2}} + \dfrac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}$. Тогда вместо (1.11) можно найти

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi (ct)^{\beta}} \frac{\lambda A c^{-\lambda}}{\sqrt{|x_{\beta}|_{M_0}}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \int_{-\sqrt{\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}} + \frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}}^{\sqrt{\frac{2c\delta}{k_1 - k_2}} + \frac{\theta_0 - \theta}{k_1 - k_2}} x_4^{\beta} \times$$

$$\times \left\{c\delta - \frac{k_1 - k_2}{2} \left(x_4 + \frac{\theta - \theta_0}{k_1 - k_2}\right)^2\right\}^{\lambda - \frac{1}{2}} dx_4 \tag{1.15}$$

и после замены переменной (1.11),

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{2}\,\pi\,(ct)^{\beta}}\frac{\lambda A\delta^{\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_3|_{M_0}}}B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)\sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}}\left(\frac{2c\delta}{k_1-k_2}\right)^{\frac{\beta}{2}}$$

$$\varphi = \mu\int\limits_{-1}^{1}(\xi+\alpha_0)^{\beta}\,(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}\,d\xi, \qquad \alpha_0 = \frac{\theta_0-\theta}{\sqrt{2c(k_1-k_2)\delta}} \qquad (1.16)$$

Выражение (1.16) можно записать через гипергеометрическую функцию

$$\varphi = \mu\,2^{2\lambda}\,(1+\alpha_0)^{\beta}\,\frac{\Gamma^2\left(\lambda+\dfrac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda+1)}F\left(-\beta,\ \lambda+\frac{1}{2},\ 2\lambda+1,\ \frac{2}{\alpha_0+1}\right) \qquad (1.17)$$

Полученные решения верны для плоской задачи. В осесимметричной задаче решение снова дается (1.14), (1.17), только нужно учесть амплитудный множитель $\sqrt{\dfrac{\bar{x}'}{x}}\approx\sqrt{\dfrac{x'}{ct\cos\theta_0}}$ [4]. В частности, для разрывного давления P_1 и осесимметричной задаче, полагая в (1.17) $\lambda=0$, $\beta=\dfrac{1}{2}$, можно найти для давления

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{P_1}{\sqrt{|\bar{x}_3|_{M_0}}\,\sqrt{\cos\theta_0}}\sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}}\left(\frac{2c\delta}{k_1-k_2}\right)^{\frac{1}{4}}(1+\alpha_0)^{\frac{1}{2}}\times$$

$$\times F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{2}{\alpha_0+1}\right) \qquad (1.18)$$

Если учесть соотношения [5]

$$F\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 1,\ x^2\right) = \frac{2}{\pi}E\left(\frac{\pi}{2},\ x\right) \qquad (1.19)$$

где $F\left(\dfrac{\pi}{2},\ x\right)$ — эллиптический интеграл второго рода, и $(2c\delta)^{\frac{1}{4}}\times$ $\times(k_1-k_2)^{\frac{1}{4}} = (\theta_0-\theta)^{\frac{1}{2}}\dfrac{x}{\sqrt{2-x^2}}$, сравнивая (1.18) с решением [4], можно получить соотношение для эллиптических интегралов

$$E\left(\frac{\pi}{2},\ x\right) = \sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}\;E\left(\frac{\pi}{2},\ k\right) -$$

$$-\frac{2\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}}F\left(\frac{\pi}{2},\ k\right) \qquad (1.20)$$

$$k = \sqrt{\frac{2-x^2-2\sqrt{1-x^2}}{2-x^2+2\sqrt{1-x^2}}}$$

Соотношение для гипергеометрических функций [6]

$$F\left(-\beta, \lambda+\frac{1}{2}, 2\lambda+1, x\right)=\left(1-\frac{x}{2}\right)^{\beta} F\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{-\beta+1}{2}, \lambda+1, \zeta\right) \tag{1.21}$$

$$\zeta=\left(\frac{x}{2-x}\right)^{2}$$

приводит решение (1.17) к виду

$$\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi(ct)^{\beta}} \frac{\lambda A \delta^{\lambda}}{\sqrt{|\bar{x}_3|_{M_0}}} B\left(\lambda, \frac{1}{2}\right) \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}}\, 2^{2\lambda} \frac{\Gamma^2\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2\lambda+1)} \times$$

$$\times \frac{(\theta_0-\theta)^{\beta}}{(k_1-k_2)^{\beta}} F\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{-\beta+1}{2}, \lambda+1, \frac{1}{\alpha_0^2}\right) \tag{1.22}$$

Следует отметить, что, заменяя в (1.10) и (1.15) λ на $\frac{1}{\Gamma(\lambda)}$, что лучше соответствует характеру свертки при получении решения произвольного профиля, и обозначая $\varphi=\varphi_{\lambda, \beta}$, $s=\tau-t$, можно найти

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s}=-\varphi_{\lambda-1, \beta}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \theta}=-\varphi_{\lambda-1, \beta+1} \tag{1.23}$$

что позволяет выразить через потенциал φ давление и компоненты скорости. Выражение (1.14) в случае $\lambda=0$, $\beta=1$ даст тогда значение $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}$ в плоской задаче, сравнение которого со значением v_θ, найденным в [4], если обозначить $x=\sqrt{\frac{-2sc(k_1-k_2)}{\theta-\theta_0}}$, дает равенство

$$x-\operatorname{arctg} x=\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}\left(1+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)^{\frac{3}{2}} \times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{1-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}{2}\right)$$

На самой волне AB $\delta=0$, поэтому при $\delta \approx 0$, обозначая значение потенциала вблизи AB через φ_0, можно из (1.22) найти

$$\varphi_0=A_0 \delta^{\lambda}(\theta_0-\theta)^{\beta}, \quad A_0=\frac{A}{\sqrt{|\bar{x}_3|_{M_0}}\,(ct)^{\beta} \sqrt{k_1-k_2}\,(k_1-k_2)^{\beta}} \tag{1.24}$$

Тогда (1.22) запишется в виде*

$$\varphi = A_{\lambda}\delta^{\lambda}(\theta_0-\theta)^{\beta} F\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{-\beta+1}{2}, \lambda+1, \frac{1}{\alpha_0^2}\right), \qquad \tau > t \qquad (1.25)$$

В случае задачи с осевой симметрией в подынтегральных выражениях (1.9) следует поставить множитель, соответствующий множителю элементарного решения при осевой симметрии, вида $\sqrt{\frac{x_1}{\sin\theta_0\cos\theta_0 t}}$. Тогда в (1.14), (1.25) следует заменить β на $\beta+\frac{1}{2}$ и поставить множитель $\sqrt{\frac{ct}{\sin\theta_0 x}}$.

Для получения решения в пространственной задаче для однородной жидкости можно воспользоваться решением [7] для определения окрестности волны S через значения, заданные на начальной волне S_0. Начало системы $0x_1x_2x_3$ выбирается в некоторой точке поверхности S_0, совпадающей с точкой, в которой определяется решение, ось $0x_3$ направляется по нормали к S_0, оси x_1 и x_2 направлены по линиям кривизны S_0. Тогда [7] уравнение S_0 приближенно имеет вид

$$x_3 = -\frac{x_1^2}{2R} - \frac{x_2^2}{2S} \qquad (1.26)$$

где $k_2 = -\frac{1}{R}$, $k_4 = -\frac{1}{S}$ — кривизны нормальных сечений S_0. Уравнение сферы радиуса ct с центром $(0, 0, h)$ имеет вид [7]

$$x_3 = -\delta_0 + \frac{x_1^2+x_2^2}{2\lambda}, \qquad \delta_0 = ct - h \qquad (1.27)$$

а разность уравнений S_0 и сферы

$$Z_0 = \delta_0 - \frac{x_1^2}{2}(k_1-k_2) - \frac{x_2^2}{2}(k_3-k_4) \qquad (1.28)$$

Из сравнения с (1.9) видно, что для определения решения в произвольной точке $\left(\frac{\theta_0-\theta}{k_1-k_2}, \frac{\varphi_0-\varphi}{k_3-k_4}, h\right)$ следует взять вместо Z_0 в качестве эйконала выражение

$$Z = \delta - \frac{1}{2}(k_1-k_2)\left(x_1 + \frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2 - \frac{1}{2}(k_3-k_4)\left(x_2 + \frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4}\right)^2 \qquad (1.29)$$

$$\delta = \delta_0 + \frac{1}{2}\frac{(\theta_0-\theta)^2}{k_1-k_2} + \frac{1}{2}\frac{(\varphi-\varphi_0)^2}{k_3-k_4}$$

---

* Решения (1.14) и (1.25), после аналитического продолжения к значениям аргументов $\frac{1+\alpha_0}{2}$ и $1-\frac{1}{\alpha_0^2}$, дают решение на волне $t=\tau$, $0<\theta_0$.

где $\delta=0$ есть уравнение S. Решение, удовлетворяющее начальным условиям на S_0

$$\Phi_0=AZ^\lambda \frac{x_1^\beta |x_2|^\alpha}{(ct)^{\alpha+\beta}}, \qquad \Phi_1=A\lambda cZ^{\lambda-1}\frac{x_1^\beta |x_2|^\alpha}{(ct)^{\alpha+\beta}} \tag{1.30}$$

где введены угловые координаты $\dfrac{\theta_0-\theta}{k_1-k_2}=x_1$, $\dfrac{\varphi_0-\varphi}{k_3-k_4}=x_2$, запишется через формулу Пуассона [7]

$$\Phi=tM_{ct}\{\Phi_1\}+\frac{\partial}{\partial t}tM_{ct}\{\Phi_0\} \tag{1.31}$$

Здесь $M_{ct}\{\Phi_0\}$ есть интеграл от Φ_0, взятый по поверхности указанной сферы, ограниченной линией пересечения сферы и S_0, поделенный на $4\pi c^2t^2$. Из неотрицательности Z следует, что на указанном контуре, ограничивающем область интегрирования в (1.31), Z равно нулю. Тогда можно получить из (1.30) и (1.31)

$$\Phi=\frac{A}{2\pi ct}\frac{\lambda}{(ct)^{\alpha+\beta}}\iint Z^{\lambda-1}x_1^\beta |x_2|^\alpha\, dx_1dx_2 \tag{1.32}$$

Из решения для плоской и осесимметричной задачи следует, что условия, накладываемые на область интегрирования, имеют вид $Z=0$, $x_1\geqslant 0$. Следует отметить, что в плоской задаче дифракционная волна $\Sigma(BB_1)$ образуется из прямого ребра криволинейного двугранного угла, представляющего начальную волну S_0, причем как в (1.6), так и в (1.9) значения $x'<0$, $x_4<0$ отброшены, поскольку соответствующая им часть решения — малая более высокого порядка. В осесимметричной задаче волновая поверхность $\Sigma(BB_1)$ образуется из угловой точки на S_0. Линии x_1 будут меридианами, а x_2 — параллелями S_0. Область интегрирования в (1.31) дается участком области S_0, отсекаемым сферой (1.27) и односторонним по отношению к угловой точке, причем основной вклад в решение дает окрестность меридиана $x_2=0$. Если формально рассмотреть в меридианном сечении участки с $x_1<0$, в (1.29) появятся слагаемые с первой степенью x_1 и вместо $x_1\sim\sqrt{\delta}$ будет $x_1\sim\delta$, причем соответствующий вклад в (1.31) — малая высокого порядка. В обоих случаях линия соединения Σ и S имеет уравнение $x_1=0$. В общем случае также предполагается, что линия соединения Σ и S имеет уравнение $x_1=0$. Для начальной волны S_0 с угловой точкой показано, что это предположение оправдано, причем решение подобно случаю осесимметричной формы S_0. Кроме того, в указанном случае имеет место $k_4\sim\dfrac{1}{x_1}$, то есть кривизна нормального сечения в направлении x_2 велика. Поэтому вначале рассмотрены произвольные пространственные фронты волн S_0 с конечной кривизной, что подобно плоскому случаю, а затем фронты волн S_0 с угловой точкой и

$k_1 \sim \frac{1}{x_1}$. Для тех случаев, когда линия соединения Σ и S дается соотношением $F(x_1, x_2) = 0$, следует наложить дополнительные условия на область интегрирования (в частности, для дифракции на многограннике, выбрав его ребро за линию $x_2 = 0$, следует полагать, по-видимому, $Z = 0$, $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$).

Пусть $\alpha = 0$. Тогда (1.32) запишется в виде

$$\Phi = \frac{A}{2\pi ct} \frac{\lambda}{(ct)^\beta} \int x_1^\beta dx_1 \int\limits_{-\frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4} - \sqrt{\delta - \frac{1}{2}(k_1-k_2)\left(x_1+\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2} \sqrt{\frac{2}{k_3-k_4}}}^{-\frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4} + \sqrt{\delta - \frac{1}{2}(k_1-k_2)\left(x_1+\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2} \sqrt{\frac{2}{k_3-k_4}}} Z^{\lambda-1} dx_2 \tag{1.33}$$

Заменой переменной интегрирования

$$x_2 + \frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4} = \xi \sqrt{\delta - \frac{1}{2}(k_1-k_2)\left(x_1 + \frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2} \sqrt{\frac{2}{k_3-k_4}}$$

в области между Σ и S, где $\lambda_1 < 0$, и соответственно расставлены пределы интегрирования, (1.32) приводится к виду

$$\Phi = \frac{AB\left(\lambda, \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\pi ct} \sqrt{\frac{2}{k_3-k_4}} \frac{1}{(ct)^\beta} \times$$

$$\times \int\limits_{-\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2} - \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}\delta}}^{-\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2} + \sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}\delta}} x_1^\beta \left\{\delta - \frac{1}{2}(k_1-k_2)\left(x_1 + \frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}\right)^2\right\}^{\lambda-\frac{1}{2}} dx_1 \tag{1.34}$$

$$\lambda_1 = \delta_0 + \frac{1}{2} \frac{(\varphi_0-\varphi)^2}{k_3-k_4}$$

Пользуясь соотношениями (1.11), (1.16), (1.17) и (1.21), формулу (1.34) можно привести к виду

$$\Phi = \Phi_0 F\left(-\frac{\beta}{2}, \frac{-\beta+1}{2}, \lambda+1, \frac{1}{\alpha_0^2}\right)$$

$$\Phi_0 = \frac{A}{ct} \sqrt{\frac{1}{(k_3-k_4)(k_1-k_2)}} \frac{(\theta_0-\theta)^\beta}{(ct)^\beta (k_1-k_2)^\beta} \tag{1.35}$$

Таким образом, при $\alpha = 0$, т. е. симметричном по x_2 граничном условии (1.30), пространственный характер самой волны S скажется только в множителе, соответствующем решению на самой волне, а в остальном решение совпадает с решением в плоскости x_1, x_3. В области $\lambda_1 > 0$ решение дается (1.34), где нижний предел интегрирования заменен нулем. После некоторых преобразований решение запишется в виде

$$\Phi=\frac{AB\left(\lambda,\ \frac{1}{2}\right)\lambda}{2\pi ct}\sqrt{\frac{2}{(k_1-k_2)(k_3-k_4)}}\frac{1}{(ct)^{\beta}}\left(\frac{2\delta}{k_1-k_2}\right)^{\frac{\beta}{2}}\times$$

$$\times 2^{\lambda-\frac{1}{2}}(1+\alpha_0)^{\lambda+\frac{1}{2}+\beta}\frac{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\Gamma(1+\beta)}{\Gamma\left(\lambda+\frac{3}{2}+\beta\right)}\times$$

$$\times F\left(-\lambda+\frac{1}{2},\ \lambda+\frac{1}{2},\ \lambda+\frac{3}{2}+\beta,\ \frac{1+\alpha_0}{2}\right) \tag{1.36}$$

также соответствующем плоскому случаю.

При произвольном α, согласно (1.29), (1.30), (1.31), решение в области $\lambda_1<0$ запишется в виде

$$\Phi=\frac{A}{2\pi ct}\frac{\lambda}{(ct)^{\alpha+\beta}}\int|x_2|^{\alpha}\,dx_2\times$$

$$\times\int\limits_{-\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}-\sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}}\sqrt{\delta-\frac{1}{2}(k_3-k_4)\left(x_2+\frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4}\right)^2}}^{-\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}+\sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}}\sqrt{\delta-\frac{1}{2}(k_3-k_4)\left(x_2+\frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4}\right)^2}} Z^{\lambda-1}x_1^{\beta}dx_1 \tag{1.37}$$

Заменой переменной интегрирования

$$x_1+\frac{\theta-\theta_0}{k_1-k_2}=\sqrt{\frac{2}{k_1-k_2}}\sqrt{\delta-\frac{1}{2}(k_3-k_4)\left(x_2+\frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4}\right)^2}\,\zeta \tag{1.38}$$

можно, используя для внутреннего интеграла соотношения (1.5) и (1.6), получить из (1.21)

$$\Phi=\frac{A\sqrt{2}}{2\pi ct}\frac{\lambda\Gamma(\lambda)\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)}\frac{(\theta_0-\theta)^{\beta}\sqrt{\frac{1}{k_1-k_2}}}{(k_1-k_2)^{\beta}(ct)^{\alpha+\beta}}\left(\frac{2}{k_3-k_4}\right)^{\frac{\alpha+1}{2}}\delta^{\frac{\alpha}{2}+1}\times$$

$$\times\int\limits_{-1}^{1}|\xi+\beta_0|^{\alpha}(1-\xi^2)^{\lambda-\frac{1}{2}}F\left(-\frac{\beta}{2},\ \frac{-\beta+1}{2},\ \lambda+\frac{1}{2},\ \frac{1}{\alpha_0^2}\right)d\xi \tag{1.39}$$

где введена переменная интегрирования

$$x_2=-\frac{\varphi-\varphi_0}{k_3-k_4}+\sqrt{\frac{2\delta}{k_3-k_4}}\,\xi \tag{1.40}$$

и введены обозначения

$$\alpha_0 = \frac{\theta_0 - \theta}{\sqrt{2(k_1 - k_2)\delta}\,\sqrt{1 - \xi^2}}, \qquad \beta_0 = \frac{\varphi_0 - \varphi}{\sqrt{2(k_3 - k_4)\delta}} \tag{1.41}$$

Непосредственно около волны S $\delta \approx 0$, $\alpha_0 \approx \infty$, $\beta_0 \approx \infty$ из (1.39) можно найти интенсивность волны

$$\Phi_0 = \frac{A}{ct}\frac{(\theta_0 - \theta)^\beta}{(k_1 - k_2)^\gamma (ct)^{\alpha+\beta}}\sqrt{\frac{1}{(k_1 - k_2)(k_3 - k_4)}}\frac{|\varphi_0 - \varphi|^\gamma}{(k_3 - k_4)^\gamma}\delta^\lambda \tag{1.42}$$

Аналогично можно найти решение при $\delta_0 > 0$, а также, по-видимому, проще всего, применяя метод С. Л. Соболева, незначительной модификацией амплитудного множителя в (1.39) найти решение для случая неоднородной жидкости.

Пусть уравнение поверхности S_0, имеющей угловую точку, имеет вид

$$x = f(u, v), \qquad y = g(u, v), \qquad z = \varphi(u, v) \tag{1.43}$$

причем линии u проходят через угловую точку, где $u = 0$. Пусть, кроме того,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{u=0} = f_1(v), \qquad \left.\frac{\partial g}{\partial u}\right|_{u=0} = g_1(v), \qquad \left.\frac{\partial \varphi}{\partial u}\right|_{u=0} = \varphi_1(v) \tag{1.44}$$

Тогда коэффициенты первой и второй квадратичной формы запишутся соответственно в окрестности $u = 0$

$$E = f_1^2 + g_1^2 + \varphi_1^2, \qquad F = 0, \qquad G = u^2(f_1'^2 + g_1'^2 + \varphi_1'^2) \tag{1.45}$$

$$L = \frac{u}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2} \\ f_1 & g_1 & \varphi_1 \\ f_1' & g_1' & \varphi_1' \end{vmatrix}, \qquad M = 0, \qquad N = \frac{u^2}{\sqrt{EG}}\begin{vmatrix} f_1'' & g_1'' & \varphi_1'' \\ f_1 & g_1 & \varphi_1 \\ f_1' & g_1' & \varphi_1' \end{vmatrix} \tag{1.46}$$

Полагая

$$u = x_1, \qquad dv = \frac{dx_2}{x_1}, \qquad L = k_2, \qquad N = k_4 x_1^2, \qquad k_4 = \frac{K_4}{x_1} \tag{1.47}$$

можно получить уравнение S_0

$$x_3 = \frac{1}{2}k_2 x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{K_4}{x_1}x_2^2 \tag{1.48}$$

где k_2, k_4 — кривизны нормальных сечений $x_2 = \text{const}$, $x_1 = \text{const}$. В частности, в осесимметричной задаче $N = x_1 \sin\vartheta_1 \cos\vartheta_1$, $v = \dfrac{x_2}{x_1 \sin\vartheta_1}$, где $2\vartheta_1$ — угол раствора S_0 в угловой точке, и (1.48) запишется в виде

$$x_3 = \frac{1}{2}k_2 x_1^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{x_1 \operatorname{tg}\vartheta_1}x_2^2 \tag{1.49}$$

Обозначая еще

$$x_2=\sqrt{x_1}\,X_2,\qquad (\varphi-\varphi_0)\sqrt{x_1}=\varphi_1-\varphi_2\tag{1.50}$$

решение (1.32) в области $\delta_0<0$ можно записать в виде (1.39), где заменяется β через $\beta+\frac{\alpha+1}{2}$, $\varphi_0-\varphi$ через $\varphi_2-\varphi_1$, k_3-k_4 через k_3-k_4, причем малое $K_3=k_3x_1$ удержано для перехода к начальному условию. С указанной заменой все формулы (1.35), (1.36), (1.39), (1.48) верны для решения задачи, когда начальная волна задана в виде (1.48). Уравнение ударной волны S по (1.29) имеет вид $\delta=0$, где

$$\delta=\delta_0+\frac{1}{2}\frac{(\theta-\theta_0)^2}{k_1-k_2}+\frac{1}{2}\frac{(\varphi-\varphi_0)^2(\theta_0-\theta)}{(k_1-k_2)(K_3-K_4)}\tag{1.51}$$

причем линия пересечения Σ с уравнением $\delta_0=0$ и S с уравнением $\delta=0$ имеет вид $\theta=\theta_0$, то есть $x_1=0$.

2. В качестве другого примера задачи о соединении волн рассматривается задача о поведении ударной волны вблизи особой линии, на которой кривизна волны в линейном приближении бесконечна.

К указанному типу задач относится определение решения в окрестности особой точки A для плоской или осесимметричной задачи для медленной магнитозвуковой волны. Пусть начальное однородное магнитное поле B^0 направлено по оси x и в начале координат действует источник массы. Для гармонического по времени закона источника $\sim e^{-i\omega t}$ решение находится в виде интеграла Фурье от гармоник $e^{-i\omega t+i\omega\alpha x+i\omega\beta y}$, причем α и β удовлетворяют дисперсионному уравнению [8]

$$1-(\alpha^2+\beta^2)(a_0^2+a_1^2-a_0^2a_1^2\alpha^2)=0\tag{2.1}$$

где a_0, a_1 — невозмущенные скорости звука и Альфвена.

В точке A кривизна волн CAB бесконечна, причем кривизна соответствующей поверхности нормалей, т. е. линии (2.1), равна нулю. Поэтому, обозначая в A $\alpha=\alpha_0$, $\beta=\beta_0$, можно получить

$$\frac{d^2\alpha_0}{d\beta_0^2}=0\tag{2.2}$$

Интегральное представление решения для различных периодических во времени задач в окрестности A можно записать в виде функции Эйри. Например, для давления P можно получить [9] в плоской задаче

$$P\approx A_1\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{t^{\frac{1}{3}}}\,e^{i\omega x_1}\omega^{\frac{1}{6}}\,\Phi\left(\omega^{\frac{2}{3}}y_1\right)\tag{2.3}$$

где t — время, A_1 дает интенсивность волны CA,

$$x_1=\alpha_0x+\beta_0y-t,\qquad y_1=\frac{\frac{d\alpha_0}{d\beta_0}x+y}{t^{\frac{1}{3}}}K,\qquad K^3=\frac{2}{\frac{d^3\alpha}{d\beta^3}}\left(\alpha_0-\beta_0\frac{d\alpha_0}{d\beta_0}\right)\tag{2.4}$$

Линия $x_1 = 0$ есть касательная к волне CAB в A, линия $y_1 = 0$ дает луч $0A$, вообще же при произвольных α и β линия $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ есть фронт волны CAB. В области внутри CAB $y_1 < 0$. Тогда пользуясь асимптотическим представлением $\Phi(y_1 \omega^{\frac{2}{3}})$ для больших $\omega^{\frac{2}{3}} y_1$, можно найти интенсивность волн CA и AB

$$P \approx \frac{A_1}{2} \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}} e^{i\omega x_1 \pm i\omega \tau_2} e^{i\frac{\pi}{4} \mp i\frac{\pi}{4}} (-y_1)^{-\frac{1}{4}}, \qquad \tau_2 = \frac{2}{3}(-y_1)^{\frac{3}{2}} \tag{2.5}$$

что соответствует решению геометрической акустики, причем верхние знаки дают CA, нижние — волну AB.

Уравнение самой волны AB, являющейся характеристикой линейного уравнения, имеет вид

$$x_1 = \tau_2 \tag{2.6}$$

Для произвольного нестационарного источника решение находится [9] обратным преобразованием Фурье в виде гипергеометрических функций, но характер зависимости его от переменных t, x_1, y_1 прежний. Тогда имеет место вблизи A

$$x_1 \sim (-y_1)^{\frac{3}{2}}, \qquad t \sim 1 \tag{2.7}$$

поэтому производные по x_1 значительно превосходят производные по y_1 и t.

Если ввести для произвольной точки t, x, y лучевые координаты

$$x = \frac{t-\tau}{\alpha - \beta \frac{d\alpha}{d\beta}}, \qquad y = -\frac{\frac{d\alpha}{d\beta}}{\alpha - \beta\frac{d\alpha}{d\beta}}(t-\tau) \tag{2.8}$$

и записать $\beta = \beta_0 + \beta_1$, где β_1 мало, из (2.8) и (2.4) можно приближенно найти

$$x_1 = \frac{\frac{1}{3}\frac{d^3\alpha_0}{d\beta_0^3} t}{\alpha_0 - \beta_0 \frac{d\alpha_0}{d\beta_0}} \beta_1^3 - \tau, \qquad \frac{t^{\frac{1}{3}}}{K} y_1 = \frac{-\frac{1}{2}\frac{d^3\alpha_0}{d\beta_0^3} t}{\alpha_0 - \beta_0\frac{d\alpha_0}{d\beta_0}} \beta_1^2 \tag{2.9}$$

причем $\tau = 0$ дает фронт волн CAB. Уравнение нелинейной характеристики вблизи AB для конечных y_1 может быть записано в одномерной форме

$$\left.\frac{\partial \tau}{\partial t}\right|_{\beta_1} = -A_0 P \tag{2.10}$$

где постоянная A_0, дающая нелинейный вклад в скорость возмущений, дается ниже. Заменяя в линейном решении характеристическую переменную $x_1 - \alpha_3$ через y_2, где $y_2 = \mathrm{const}$ есть уравнение характеристик (2.10), можно получить исправленное нелинейное решение.

Переходя в (2.10) к x_1, y_1 по (2.9) и считая в переменных x_1, y_1 движение установившимся $\left(\text{с точностью до множителя } \frac{1}{t^{\frac{1}{3}}}\text{, не влияющего на уравнение характеристик}\right)$, из (2.10) можно найти уравнение характеристик вдали от A

$$\frac{dx_1}{dy_1} + (-y)^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\,\frac{A_0 P}{y_1}\,t \tag{2.11}$$

которому при $A_0 = 0$ удовлетворяет линейный фронт волны (2.6).

Для получения уравнения характеристик в окрестности A можно использовать уравнение характеристик [11]

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2}} = c + u_n \tag{2.12}$$

где скорость c находится из уравнения

$$\rho c^4 - \left(\rho a^2 + \frac{H^2}{4\pi}\right)c^2 + a^2\,\frac{H_n^2}{4\pi} = 0, \qquad H_n = H_x \cos\theta + H_y \sin\theta \tag{2.13}$$

u_n — нормальная к волне скорость жидкости, θ — угол нормали к AB с $0x$. Если обозначить через v_x, v_y скорости жидкости по осям, ρ — плотность жидкости и ввести возмущенные значения напряженности $H_x = B^\circ + B^\circ h_x$, $H_y = B^\circ h_y$, условия совместности на характеристике дают в линейном приближении

$$v_x = \frac{1}{\rho_0}\,\alpha_0 P, \qquad v_y = \frac{1}{\rho_0}\,\frac{\beta_0}{\mu}\,P$$

$$h_x = \frac{1}{\rho_0}\,\frac{\beta_0^2}{\mu}\,P, \qquad h_y = -\frac{1}{\rho_0}\,\frac{\alpha_0\beta_0}{\mu}\,P \tag{2.14}$$

$$u_n = \frac{P}{\rho_0 a_0^2}\,c_0, \qquad c_0^2 = \frac{1}{\alpha_0^2 + \beta_0^2}, \qquad \mu = 1 - a_1^2(\alpha_0^2 + \beta_0^2)$$

где c_0 есть невозмущенная скорость волны в A.

Пусть уравнение состояния взято в виде уравнения политропы

$$a^2 = a_0^2 + 2(\alpha_2 - 1)\,\frac{P}{\rho_0}, \qquad \rho = \rho_0\left(1 + \frac{P}{\rho_0 a_0^2}\right) \tag{2.15}$$

Если записать $c = c_{\text{линейное}} + c_1$, где c_1 соответствует влиянию давления на скорость возмущений, и подставить в (2.13), то используя соотношения (2.14) и (2.1), можно получить

$$\dot{u}_n + c_1 = AP$$

$$A = -\frac{\alpha_2}{\rho_0 c_0} c_0^2 \frac{1 - a_1^2 \alpha_0^2}{a_0^2 + a_1^2 - 2c_0^2} + \frac{1}{\rho_0 c_0 a_0^2} \frac{3}{2} \frac{a_0^2 - c_0^2}{a_0^2 + a_1^2 - 2c_0^2} c_0^2 \tag{2.16}$$

Обозначая через θ угол нормали к нелинейной волне, $\cos^2\theta = \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2}$, можно из (2.12) и (2.14) найти

$$\frac{\dfrac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2}} = \sqrt{\frac{a_0^2 + a_1^2 - \sqrt{(a_0^2 + a_1^2)^2 - 4a_0^2 a_1^2 \dfrac{1}{1 + \left(\dfrac{\partial x}{\partial y}\right)^2}}}{2}} + AP \tag{2.17}$$

Для упрощения уравнения (2.17) вблизи точки A, следует перейти к переменным t, x_1, y_1 по (2.4).

Подставляя (2.4) в (2.17), возводя дважды обе части в квадрат и оставляя малые порядка $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^3$, можно убедиться, что в силу соотношения

$$\frac{d\alpha_0}{d\beta_0} = -\frac{\alpha_0}{\beta_0} \frac{1}{1 - (\alpha_0^2 + \beta_0^2)^2 a_0^2 a_1^2} \tag{2.18}$$

слагаемые с $\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}$ сократятся, а в силу (2.2) также сократятся слагаемые с $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^2$. Если учесть еще, что коэффициенты при $\left(\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^3$ и $\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1} y_1$ должны быть одинаковы, поскольку в линейном случае $A = 0$ решением уравнения (2.17) в силу (2.6) должно быть выражение $x_1 = \dfrac{2}{3}(-y_1)^{\frac{3}{2}}$, из уравнения (2.17) можно найти

$$\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right)^3 + \frac{\partial x_1}{\partial y_1} y_1 = -3\frac{tA}{c_0} P, \quad \text{причем} \quad A_0 = \frac{2A}{c_0} \tag{2.19}$$

Порядки величин $x_1 \sim y_1^{\frac{3}{2}}$, $y_1 \sim A_1^{\frac{4}{7}}$, $P \sim A_1^{\frac{6}{7}}$.

По уравнению характеристик (2.19) можно записать главные производные в уравнении, описывающем движение вблизи A. Для получения этого уравнения следует использовать нелинейные уравнения для плоского случая [11]

$$\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial y}(v_x H_y - v_y H_x)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(v_x H_y - v_y H_x)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\right) H_y$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial x}\right) H_x \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + v_x \frac{\partial P}{\partial x} + v_y \frac{\partial P}{\partial y} + \rho a^2 \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\right) = 0$$

Оставляя в нелинейных частях слагаемые второго порядка [12], заменяя в них все производные через производные по x_1, а все параметры через P согласно (2.14), можно получить систему нелинейных уравнений

$$\tau h_x + \xi_2 v_y = -2\frac{\beta_0^2}{\rho_0^2 a_0^2 \mu} P \frac{\partial}{\partial x_1}(P)$$

$$\tau h_y - \xi_1 v_y = -2\frac{\alpha_0 \beta_0}{\rho_0^2 a_0^2 \mu} P \frac{\partial}{\partial x_1}(P)$$

$$\tau v_x + \frac{1}{\rho_0}\xi_1 P = -\frac{a_1^2 \alpha_0 \beta_0^2}{a_0^2 \rho_0^2 \mu}\frac{1}{1 - a_1^2 \alpha_0^2} P \frac{\partial}{\partial x_1}(P)$$

$$\tau v_y + \frac{1}{\rho_0}\xi_2 P + a_1^2(\xi_2 h_x - \xi_1 h_y) = -\frac{a_1^2 \beta_0^3}{a_0^2 \rho_0^2 \mu}\frac{1}{1 - a_1^2 \alpha_0^2} P \frac{\partial}{\partial x_1}(P) \tag{2.21}$$

$$\tau P + \rho_0 a_0^2 \xi_1 v_x + \rho_0 a_0^2 \xi_2 v_y = -2\alpha_2 \frac{1}{\rho_0 a_0^2} P \frac{\partial}{\partial x_1}(P)$$

где обозначено $\tau = \frac{\partial}{\partial t}$, $\xi_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\xi_2 = \frac{\partial}{\partial y}$. Решая систему относительно P, находящихся в левых частях (2.21), и обозначая правые части (2.21) соответственно через α_1, $-\alpha_1\frac{\alpha_0}{\beta_0}$, α_3, $\alpha_3\frac{\beta_0}{\alpha_0}$, α_5, можно получить

$$P = \frac{\Delta_1}{\Delta} P \frac{\partial}{\partial x_1}(P) \tag{2.22}$$

где

$$\Delta_1 = \alpha_1 a_1^2 \xi_2^2 \tau \rho_0 a_0^2 + \alpha_1 \tau \xi_2 \xi_1 \rho_0 a_0^2 \frac{\alpha_0}{\beta_0} - \alpha_3 \rho_0 a_0^2 \xi_1 (\tau^2 - a_1^2 \xi_1^2 - a_1^2 \xi_2^2) -$$

$$- \alpha_3 \frac{\beta_0}{\alpha_0}\rho_0 a_0^2 \tau^2 \xi_2 + \alpha_5 (\tau^3 - \tau a_1^2 \xi_2^2 - \tau a_1^2 \xi_1^2)$$

$$\Delta = [\tau^2 - a_1^2(\xi_1^2 + \xi_2^2)](\tau^2 - a_0^2 \xi_1^2) - a_0^2 \tau^2 \xi_2^2$$

В выражении Δ_1, применяемом к $P\dfrac{\partial}{\partial x_1}(P)$, можно все производные заменить через производные по x_1. Тогда

$$\frac{\Delta_1}{\dfrac{\partial^3}{\partial x_1^3}} = 3\frac{\beta_0^2}{\rho_0}\,\frac{a_1^2(\alpha_0^2+\beta_0^2)}{\mu} + \frac{2\alpha_2\mu}{\rho_0 a_0^2}$$

которое получится также, если разрешить (2.21) относительно остальных переменных.

Преобразование Δ к переменным t, x_1, y_1 производится так же, как и получение характеристического условия, причем приближенно

$$\Delta = 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^3\partial y_1}\,\frac{y_1}{3t}\,\frac{2c_0^2-a_0^2-a_1^2}{c_0^2} + 2\frac{1}{3t}\,\frac{2c_0^2-a_0^2-a_1^2}{c_0^2}\,\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} +$$

$$+\frac{4\alpha_0\left(\dfrac{d\alpha_0}{d\beta_0}\right)^3+2\beta_0\left(\dfrac{d\alpha_0}{d\beta_0}\right)^2+2\alpha_0\dfrac{d\alpha_0}{d\beta_0}}{t}\,K^3a_0^2a_1^2\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1^3}.$$

Снова для того, чтобы в линейном случае $x_1=\dfrac{2}{3}(-y_1)^{\frac{3}{2}}$ было характеристикой, множители при $y_1\dfrac{\partial^4}{\partial x_1^3\partial y_1}$ и $\dfrac{\partial^4}{\partial x_1\partial y_1^3}$ должны совпадать, причем указанное равенство можно проверить и непосредственно. Тогда уравнение (2.22) запишется в виде

$$\frac{\partial^4 P}{\partial x_1^3\partial y_1}y_1+\frac{\partial^3 P}{\partial x_1^3}+\frac{\partial^4 P}{\partial x_1\partial y_1^3}=\frac{\partial^3}{\partial x_1^3}\left\{\frac{3t}{2}\,\frac{3\beta_0^2a_1^2\dfrac{\alpha_0^2+\beta_0^2}{\mu}+\dfrac{2\alpha_2}{\alpha_0^2}\mu}{2c_0^2-a_0^2-a_1^2}\,c_0^2P\frac{\partial}{\partial x_1}(P)\right\}\tag{2.23}$$

причем можно показать, что выражение в фигурных скобках в (2.23) совпадает с $\dfrac{3A}{c_0}tP\dfrac{\partial}{\partial x_1}(P)$.

Понизив порядок производных на один, из (2.23) можно получить соотношения

$$P=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2},\qquad \frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^2\partial y_1}y_1+\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial y_1^3}=\frac{3A}{c_0}t\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial x_1^3}\tag{2.24}$$

В линейном случае $A=0$, и уравнение приводится к уравнению Трикоми. Уравнение (2.24) верно и для движения с осью $0x$ в качестве оси симметрии, в чем можно убедиться, добавляя в последнее уравнение (2.20) $\rho_0a_0^2\dfrac{v_y}{y}$, а в (2.3) — множитель $\dfrac{1}{t^{\frac{1}{2}}}$.

В линейном случае давление P выражается через гипергеометрические функции [9] Φ_k порядка k. Тогда, пользуясь соотношением $\dfrac{\partial\Phi_k}{\partial x_1}=k\Phi_{k-1}$, можно найти значение φ, $\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_1}$ и $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}$ на линии $y_1=$ $=\mathrm{const}$ и далее решать (2.24) методом характеристик с начальными данными на этой линии и с двумя ударными волнами, при приближении к точке A переходящими в маховскую ударную волну. Линия параболичности, где две из трех характеристик совпадают, $(-y_1)^{\frac{3}{2}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\dfrac{3A}{c_0}tP$. Следует отметить, что из (2.21) можно получить четыре однородных уравнения. Переходя в них к переменным t, x_1, y_1 и вводя четыре функции, представляющие малые более высокого порядка, чем P,

$$h_1=\alpha_0 h_x+\beta_0 h_y,\qquad h_2=\alpha_0 v_y-\beta_0 v_x-\alpha_0\beta_0 a_1^2 h_x+\alpha_0^2 a_1^2 h_y$$

$$h_3=-\beta_0 a_1^2 h_y-\alpha_0\beta_0 a_1^2 v_y,\qquad h_4=\alpha_0 v_x-\frac{1}{\rho_0 a_0}P$$

из них можно получить упрощенную систему. В частности, для первого уравнения в основном порядке можно найти

$$h_1=\frac{1}{\rho_0}\left(\alpha_0-\beta_0\frac{d\alpha_0}{d\beta_0}\right)\frac{K}{t^{\frac{1}{3}}}\frac{\beta_0 c_0^2}{c_0^2-a_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}$$

Условия на ударных волнах получаются из (2.24) и заключаются в непрерывности на ударной волне $x_1=x_1(y_1)$ выражений

$$h+m\frac{dx_1}{dy_1},\qquad m+l\frac{dx_1}{dy_1},\qquad (y_1 l+m)\frac{dx_1}{dy_1}+\frac{3A}{c_0}t\frac{l^2}{2}\tag{2.25}$$

где обозначено $l=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2}$, $m=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\partial y_1}$, $h=\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2}$, из которых находится равенство

$$y_1\frac{dx_1}{dy_1}+\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^3=-\frac{3A}{c_0}t\frac{P_1+P_2}{2}\tag{2.26}$$

где $P_{1,2}$ — давления впереди и позади ударной волны. Уравнение характеристик дается (2.19) и равенством

$$y_1\frac{dl}{dy_1}+l+\frac{dn}{dy_1}+\frac{dl}{dy_1}\left(\frac{dx_1}{dy_1}\right)^2-\frac{dm}{dy_1}\frac{dx_1}{dy_1}=0.$$

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 23 IV 1969

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՀԵՂՈՒԿԻ ՇԱՐԺՄԱՆ ՊԱՐԱՄԵՏՐԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԱԼԻՔՆԵՐԻ ՀԱՏՄԱՆ ՇՐՋԱԿԱՅՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկվում է հեղուկի ճնշման և արագությունների որոշման խնդիրը AB ալիքի, որն ունի կամայական պրոֆիլը, և դիֆրակցիոն CBB_1 ալիքի հատման կետի շրջակայքում: Լուծման տեսքը փոքր տիրույթների համար տարբեր եզրային խնդիրներում նույնն է, և այդ պատճառով, սկզբից դիտարկվում է հեղուկի շարժման խնդիրը, երբ նրա մակերևույթով շարժվում է տրված ճնշումը $P_1(x, t) = A_1 (x - R)^\alpha t^\beta$, որտեղ t ժամանակն է, $x = R(t)$ ճնշման ճակատի A կորդինատը հեղուկի մակերևույթի վրա: Լուծման ինտեգրալ ներկայացումից, ստացված է խնդրի լուծումը AB և CBB_1 ալիքների հատման շրջակայքում՝ հիպերերկրաչափական ֆունկցիաների տեսքով: Ստացված բանաձևերի համեմատությունը՝ Բարիչի կողմից ստացված կամայական AB ալիքի վրա լուծման հետ, թույլ տվեց գտնել կամայական տեսքի AB ալիքի և դիֆրակցիոն CBB_1 ալիքների հատման շրջակայքում հարթ և առանցքասիմետրիկ խնդիրների լուծումները:

A. G. BAGDOEV

THE DETERMINATION OF FLUID PARAMETERS IN THE NEIGHBOURHOOD OF JUNCTION OF WAVE FRONTS

S u m m a r y

The problem of determination of the pressure and fluid velocities in the neighbourhood of the junction point of the arbitrary shape plane or axialsymmetric wave AB with given singularity on its front with diffracted BB_1 wave is considered.

First the particular problem of the fluid motion under the action of the pressure given on its surface is considered. The comparision of the obtained integral formulae in the neighbourhood of AB and BB_1 junction with the solution on AB for the arbitrary shape AB wave in the nonhomogenous fluid permits to obtain in the neighbourhood B of AB and BB_1 junction the solution for arbitrary shape AB wave. The formulae in the hypergeometric function form are obtained, and they have different form in the regions behind and ahead of BB_1 wave. The simple relations connecting the potential with pressure and velocities are obtained. For particular values of parameters the formulae for plane and axialsymmetric cases with discontinous character of AB wave, obtained formerly by other methods, are derived from the general solution.

The solution of the space problem for arbitrary shape wave fronts is obtained. The simplified equations of motion in the vicinity of two waves with singular junction point are found.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Ереван, 1961.
2. *Бабич В. М.* Распространение нестационарных волн и каустики. Ученые записки ЛГУ, вып. 32, 1958.
3. *Багдоев А. Г.* Определения давления в неоднородной жидкости вблизи ударной волны. Ученые записки Ереванского университета, № 1, 1968.
4. *Багдоев А. Г.* Решение линейной задачи в окрестности фронтов волн. Ученые записки Ереванского университета, № 3, 1968.
5. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Техтеориздат, М., 1953.
6. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. П.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гостехиздат, 1965.
7. *Фридлендер Ф.* Звуковые импульсы. ИЛ, 1962.
8. *Lighthill M. Y.* Studies on magnetohydrodynamic waves, Philosophical Trans. of the Royal Society, vol. 252, 1960.
9. *Гургенян А. А.* Определение линейного решения для магнитозвуковой волны, Изв. АН АрмССР, сер. Механика, т. XXIII, № 1, 1970.
10. *Багдоев А. Г.* Определение окрестности ударной волны вблизи особой линии. Докл. АН АрмССР, 1969.
11. *Днесперов В. Н.*, *Рыжов О. С.* Второе приближение в асимптотической теории обтекания. ПММ, № 5, 1967.