

Б. А. ПЕЛЕХ

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-  
ИЗОТРОПНЫХ ПЛАСТИНОК, ОСЛАБЛЕННЫХ  
КРУГОВЫМИ ОТВЕРСТИЯМИ

В работе приводятся результаты исследований концентрации напряжений около отверстий при изгибе трансверсально-изотропных пластин на базе обобщенной теории С. А. Амбарцумяна [1].

**1. Исходные соотношения.** Решение задачи изгиба трансверсально-изотропных пластин сводится к интегрированию уравнений

$$\Delta \Delta w = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta \varphi - \delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} - \delta^2 \varphi = 0$$

Все расчетные величины выражаются через функции  $w$  и  $\varphi$  следующим образом (в однородном случае):

углы поворота нормального волокна

$$\begin{aligned} \gamma_r &= -\frac{\partial}{\partial r} (w + \varepsilon \Delta w) + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \gamma_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (w + \varepsilon \Delta w) - \frac{\partial \varphi}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.2)$$

перерезывающие усилия

$$N_r = -D \left( \frac{\partial}{\partial r} \Delta w - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right), \quad N_\theta = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \Delta w + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) \quad (1.3)$$

изгибающие и крутящий моменты

$$\begin{aligned} M_r &= -D \left\{ \left[ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \gamma_a \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] (w + \varepsilon \Delta w) - (1 - \gamma_a) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\} \\ M_\theta &= -D \left\{ \left[ \gamma_a \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \right] (w + \varepsilon \Delta w) + (1 - \gamma_a) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right\} \\ H_{r\theta} &= -D(1 - \gamma_a) \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (w + \varepsilon \Delta w) + \frac{1}{2} \left[ \Delta \varphi - 2 \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь  $w$ ,  $\varphi$  — функции прогибов и углов поворота,  $\hat{\eta}^2 = \frac{5G_a}{2G_x} h^{-2}$ ,

$$\begin{aligned}\epsilon &= \frac{4h^2}{5(1-\nu_a)} \frac{G_a}{G_x} \quad (\text{I-й вариант теории С. А. Амбарцумяна}); \\ &= \frac{2h^2}{5(1-\nu_a)} \left( 2 \frac{G_a}{G_x} - \nu_z \frac{E_a}{E_z} \right) \quad (\text{II-ой вариант теории С. А. Амбарцумяна}); \\ E_a, G_a, \nu_a \text{ и } E_z, G_z, \nu_z &\text{ — модули упругости и коэффициенты Пуассона соответственно в плоскостях, параллельных и нормальных к сечению.}\end{aligned}$$

**2. Постановка задачи.** Поставим цель на базе уравнений (1.1)–(1.4) исследовать характер концентрации напряжений, создаваемой в бесконечной трансверсально-изотропной плите круговой неоднородностью радиуса  $a$ .

Обозначим решение соответствующей задачи для сплошной плиты через  $w'$ ,  $\varphi'$ . Наложим теперь на решение  $w'$ ,  $\varphi'$  такое решение  $w''$ ,  $\varphi''$  уравнений (1.1), которое на контуре неоднородности (при  $r = a$ ) удовлетворяло бы условиям:

а) для отверстия, в которое впаяно абсолютно-жесткое ядро

$$\frac{\partial w'}{\partial \theta} + \frac{\partial w''}{\partial \theta} = 0, \quad \gamma_p' + \gamma_p'' = 0, \quad \gamma_b' + \gamma_b'' = 0 \quad (2.1)$$

б) для свободного отверстия:

$$N_p' + N_p'' = 0, \quad M_p' + M_p'' = 0, \quad H_{\theta p}' + H_{\theta p}'' = 0 \quad (2.2)$$

Накладываемое решение  $w''$ ,  $\varphi''$  должно, кроме того, исчезать на бесконечности [2, 3].

Ниже рассмотрим наиболее важные случаи нагружения плиты, приводящие к однородному напряженному состоянию на бесконечности. Для таких случаев вышеназванные решения запишутся так:

А) цилиндрический изгиб плиты моментами  $M$  ( $M_x' = M$ ,  $M_y' = M_{xy}'' = N_x'' = N_y'' = 0$ ):

$$w' = - \frac{M \rho^2}{4D(1-\nu_a^2)} [(1-\nu_a) + (1+\nu_a) \cos 2\theta], \quad \varphi' = 0 \quad (2.3)$$

$$w'' = c_1 \ln \rho + (c_2 \rho^{-2} + c_3) \cos 2\theta$$

$$\varphi'' = c_4 K_0(\rho) + c_5 K_2(\rho) \sin 2\theta$$

Б) кручение плиты равномерно-распределенными моментами  $H$  ( $H_{xy}'' = H$ ,  $M_x'' = M_y'' = N_x'' = N_y'' = 0$ ):

$$w' = - \frac{N \rho^2}{2D(1-\nu_a)} \sin 2\theta, \quad \varphi' = 0 \quad (2.4)$$

$$w'' = (c_2 \rho^{-2} + c_3) \sin 2\theta, \quad \varphi'' = c_5 K_2(\rho) \cos 2\theta$$

Здесь  $K_j(\delta\rho)$  — модифицированные функции Бесселя II рода  $j$ -го порядка от аргумента  $\delta\rho$ . Углы поворота  $\gamma_1$  и  $\gamma_0$ , а также усилия-моменты, соответствующие (2.3) и (2.4), находятся по формулам (1.2)–(1.4). Постоянные  $c_i$ , фигурирующие в (2.3)–(2.4), должны быть определены из условий на краю отверстий (2.1) либо (2.2).

**3. Плита с жестким включением.** С учетом (1.3), (1.4) и (2.3) условие (2.1) дает для постоянных следующие значения:

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{Ma^2}{2D(1-\nu_a)}, & c_2 &= \frac{Ma^4}{4D(1-\nu_a)} \left(1 - \frac{2}{\Omega_m}\right) \\ c_3 &= \frac{Ma^2}{2D\Omega_m(1-\nu_a)}, & c_4 &= 0, & c_5 &= -\frac{8h^*}{K_2(t)(1-\nu_a)} c_3 \end{aligned} \quad (3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_m &= 1 + \frac{4h^*}{1-\nu_a} \left[ 1 + \frac{2K_2(t)}{tK_2'(t)} \right] \\ h^* &= \frac{2h^2}{5a^2} \left( 2 \frac{G_u}{G_z} - \nu_z \frac{E_u}{E_z} \right), \quad t = \delta a \end{aligned} \quad (3.2)$$

Для усилий и моментов согласно (1.3)–(1.5), (2.3) и (3.1) имеем (в случае цилиндрического изгиба):

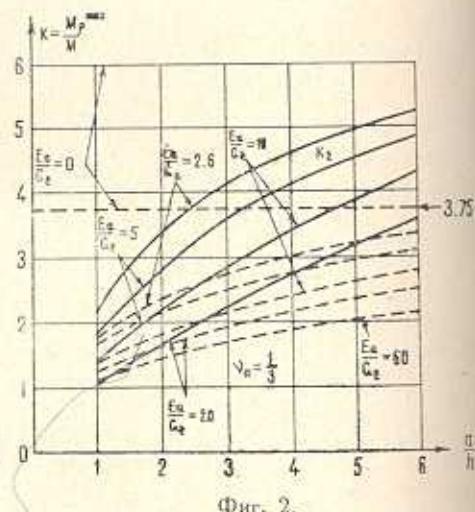
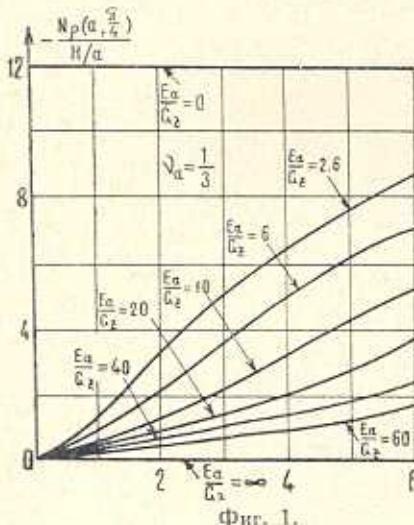
$$\begin{aligned} M_\rho &= \frac{M}{2} \left\{ 1 + \frac{1-\nu_a}{1+\nu_a} \frac{a^2}{\rho^2} + \left[ 1 + \frac{a^2}{\rho^2 \Omega_m (1-\nu_a)} \left( 4\nu_a + 24h^* \frac{a^2}{\rho^2} - \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. - 16h^* \frac{Q_1(t\rho/a)}{Q_1(t)} \right) + \frac{3a^4}{\rho^4} \left( 1 - \frac{2}{\Omega_m} \right) \right] \cos 2\theta \right\} \\ M_\theta &+ M_\rho = M \left[ 1 + \frac{2a^2(1+\nu_a)}{\rho^2(1-\nu_a)\Omega_m} \cos 2\theta \right] \\ H_{\rho\theta} &= \frac{M}{2} \left\{ -1 - \frac{2a^2}{\rho^2(1-\nu_a)\Omega_m} \left[ 1 - \nu_a - 12h^* \frac{a^2}{\rho^2} + 2h^* \frac{Q_2(t\rho/a)}{tK_2(t)} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3a^4}{\rho^4} \left( 1 - \frac{2}{\Omega_m} \right) \right] \sin 2\theta \\ N_\rho &= -\frac{4Ma^2}{\rho^3(1-\nu_a)\Omega_m} \left[ 1 + \frac{2\rho^2 K_2(t\rho/a)}{a^2 t K_2(t)} \right] \cos 2\theta \\ N_\theta &= -\frac{4Ma^2}{\rho^3(1-\nu_a)\Omega_m} \left[ 1 - \frac{\rho^3 K_2'(t\rho/a)}{a^3 K_2(t)} \right] \sin 2\theta \end{aligned} \quad (3.3)$$

Здесь введены следующие обозначения для комбинаций от функций Бесселя  $K_2(z)$ :

$$Q_1(z) = zK_2'(z) - K_2(z), \quad Q_2(z) = -z^2K_2'(z) + zK_2'(z) - 4K_2(z)$$

На контуре жесткого включения (при  $\rho = a$ )

$$\begin{aligned}
 M_p(a, \theta) &= M \left\{ \frac{1}{1 + \gamma_a} + \left[ -1 + \frac{1}{\Omega_m} \left( 3 - \gamma_a + 12h^* - 8h^* \frac{Q_1(t)}{tK_2(t)} \right) \right] \cos 2\theta \right\} \\
 M_b(a, \theta) + M_p(a, \theta) &= M \left[ 1 + \frac{2(1 + \gamma_a)}{(1 - \gamma_a)\Omega_m} \cos 2\theta \right] \\
 H_{pb}(a, \theta) &= -2M \left\{ -1 + \frac{1}{\Omega_m(1 - \gamma_a)} \left[ 1 - \gamma_a + 12h^* - 2h^* \frac{Q_2(t)}{tK_2(t)} \right] \right\} \sin 2\theta \\
 N_p(a, \theta) &= -\frac{4M}{a\Omega_m(1 - \gamma_a)} \frac{K_1(t)}{tK_2(t)} \sin 2\theta, \quad N_b(a, \theta) = 0
 \end{aligned} \tag{3.4}$$



Случай кручения плиты равномерно-распределенными моментами  $H$  получается суперпозицией из известного решения (3.1)–(3.4). На контуре включения имеем

$$\begin{aligned}
 M_p(a, \theta) &= 2H \left[ -1 + \frac{1}{\Omega_m(1 - \gamma_a)} \left( 3 - \gamma_a + 12h^* - 8h^* \frac{Q_1(t)}{tK_2(t)} \right) \right] \sin 2\theta \\
 N_p(a, \theta) &= \frac{8H}{a\Omega_m(1 - \gamma_a)} \frac{K_1(t)}{tK_2(t)} \sin 2\theta \quad N_b(a, \theta) = 0
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

На фиг. 1 представлен график изменения перерезывающего усилия  $N_p(a, \theta/4)$  по (3.5) (в случае кручения плиты) в зависимости от  $a/h$  для различных  $E_a/G_z$  при  $\gamma_a = \frac{1}{3}$ ,  $\gamma_z = 0$ .

На фиг. 2 представлены графики изменения коэффициентов концентрации  $k_z = \left( \frac{\sigma_p^{\max}}{\sigma_p} \right)_{t=0}$  в зависимости от параметров  $\frac{a}{h}$  и  $\frac{E_a}{G_z}$  при  $\gamma_a = \frac{1}{3}$ ,  $\gamma_z = 0$  для изгиба ( $k_1$ ) и кручения ( $k_2$ ) плиты.

**4. Пластина со свободным отверстием.** В этом случае для постоянных  $c_i$  из (2.2) получаем

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{Ma^3}{2D(1-\nu_a)}, & c_2 &= \frac{Ma^4}{12D(1-\nu_a)} \left(1 - \frac{2\gamma_0}{\Omega_0}\right) \\ c_3 &= -\frac{Ma^3}{D\Omega_0}, & c_4 &= 0, & c_5 &= -\frac{4h^*}{K_2(t)(1-\nu_a)} c_3 \end{aligned} \quad (4.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \frac{2h^*}{K_2(t)} (t^2 K_2(t) + 3t K_2'(t)) \\ \gamma_0 &= 4\nu_a + 8h^* \left(3 + \frac{Q_1(t)}{K_2(t)}\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Усилия и моменты, соответствующие (4.1) и (1.3)–(1.5) определяются по формулам

$$\begin{aligned} M_\theta &= \frac{M}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{\rho^2} + \left[ -1 + \frac{2a^2}{\rho^2 \Omega_0} \left( 4\nu_a - 24h^* \frac{a^2}{\rho^2} - 8h^* \frac{Q_1(t\rho/a)}{K_2(t)} \right) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{a^4}{\rho^4} \left( 1 - \frac{2\gamma_0}{\Omega_0} \right) \right] \cos 2\theta \right\} \\ M_r + M_\theta &= M \left( 1 - \frac{4\nu_a a^2}{\rho^2 \Omega_0} \cos 2\theta \right) \\ H_{\theta\theta} &= \frac{M}{2} \left\{ 1 + \frac{2a^2}{\rho^2 \Omega_0} \left( 1 - \nu_a - 24h^* \frac{a^2}{\rho^2} - 2h^* \frac{Q_1(t\rho/a)}{K_2(t)} \right) - \frac{a^4}{\rho^4} \left( 1 - \frac{2\gamma_0}{\Omega_0} \right) \right\} \sin 2\theta \\ N_r &= -\frac{8Ma^2}{\rho^3 \Omega_0} \left[ 1 - \frac{\rho^2 K_2(t\rho/a)}{a^2 K_2(t)} \right] \cos 2\theta \\ N_\theta &= \frac{8Ma^2}{\rho^3 \Omega_0} \left[ 1 - \frac{t\rho^3 K_2'(t\rho/a)}{2a^3 K_2(t)} \right] \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.3)$$

На контуре отверстия при  $\rho = a$  из (4.3) получаем

$$\begin{aligned} M_r(a, \theta) &= H_{\theta\theta}(a, \theta) = N_r(a, \theta) = 0 \\ M_\theta(a, \theta) &= M \left[ 1 - \frac{4(1-\nu_a)}{\Omega_0} \cos 2\theta \right] \\ N_\theta(a, \theta) &= \frac{8M}{a\Omega_0} \left[ 1 + \frac{tK_2'(t)}{2K_2(t)} \right] \sin 2\theta \end{aligned} \quad (4.4)$$

Использованием известной формулы для производной от функции Бесселя  $K_2(z)$

$$K_2'(z) = -K_1(z) - \frac{2}{z} K_2(z)$$

выражение (4.4 в) можно привести к виду

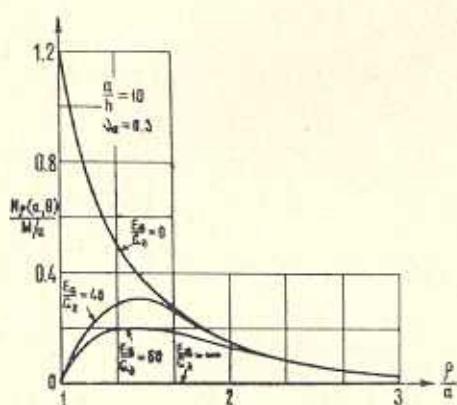
$$N_0(a, \theta) = -\frac{8MtK_1(t)}{a\Omega_0 K_2(t)} \sin 2\theta \quad (4.5)$$

Не приводя выкладок, запишем также окончательные выражения для усилий и моментов на контуре отверстий в случае кручения плиты

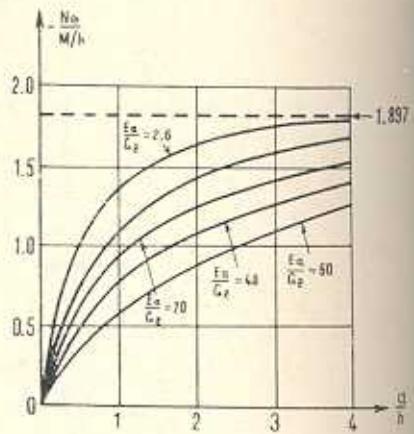
$$M_p(a, \theta) = H_{p0}(a, \theta) = N_p(a, \theta) = 0$$

$$M_h(a, \theta) = -\frac{8H(1 + \nu_a)}{\Omega_0} \sin 2\theta \quad (4.6 \text{ а})$$

$$N_h(a, \theta) = \frac{16HtK_1(t)}{a\Omega_0 K_2(t)} \cos 2\theta$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

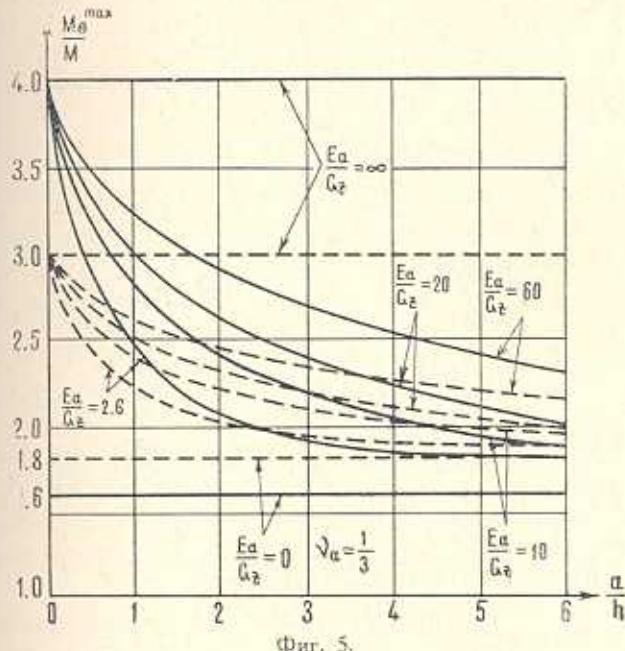
На фиг. 3 и 4 показано изменение перерезывающих усилий  $N_p(a, \frac{\pi}{4})$  в зависимости от  $\frac{p}{a}$ ,  $\frac{a}{h}$ ,  $\frac{E_a}{G_z}$  и  $N_h(a, \theta)$  в зависимости от  $\frac{E_a}{G_z}$  и  $\frac{a}{h}$  при  $\nu_a = \frac{1}{3}$ ,  $\nu_z = 0$ . На фиг. 5 представлены графики коэффициентов концентрации моментов  $K_b = \left(\frac{M_b}{M}\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}$  для цилиндрического изгиба ( $k_1$ ) и кручения ( $k_2$ ) в зависимости от параметра  $\frac{a}{h}$  и различных  $\frac{E_a}{G_z}$  при  $\nu_a = \frac{1}{3}$ ,  $\nu_z = 0$ .

На фиг. 5 изображены кривые концентрации момента для цилиндрического изгиба ( $k_1$ ) и кручения ( $k_2$ ) в зависимости от параметра  $\frac{a}{h}$  и различных соотношений  $\frac{E_a}{G_z}$  при  $\nu_a = \frac{1}{3}$ ,  $\nu_z = 0$ .

**5. Обсуждение результатов.** Переходим к обсуждению результатов, полученных в §§ 3 и 4.

1. Все величины, характеризующие напряженно-деформированное состояние плиты, ослабленной отверстием, зависят от параметров  $h^+$  и  $t$ , т. е. от отношений  $\frac{a}{h}$ ,  $\frac{E_a}{G_z}$ . Некоторые из таких зависимостей представлены на фиг. 1—5.

2. Предельный переход  $h^* \rightarrow 0$ ,  $t \rightarrow \infty$  можно трактовать либо как переход к бесконечно тонкой пластинке ( $\frac{a}{h} \rightarrow \infty$ ), либо как переход к пластинке с бесконечно-большой сдвиговой жесткостью ( $\frac{E_a}{G_z} \rightarrow 0$ ).



Фиг. 5.

Используя асимптотические представления функций Бесселя II рода для входящих в выражения (3.3)–(3.5) и (4.3)–(4.5) ядер установлено, что

$$\lim_{\substack{h^* \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \Omega_m = 1, \quad \lim_{\substack{h^* \rightarrow 0 \\ t \rightarrow \infty}} \Omega_0 = 2(1 + v_a) \quad (5.1)$$

3. На основании (5.1) можно доказать справедливость следующего утверждения: во всех точках плиты, не принадлежащих краю отверстия, из выражений усилий и моментов (3.3) и (4.3) при асимптотическом устремлении параметра  $\frac{a}{h}$  к бесконечности либо  $\frac{E_a}{G_z}$  к нулю следуют все соответствующие характеристики классической теории Кирхгоффа [2, 3]

$$\lim_{\substack{a/h \rightarrow \infty \\ E_a/G_z \rightarrow 0}} [M_\phi(\rho, \theta), \dots, N_\theta(\rho, \theta)] = \{M_\phi^{(k)}(\rho, \theta), \dots, N_\theta^{(k)}(\rho, \theta)\} \quad (5.2)$$

На фиг. 3 поэтому перерезывающая сила по Кирхгоффу соответствует  $\frac{E_a}{G_z} = 0$ .

4. Несколько по-иному обстоит дело на граничном контуре. Из (3.4)–(3.5) и (4.4)–(4.5) при  $\frac{E_a}{G_z} \rightarrow 0$  следует также ряд зависимостей теории Кирхгоффа. Это относится, в частности, к изгибающим моментам  $M_\phi(a, \theta)$  и  $M_b(a, \theta)$ . Например, в случае цилиндрического изгиба пластины:

а) с жестким включением

$$\lim_{E_a/G_z \rightarrow 0} M_\phi(a, \theta) = M_\phi^{(k)}(a, \theta) = M \left( \frac{1}{1 + \nu_a} + \frac{2}{1 - \nu_a} \cos 2\theta \right) \quad (5.3)$$

б) со свободным отверстием

$$\lim_{E_a/G_z \rightarrow 0} M_b(a, \theta) = M_b^{(k)}(a, \theta) = M \left[ 1 - \frac{2(1 + \nu_a)}{3 + \nu_a} \cos 2\theta \right] \quad (5.4)$$

На фиг. 1, 2 и 5 соответствующие характеристики теории Кирхгоффа обозначены  $\frac{E_a}{G_z} = 0$  и выглядят как асимптоты для полученных кривых. В частности, прямые-асимптоты  $k_1 = 3.75$  и  $k_2 = 6$  (фиг. 2), а также  $k_1 = 1.8$  и  $k_2 = 1.6$  (фиг. 5), обозначенные  $\frac{E_a}{G_z} = 0$ , представляют коэффициенты концентрации при изгибе и кручении пластинки с жестким включением и свободным отверстием, вычисленные на базе теории Кирхгоффа [2, 3].

Как видно из графиков, численные отличия полученных результатов от соответствующих величин в теории Кирхгоффа могут стать значительными для отношений  $\frac{E_a}{G_z} \sim 10 - 60$ , что характерно для ориентированных стеклопластиков; при этом указанные отличия в случае кручения пластинки больше, чем в случае цилиндрического изгиба.

5. Исключение из утверждения 4) составляют перерезывающие усилия  $N_b(a, \theta)$ , действующие в площадках, перпендикулярных к краю отверстия.

Эти усилия равны нулю в случае жесткого включения (см. формулы (3.4)–(3.5)).

Анализируя формулы (4.5) и (4.6в) легко показать, что порядок перерезывающего усилия на контуре свободной полости равен  $h^{-1}$ .

Следовательно, касательные срезывающие напряжения  $\tau_{tz}$

а) равны нулю в случае жесткого включения,

б) порядка  $h^{-2}$  на контуре свободного отверстия.

Соответствующие касательные напряжения, определяемые классической теорией, в обоих случаях — порядка  $h^{-1}$ .

Таким образом, в рассматриваемых случаях теория Кирхгоффа не указывает даже порядка срезывающих напряжений  $\tau_{tz}$ .

На фиг. 4 поэтому случай  $\frac{E_a}{G_s} = 0$  не соответствует теории Кирхгоффа [2, 3].

Аналогичный эффект получен для свободной полости в работах [4, 5] на основе общего подхода теории упругости, и для свободно-упругого края в [6] — на базе уравнений теории С. А. Амбарцумяна [1].

6. В случае малых отверстий ( $a \approx h$ ) обобщенные прикладные (двумерные) теории изгиба пластинок, в том числе и применяемая здесь, могут не давать удовлетворительных результатов, касающихся коэффициентов концентрации. Поэтому графики на фиг. 2, изображающие коэффициенты концентрации, в случае жесткого включения не доведены до конца, хотя и при  $\frac{a}{h} \rightarrow 0$  получены конечные пределы, близкие к единице и зависящие от  $u_a$ .

Случай изгиба плиты с малым отверстием следовало бы исследовать на основе общих уравнений теории упругости.

7. Небезынтересно отметить также, что в случае обратного к 2) граничного перехода  $\frac{E_n}{G_n} \rightarrow \infty$  из полученных соотношений переходим

к результатам, как бы соответствующим плоской задаче теории упругости. На фиг. 1, 3, 4 этот случай характеризуется отсутствием перезывающих усилий  $N_x$  и  $N_y$ . Для свободного отверстия коэффициенты концентрации становятся при этом равными  $k_1 = 3$  (цилиндрический изгиб) и  $k_2 = 4$  (кручение) (фиг. 5), что соответствует коэффициентам концентрации при растяжении и сдвиге (на бесконечности) плоскости с отверстием (задача Кирша).

8. Во всех приведенных результатах случай  $\frac{E_a}{G_z} = 2(1 + \gamma_a)$ ,  $\gamma_z = \gamma_a$  соответствует изотропной пластинке.

Львовский политехнический институт

Поступила 25 II 1969

P. J. White

ԿՈՐ ԱՆՑՔԵՐԸՎ ԹՈՒԼԱՑՎԱԾ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԳՈՏՐՈՊ ՍԱԼԵՐԻ  
ՇՈՒՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻԲԻՆՔԻ

U. M. PHANH BENTU

Աշխատանքամ, հիմնվելով Ս. Ա. Համբարձումյանի տեսաթյան վրա,  
ըստիւմ են արանումիւրաւ-իզոտրոպ սալերի ծաման ժամանակ անցքերի մոռ  
առաջացող լարումների կոնգլուսացիայի տառմասերությունը:

Սաացված են՝ անվիրչ տրանսիկրաստ-իզոտրոպ սալի ծռման (ուղրման) ինդիքնիրի բաժանմանը, եթի սալն ունի ազատ կլոր անցք, որին ներդողված է բացարձակ կոշտ միջակ:

*Ստացված լուծումները մանրամասն տուումնասիրում և համեմատվում  
են կիրինոֆի տեսության լուծումների հետ։ Նկատված է զգալի որոշական և  
քանակական տարրերություններ համեմատվող լուծումների միջև։*

B. L. PELEKH

## SOME PROBLEMS OF BENDING OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATES WITH CIRCULAR HOLES

### Summary

In this paper some results of the investigation of stress-concentrations around the holes in transversal-isotropic plates on the basis of the generalized Ambartsumyan's theory are given.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. Изд. Наука, М., 1967.
2. Лехникум С. Г. О некоторых случаях изгиба изотропной пластины, осаженной круговым отверстием. Вестн. инж. и техн., № 12, 1936.
3. Савин Г. Н. Концентрация напряжений около отверстий. ГИТТА, М.—Л., 1951.
4. Аксентян О. К., Ворович И. И. Об определении коэффициентов концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, т. XXVIII, в. 3, 1964.
5. Колес А. В. Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ, т. XXVIII, в. 3, 1964.\*
6. Пелех Б. Л. Об одной задаче несимметричного изгиба круглых тривиально-изотропных пластин. Изв. АрмССР, т. XII, № 2, 1969.
7. Пелех Б. Л. К исследованию концентрации напряжений около отверстий при изгибе плит. „Концентрация напряжений“, в. 1, Киев, 1965.