

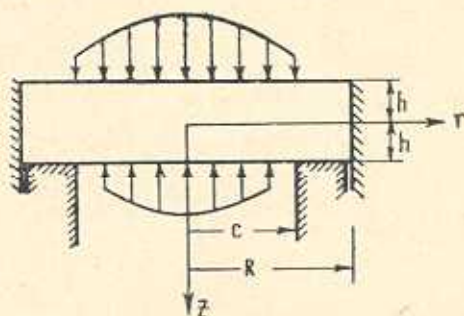
А. А. БАБЛОЯН, А. П. МЕЛКОНЯН

О ДВУХ СМЕШАННЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧАХ  
 ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

В настоящей работе приводятся решения двух осесимметричных задач теории упругости для цилиндра конечных размеров, когда граничные условия на одной из торцевых плоскостей заданы в смешанном виде, а на другой — заданы напряжения (могут быть заданы также либо перемещения, либо условия симметрии).

Предполагаем, что на цилиндрической поверхности известны касательные напряжения и нормальные перемещения.

Решение задачи представлено в виде рядов Фурье-Дини, коэффициенты которых определяются из парных рядов-уравнений, содержащих функции Бесселя. Далее, следуя [1], парные уравнения сводятся к решению квази-вполне регулярных бесконечных систем, свободные члены которых стремятся к нулю.



Фиг. 1.

Получены окончательные выражения для напряжений и перемещений. Получены также формулы для контактных напряжений с выделенной особенностью и перемещений вне контакта.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу об изгибе круглой толстой плиты, когда плита по некоторой кольцевой области (наружный диаметр которой совпадает с диаметром плиты) нижней торцевой плоскости опирается на жесткое, гладкое основание. На верхнем торце приложена произвольная (абсолютно суммируемая) нагрузка (фиг. 1).

Граничные условия для этой задачи запишутся в виде

$$\tau_{zr}(R, z) = u_r(R, z) = 0$$

$$\tau_{rz} = (\sigma_r, \pm h) = 0$$

$$\sigma_z(r, -h) = f_1(r) = - \sum_{k=0}^{\infty} q_k J_0(\lambda_k r) \quad (1.1)$$

$$\sigma_z(r, h) = -f_2(r) \quad (0 \leq r < c)$$

$$u_z(r, h) = f_3(r) \quad (c < r < R)$$

где  $2h$  — толщина плиты,  $R$  — радиус,  $J_i(x)$  — функции Бесселя  $i$ -го порядка, первого рода с действительным аргументом,  $\lambda_k$  — положительные корни функции  $J_1(\lambda_k R)$ , а коэффициенты  $q_k$  определяются по формулам [2]

$$q_k = \frac{2}{R^2 J_0(\lambda_k R)} \int_0^R r f_1(r) J_0(\lambda_k r) dr \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.2)$$

Считаем, что  $\lambda_0 = 0$ .

Как известно [3], решение рассматриваемой задачи сводится к нахождению функции  $\Phi(r, z)$ , которая в области осевого сечения тела вращения удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta \Phi(r, z) = 0, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (1.3)$$

Решение уравнения (1.3) ищем в виде ряда Фурье-Дини [4–6]

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) = z(Bz^2 + Cz) + \sum_{k=1}^{\infty} [A_k \operatorname{sh} \lambda_k z + B_k \operatorname{ch} \lambda_k z + \\ + \lambda_k z (C_k \operatorname{sh} \lambda_k z + D_k \operatorname{ch} \lambda_k z)] J_0(\lambda_k r) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Напряжения и перемещения, в силу (1.4), представляются в виде

$$\begin{aligned} \sigma_r = -2(1-2\nu)A + 6\nu B + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 \{A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + \\ + C_k [(1+2\nu) \operatorname{sh} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z] + D_k [(1+2\nu) \operatorname{ch} \lambda_k z + \\ + \lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z]\} J_0(\lambda_k r) - \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k^3 \{A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + \\ + C_k (\operatorname{sh} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z) + D_k (\operatorname{ch} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z)\} \frac{J_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} \\ \sigma_\varphi = 6\nu B + 2\nu \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 [C_k \operatorname{sh} \lambda_k z + D_k \operatorname{ch} \lambda_k z] J_0(\lambda_k r) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \{A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + C_k [\operatorname{sh} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z] + \\ + D_k [\operatorname{ch} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z]\} \frac{J_1(\lambda_k r)}{\lambda_k r} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\sigma_z &= 6(1-\nu)B - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \{A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + \\
&+ C_k [\lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z - (1-2\nu) \operatorname{sh} \lambda_k z] + D_k [\lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z - \\
&\quad - (1-2\nu) \operatorname{ch} \lambda_k z]\} J_0(\lambda_k r) \\
\tau_{rz} &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^3 \{A_k \operatorname{sh} \lambda_k z + B_k \operatorname{ch} \lambda_k z + C_k [\lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z + \\
&+ 2\nu \operatorname{ch} \lambda_k z] + D_k [\lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z + 2\nu \operatorname{sh} \lambda_k z]\} J_1(\lambda_k r) \\
u_r &= -\frac{1}{2G} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 \{A_k \operatorname{ch} \lambda_k z + B_k \operatorname{sh} \lambda_k z + C_k (\operatorname{sh} \lambda_k z + \\
&+ \lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z) + D_k (\operatorname{ch} \lambda_k z + \lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z)\} J_1(\lambda_k r) \\
u_z &= \frac{1}{2G} \left\{ 6(1-2\nu)Bz + 2(1-2\nu)C - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 [A_k \operatorname{sh} \lambda_k z + \right. \\
&+ B_k \operatorname{ch} \lambda_k z + C_k [\lambda_k z \operatorname{sh} \lambda_k z - 2(1-2\nu) \operatorname{ch} \lambda_k z] + \\
&\quad \left. + D_k [\lambda_k z \operatorname{ch} \lambda_k z - 2(1-2\nu) \operatorname{sh} \lambda_k z]\} J_0(\lambda_k r) \right\}
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Как следует из (1.5), граничные условия по цилиндрической поверхности  $r = R$  удовлетворяются тождественно, удовлетворяя же другим граничным условиям (1.1), для неизвестных коэффициентов получим значения

$$\begin{aligned}
B &= -\frac{q_0}{6(1-\nu)}, & X_0 &= \frac{1-2\nu}{1-\nu} C \\
A_k &= -\frac{\lambda_k h \operatorname{ch} \lambda_k h + 2\nu \operatorname{sh} \lambda_k h}{\operatorname{sh} \lambda_k h} D_k \\
B_k &= -\frac{\lambda_k h \operatorname{sh} \lambda_k h + 2\nu \operatorname{ch} \lambda_k h}{\operatorname{ch} \lambda_k h} C_k \\
C_k &= \frac{2 \operatorname{sh} 2\lambda_k h}{4\lambda_k h + \operatorname{sh} 4\lambda_k h} \left[ X_k \frac{2\lambda_k h + \operatorname{sh} 2\lambda_k h}{2\lambda_k^2 \operatorname{sh} \lambda_k h} + \frac{q_k}{\lambda_k^3} \operatorname{sh} \lambda_k h \right] \\
D_k &= \frac{2 \operatorname{sh} \lambda_k h}{4\lambda_k h + \operatorname{sh} 4\lambda_k h} \left[ X_k \frac{-2\lambda_k h + \operatorname{sh} 2\lambda_k h}{2\lambda_k^2 \operatorname{ch} \lambda_k h} - \frac{q_k}{\lambda_k^3} \operatorname{ch} \lambda_k h \right]
\end{aligned} \tag{1.6}$$

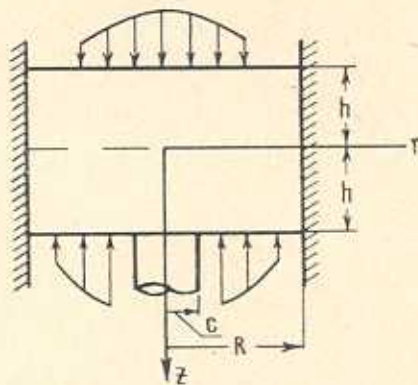
Неизвестные коэффициенты  $X_k$ , входящие в (1.6), будем определять из следующих парных рядов-уравнений по функциям Бесселя:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (1 - N_k) X_k J_0(\lambda_k r) &= \psi_1(r) & (0 \leq r < c) \\
\sum_{k=0}^{\infty} X_k J_0(\lambda_k r) &= \psi_2(r) & (c < r < R)
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned}\psi_1(r) &= -f_2(r) + 2 \sum_{k=0}^{\infty} q_k \frac{2\lambda_k h \operatorname{ch} 2\lambda_k h + \operatorname{sh} 2\lambda_k h}{\operatorname{sh} 4\lambda_k h + 4\lambda_k h} J_0(\lambda_k r) \\ \psi_2(r) &= f_3(r) + \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)^2} q_0 \\ N_k &= \frac{4\lambda_k h (1 + 2\lambda_k h) + 1 - e^{-4\lambda_k h}}{\operatorname{sh} 4\lambda_k h + 4\lambda_k h} < 1 \\ N_k &= 0 (k^2 e^{-k^2 a_0}), \quad a_0 = \frac{4\pi h}{R}\end{aligned}\tag{1.8}$$

2. Рассмотрим осесимметричную задачу о поршне, свободно перемещающемся в жестком цилиндре с гладкой поверхностью, в случае, когда на одной из торцевых плоскостей действует произвольная нормальная нагрузка, а по центральной круговой области другого торца поршень сжимается жестким, круглым, гладким штампом произвольного очертания (фиг. 2).



Фиг. 2.

Граничные условия для сформулированной выше задачи имеют вид

$$\begin{aligned}\tau_{rz}(R, z) = u_r(R, z) = \tau_{rz}(r, \pm h) &= 0 \\ \sigma_z(r, -h) = -f_1(r) = -\sum_{k=0}^{\infty} q_k J_0(\lambda_k r) \\ u_z(r, h) = f_3(r) \quad (0 \leq r < c) \\ \sigma_z(r, h) = -f_2(r) \quad (c < r < R)\end{aligned}\tag{2.1}$$

где  $\lambda_k$  — неотрицательные корни функции  $J_1(\lambda_k R)$ , а коэффициенты  $q_k$  определяются по формуле (1.2).

Функцию напряжения  $\Phi(r, z)$  для этой задачи ищем в виде (1.4), в силу чего напряжения и перемещения будут выражены формулами (1.5).

Удовлетворяя граничным условиям (2.1), для неизвестных коэффициентов  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  и  $D_k$  получим значения

$$\begin{aligned} B &= -\frac{q_0}{6(1-\nu)}, & X_0 &= -\frac{1-2\nu}{1-\nu} C \\ A_k &= \frac{X_k + q_k}{\lambda_k^3} \frac{\lambda_k h \operatorname{ch} \lambda_k h + 2\nu \operatorname{sh} \lambda_k h}{2\lambda_k h + \operatorname{sh} 2\lambda_k h} \\ B_k &= \frac{X_k - q_k}{\lambda_k^3} \frac{\lambda_k h \operatorname{sh} \lambda_k h + 2\nu \operatorname{ch} \lambda_k h}{2\lambda_k h - \operatorname{sh} 2\lambda_k h} \\ C_k &= \frac{X_k - q_k}{\lambda_k^3} \frac{\operatorname{ch} \lambda_k h}{2\lambda_k h - \operatorname{sh} 2\lambda_k h} \\ D_k &= -\frac{X_k + q_k}{\lambda_k^3} \frac{\operatorname{sh} \lambda_k h}{2\lambda_k h + \operatorname{sh} 2\lambda_k h} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Неизвестные коэффициенты  $X_k$  определяются из следующих парных рядов-уравнений:

$$\begin{aligned} X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) \frac{X_k}{\lambda_k} J_0(\lambda_k r) &= \psi_1(r) & (0 \leq r < c) \\ \sum_{k=0}^{\infty} X_k J_0(\lambda_k r) &= \psi_2(r) & (c < r < R) \end{aligned} \quad (2.3)$$

где

$$\begin{aligned} \psi_1(r) &= -\frac{1}{2(1-\nu)} f_1(r) - \frac{(1-2\nu)h}{2(1-\nu)^2} b_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k} \frac{2\lambda_k h \operatorname{ch} 2\lambda_k h + \operatorname{sh} 2\lambda_k h}{\operatorname{sh}^2 2\lambda_k h - 4\lambda_k^2 h^2} J_0(\lambda_k r) \\ \psi_2(r) &= f_2(r) - q_0 + X_0 \\ N_k &= -\frac{4\lambda_k h + 8\lambda_k^2 h^2 + 1 - e^{-4\lambda_k h}}{2(\operatorname{sh}^2 2\lambda_k h - 4\lambda_k^2 h^2)} \end{aligned} \quad (2.4)$$

Таким образом, рассматриваемые здесь обе задачи свелись к определению  $X_k$  из парных рядов-уравнений (1.7) и (2.3) по бесселевым функциям первого рода с нулевым индексом.

Отметим, что соответствующие динамические задачи сводятся к решению парных рядов-уравнений типа (1.7) и (2.3) с другими известными значениями  $N_k$ ,  $\psi_1(r)$ ,  $\psi_2(r)$ .

Отметим также, что несимметричные задачи могут быть сведены к решению совокупности отдельных парных рядов-уравнений по функциям Бесселя первого рода с целым положительным индексом.



3. Рассмотрим следующие парные ряды-уравнения по бесселевым функциям первого рода с нулевым индексом:

$$\alpha X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p X_k (1 - N_k) J_0(\lambda_k r) = f(r) \quad (0 \leq r < c) \quad (3.1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} X_k J_0(\lambda_k r) = g(r) \quad (c < r < R)$$

где  $\lambda_k$  — корни уравнения  $J_1(\lambda_k R) = 0$ ;  $-1 \leq p \leq 1$ .

Парные уравнения типа (3.1) рассматривались в работе [7], где нахождение  $X_k$  сведено к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода, ядро которого представляется интегралом. Следуя [1], решение (3.1) сведено к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что получаемая бесконечная система не только квази-вполне регулярна, но и сумма модулей коэффициентов, а также свободные члены с возрастанием индекса стремятся к нулю.

Для решения (3.1) разложим функцию  $g(r)$  в ряд Фурье-Дини [2]

$$g(r) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k J_0(\lambda_k r) \quad (3.2)$$

Здесь коэффициенты  $g_k$  определяются по формулам (1.2).

Следуя [1], неизвестные  $X_k$  ищем в виде

$$X_k = g_k + \frac{1}{(\lambda_k c)^{1+\frac{p}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} \sum_{m=0}^{\infty} b_m J_{2m+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) \quad (3.3)$$

$k = 0, 1, 2, \dots$

при этом случай  $k = 0$  получается предельным переходом

$$X_0 = \lim_{k \rightarrow 0} X_k = g_0 + \frac{b_0}{2^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2 + \frac{p}{2}\right)} \quad (3.3^*)$$

Пользуясь разложением

$$f(r) = \begin{cases} (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) & (0 \leq r < c) \\ 0 & (c < r < R) \end{cases}$$

$$f(r) = \frac{(2c)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(1 + \frac{p}{2} + s\right)}{R^2 \Gamma(1 + s)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2s+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) J_0(\lambda_k r)}{\lambda_k^{1+\frac{p}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} \quad (s \geq 0) \quad (3.3^{**})$$

и благодаря выбору (3.3), в силу (3.2) нетрудно убедиться, что второе уравнение системы (3.1) удовлетворяется тождественно.

Подставляя (3.3) в первое уравнение (3.1), затем умножая полученное соотношение на  $r(c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s; 1; \frac{r^2}{c^2}\right)$  и далее интегрируя по  $r$  в пределах от 0 до  $c$ , получим

$$\begin{aligned} & \times \left[ g_0 + \frac{b_0}{2^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2 + \frac{p}{2}\right)} \right] \frac{c^{2+p} \delta_{sm}}{(2+p)R^2} \frac{2^{1-\frac{p}{2}}}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{2}\right)} + \\ & + \frac{2c}{R^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-N_k)g_k}{\lambda_k^{1-\frac{p}{2}}} J_{2k+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) + \\ & + \frac{2}{R^2} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1-N_k)J_{2k+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) J_{2m+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c)}{\lambda_k^2 J_0(\lambda_k R)} = \\ & = \frac{2^{1-\frac{p}{2}} \Gamma(1+s)}{R^2 \Gamma\left(1 + \frac{p}{2} + s\right)} \int_0^c r f(r) (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) dr \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\Gamma(z)$  — гамма-функция,  $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$  — гипергеометрический ряд,  $\delta_{sm}$  — символ Кронекера.

При получении (3.4) было использовано значение интеграла

$$\begin{aligned} & \int_0^c r^{\nu+1} (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s + \nu, \nu + 1, \frac{r^2}{c^2}\right) J_{\nu}(\beta r) dr = \\ & = \left(\frac{2}{\beta c}\right)^{1+\frac{p}{2}} \frac{\Gamma(\nu+1) \Gamma\left(1 + \frac{p}{2} + s\right) c^{\nu+p+2}}{2\Gamma(s+\nu+1)} J_{\nu+2s+\frac{p}{2}+1}(\beta c) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Выражение (3.4) представляет собой бесконечную систему алгебраических уравнений первого рода относительно неизвестных  $b_m$ .

Пользуясь значением ряда [1]

$$\begin{aligned} & 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_0(\lambda_k r) J_1(\lambda_k c) (\lambda_k c)^{\nu}}{J_0^2(\lambda_k R)} = \int_0^{\pi} J_0\left(\frac{rx}{R}\right) J_1\left(\frac{cx}{R}\right) x^{\nu+1} dx - \\ & - \frac{2}{\pi} \sin \frac{\delta + \beta + \gamma}{2} = \int_0^{\pi} \frac{K_1(y)}{y I_1(y)} I_0\left(\frac{ry}{R}\right) I_1\left(\frac{cy}{R}\right) dy \end{aligned} \quad (3.6)$$

бесконечную систему (3.4) приводим к виду

$$b_s(1 + \gamma \delta_{os}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{sm} b_m + d_s \quad (s = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} a_{sm} &= \frac{2(-1)^{m+k}}{\pi} (4s + p + 2) \sin \frac{p\pi}{2} \int_0^c \frac{K_1(Ry)}{yI_1(Ry)} J_{2m+\frac{p}{2}+1} \times \\ &\times I_{2s+\frac{p}{2}+1}(cy) dy + \frac{2}{R^2} (4s + p + 2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k J_{2s+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) J_{2m+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c)}{\lambda_k^2 J_0^2(\lambda_k R)} \\ d_s &= \frac{2(4s + p + 2)\Gamma(1+s)}{2^{\frac{p}{2}} R^2 \Gamma\left(1 + \frac{p}{2} + s\right)} \int_0^c r f(r) (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} \times \\ &\times F\left(-s, 1 + \frac{p}{2} + s; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) dr - \frac{2}{R} c^{1+\frac{p}{2}} (4s + p + 2) \times \\ &\times \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 + N_k}{\lambda_k^{1+\frac{p}{2}}} g_k J_{2s+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) - \frac{\alpha(p+2)c^{p+2} \delta_{so}}{2^{\frac{p}{2}} R^2 \Gamma\left(2 + \frac{p}{2}\right)} g_0 \\ \gamma &= \frac{\alpha c^{p+2} (p+2)}{2^{1+p} R^2 \Gamma^2\left(2 + \frac{p}{2}\right)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $I_n(x)$ ,  $K_n(x)$  — модифицированные цилиндрические функции соответственно первого и второго рода.

Отметим, что в цитированных работах [1, 7] в (3.6) суммирование производится без нулевого члена ( $k=0$ ), что неверно.

В (3.8) при  $p > 0$  коэффициенты  $a_{sm}$  и свободные члены  $d_s$  — конечны (интегралы сходятся абсолютно). Если же  $p < 0$ , то вместо первого ( $s=0$ ) уравнения (3.7) следует пользоваться первым уравнением системы (3.1) при фиксированном  $r$  (например,  $r=0$ ). При этом в бесконечной системе (3.7) индекс  $s$  принимает значения  $s=1, 2, 3, \dots$ , а постоянная  $b_0$  является параметром, который определяется после решения бесконечной системы (3.7) из первого уравнения (3.1).

Докажем, что при  $p > 0$  система (3.7) квази-вполне регулярна (аналогично доказывалась регулярность (3.7) и в случае  $p < 0$ ).

Покажем, что сумма модулей коэффициентов  $a_{sm}$  при возрастании индекса стремится к нулю



$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{sm}| &\leq \frac{2}{\pi} (4s + p + 2) \sum_{m=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y l_1(y)} I_{2s + \frac{p}{2} + 1} \times \\ &\times \left( \frac{cy}{R} \right) I_{2m + \frac{p}{2} + 1} \left( \frac{cy}{R} \right) dy + \frac{2}{R^2} (4s + p + 2) \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{N_k J_{2s + \frac{p}{2} + 1}(l_k c) J_{2m + \frac{p}{2} + 1}(l_k c)}{\lambda_k^2 J_0^2(l_k R)} \right| \end{aligned} \quad (3.9)$$

В силу неравенства [3]  $I_n(x) > I_m(x)$  при  $m > n$

$$\sum_{m=0}^{\infty} I_{2m + \frac{p}{2} + 1} \left( \frac{cy}{R} \right) < \sum_{m=0}^{\infty} I_{2m+1} \left( \frac{cy}{R} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \frac{cy}{2} \quad (3.10)$$

В силу (3.10) для первого члена (3.9) получим оценку

$$\frac{4s + p + 2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{y l_1(y)} I_{2s + \frac{p}{2} + 1} \left( \frac{cy}{R} \right) \operatorname{sh} \frac{cy}{R} dy \quad (3.11)$$

Этот интеграл является непрерывной функцией от  $s$ , т. к. при  $s > 0$  интеграл сходится абсолютно.

Пользуясь далее асимптотической формулой для бesselевых функций при больших значениях индекса [8]

$$I_{2s + \frac{p}{2} + 1}(z) \approx \frac{\left( \frac{z}{2} \right)^{2s + \frac{p}{2} + 1}}{\Gamma\left(2s + \frac{p}{2} + 1\right)} \quad (3.12)$$

нетрудно показать, что выражение (3.11) при возрастании  $s$  достаточно быстро монотонно стремится к нулю.

Аналогично можно показать, что второй член выражения (3.9) также стремится к нулю, если числа  $N_k$  таковы, что допустимо изменение порядка суммирования. В рассмотренных нами задачах это условие выполняется, т. к.  $N_k = 0 (k^2 e^{-2k})$ . Из вышеизложенного следует, что

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{m=0}^{\infty} |a_{sm}| = 0$$

т. е. система (3.7) квази-вполне регулярна.

Из (3.8) нетрудно заметить, что свободные члены  $d_s$  также стремятся к нулю.

Вычислим значение первого ряда системы (3.1) в области  $c < r < R$  и значение второго ряда (3.1) в области  $0 \leq r < c$ , которые в зависимости от знака  $p$  представляют собой либо контактные напряжения, либо перемещения вне контакта.

Подставив значение  $X_k$  по формуле (3.3) во второй ряд системы (3.1) и далее пользуясь формулой (3.3\*\*), после некоторых преобразований для этого ряда получим следующие значения:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} (X_k - g_k) J_0(i_k r) &= 0 & (c < r < R) \\ &= R^2 (c^2 - r^2)^{\frac{p}{2}} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m \Gamma(1+m)}{(2c)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(1+\frac{p}{2}+m\right)} F\left(-m, 1+\frac{p}{2}+m; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) \\ & & (0 \leq r < c) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Из (3.13) нетрудно заметить, что для положительных  $p$  ряд (3.13) непрерывен в окрестности точки  $r = c$ .

Подставим теперь значение  $X_k$  в первый ряд системы (3.1) и далее, пользуясь значением ряда (3.6), который в данном случае имеет вид

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{2m+\frac{p}{2}+1}(i_k c) J_0(i_k r)}{(i_k R)^{1-\frac{p}{2}} J_0^2(i_k R)} &= \int_0^{\infty} J_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cx}{R}\right) J_0\left(\frac{rx}{R}\right) x^{\frac{p}{2}} dx - \\ &= \frac{2(-1)^m \sin \frac{p\pi}{2}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{I_1(y)} I_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cy}{R}\right) I_0\left(\frac{cr}{R}\right) y^{\frac{p}{2}} dy \end{aligned} \quad (3.14)$$

где

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} J_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cx}{R}\right) J_0\left(\frac{rx}{R}\right) x^{\frac{p}{2}} dx = \\ &= \frac{2^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(m+\frac{p}{2}+1\right)}{\left(\frac{c}{R}\right)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma(m+1)} F\left(m+\frac{p}{2}+1, m; 1; \frac{r^2}{c^2}\right) \quad (0 \leq r < c) \\ &= \left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right)^{-\frac{p}{2}} \sin \frac{p\pi}{2} \frac{(-1)^{m-1} 2^{\frac{p}{2}} \left(\frac{c}{r}\right)^{2m+p+2} \Gamma^2\left(2m+\frac{p}{2}+1\right)}{\pi \left(\frac{c}{R}\right)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2m+\frac{p}{2}+2\right)} \times \\ &\quad \times F\left(m+1, m+1; 2m+\frac{p}{2}+2; \frac{c^2}{r^2}\right) \quad (c < r < R) \end{aligned} \quad (3.15)$$

для первого ряда системы (3.1) при положительных  $p$  получим следующее значение:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p (X_k - g_k) J_0(\lambda_k r) = \frac{R^{1-\frac{p}{2}} \sin \frac{p\pi}{2}}{2\pi c^{1+\frac{p}{2}}} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m b_m \left[ \left(1 - \frac{c^2}{r^2}\right)^{-\frac{p}{2}} \frac{2^{\frac{p}{2}} \left(\frac{c}{r}\right)^{2m+p+2} \Gamma^2\left(m + \frac{p}{2} + 1\right)}{\left(\frac{c}{R}\right)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2m + \frac{p}{2} + 2\right)} \times \right.$$

$$\times F\left(m+1, m+1; 2m + \frac{p}{2} + 2; \frac{c^2}{r^2}\right) +$$

$$\left. + 2 \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{I_1(y)} I_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cy}{R}\right) I_0\left(\frac{ry}{R}\right) y^{\frac{p}{2}} dy \right] \quad (3.16)$$

( $c < r \leq R, p > 0$ )

Для отрицательных же  $p$  выражение (3.16), в силу (3.3\*<sup>а</sup>) и (3.6), целесообразно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^p (X_k - g_k) J_0(\lambda_k r) = \frac{R^{1-\frac{p}{2}}}{c^{1+\frac{p}{2}}} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_{2m+\frac{p}{2}+1}(\lambda_k c) J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_k R)^{1-\frac{p}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} =$$

$$= \frac{R^{1-\frac{p}{2}}}{c^{1+\frac{p}{2}}} \left[ b_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{J_{1+\frac{p}{2}}(\lambda_k c) J_0(\lambda_k r)}{(\lambda_k R)^{1-\frac{p}{2}} J_0^2(\lambda_k R)} + \right.$$

$$+ \frac{\sin \frac{p\pi}{2}}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} b_m \left[ 2 \int_0^{\infty} \frac{K_1(y)}{I_1(y)} I_{2m+\frac{p}{2}+1}\left(\frac{cy}{R}\right) I_0\left(\frac{ry}{R}\right) y^{\frac{p}{2}} dy + \right.$$

$$+ \frac{2^{\frac{p}{2}} \left(\frac{c}{r}\right)^{2m+p+2} \Gamma^2\left(m + \frac{p}{2} + 1\right)}{\left(\frac{c}{R}\right)^{1+\frac{p}{2}} \Gamma\left(2m + \frac{p}{2} + 2\right)} \times$$

$$\left. \times F\left(m + \frac{p}{2} + 1; m + \frac{p}{2} + 1; 2m + \frac{p}{2} + 1, \frac{c^2}{r^2}\right) \right] \quad (3.16^*)$$

( $c \leq r \leq R, p < 0$ )



Таким образом, рассмотренные выше обе смешанные осесимметричные задачи для цилиндра свелись к решению квази-вполне регулярной бесконечной системы (3.7), причем для первой задачи  $p = 1$ , а для второй  $p = -1$ . После нахождения неизвестных коэффициентов  $X_k$  из бесконечной системы (3.7) контактные напряжения для первой задачи ( $p = 1$ ) вычисляются по формуле (3.16), а перемещения вне контактной области — по формуле (3.13). Для второй же задачи ( $p = -1$ ) контактные напряжения будем вычислять по формуле (3.13), а перемещения вне контакта — по формуле (3.16\*).

Пользуясь формулой (3.13), для этой задачи приведем также формулу, связывающую величину внедрения (осадки) штампа с силой  $P$ , действующей на штамп

$$P = 2\pi \int_0^c r \sigma_z(r, h) dr = -\pi c^2 \left[ q_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{R^2 b_0}{c^2} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{q_k}{\lambda_k c} J_1(\lambda_k c) \right]$$

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 17 X 1968

Ա. Ա. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ա. Պ. ՄԵԼԿՈՆՅԱՆ

ԱՌՍԶԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ԵՐԿՈՒ ԱՌԱՆՅՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ  
ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում բերվում է առաձգականության տեսության երկու առանցքա-սիմետրիկ խնդիրների լուծումները վերջավոր չափերով գլանի համար, երբ գլանի հիմքերից մեկում կորալին պայմանները տրված են խառը ձևով, իսկ մյուս հիմքի վրա հալանի են արտաքին լարումները: Գլանային մակերևույթի վրա տրված են շոշափող լարումները և նորմալ տեղափոխումները:

Խնդիրների լուծումները ներկայացված են Ֆուրյե-Դիրիլի շարքերի տես-քով, որոնց դործակիցները որոշվում են զույգ հավասարումներից ըստ Բես-սելի ֆունկցիաների: Օգտվելով Կուկի [1] արդյունքներից, ստացված զույգ հավասարումները բերվում են գծային հավասարումների անվերջ սխեմանի լուծմանը: Ցույց է արվում, որ անվերջ սխեմանը քվադր-լիովին ռեկուրյար է:

Ստացված են բանաձևեր՝ տեղափոխումների և կոնտակտային լարում-ների համար:

A. H. BABLOYAN, A. P. MELKONIAN

ABOUT TWO MIXED AXISYMMETRIC PROBLEMS  
OF ELASTICITY

S u m m a r y

The solutions of two axisymmetric problems of elasticity for a cylinder of finite length with mixed boundary conditions on one plane surface and with given stresses on the other are examined.

It is assumed that the shear stresses and the normal displacements on the cylindrical surface are known. The solution is represented in the form of Fourier-Dini series with the coefficients determined from the dual series-equations, containing Bessel functions.

Following the method of Cooke, the dual equations are reduced to the solution of quasi-regular infinite system of linear equations with free terms tending to zero. The formulas for displacements and contact stresses with separated singularity are obtained.

#### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Cooke J. C., Tranter C. J.* Dual Fourier-Bessel Series. The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics, vol. XII, part 2, August 1959, Oxford.
2. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций. Ч. 1 и 2, ИЛ, 1949.
3. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, М., 1937.
4. *Абрамян Б. Л.* К задаче осесимметричной деформации круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. XIX, № 1, 1954.
5. *Абрамян Б. Л.* Некоторые задачи равновесия круглого цилиндра. Докл. АН АрмССР, т. XXVI, № 2, 1958.
6. *Абрамян Б. Л., Баблоян А. А.* К изгибу толстых круглых плит осесимметричной нагрузкой. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XI, № 4, 1958.
7. *Sneddon J. N. and Srivastav.* Dual Series Relations. Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, Section A (Mathematical and Physical Sciences), vol. LXVI, Part III (Nos. 14, 15, 16, 17), 1964.
8. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Гостехтеориздат, М., 1953.