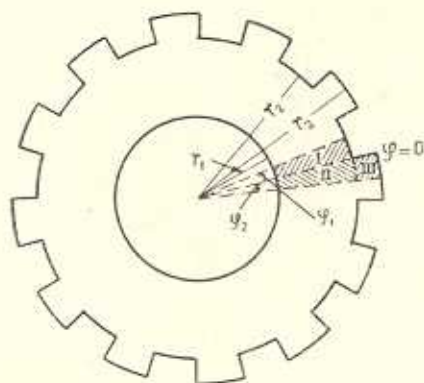


Р. А. АРУТЮНЯН

КРУЧЕНИЕ КРУГЛОГО ПОЛОГО ВАЛА С ЗУБЦАМИ,
 СОСТАВЛЕННОГО ИЗ РАЗЛИЧНЫХ ПРИЗМАТИЧЕСКИХ
 СТЕРЖНЕЙ С СЕЧЕНИЯМИ В ВИДЕ КОЛЬЦЕВЫХ СЕКТОРОВ

Задача о кручении призматического стержня, составленного из различных материалов, впервые была поставлена и исследована Н. И. Мухелишвили [1]. Библиография работ, посвященных решению этой задачи для стержней конкретного сечения приведена в [1, 2].

В настоящей работе рассматривается задача кручения вала, составленного из n секций. Каждая из этих секций состоит из трех призматических стержней с сечениями в виде кольцевых секторов (фиг. 1). Рассматриваемая задача приводится к совокупности регулярных бесконечных систем линейных уравнений [2].



Фиг. 1.

В силу симметрии задачи относительно $2n$ радиусов замечаем, что функцию напряжений $U(r, \varphi)$ достаточно определить только в части области, заключенной между двумя ближайшими радиусами симметрии (фиг. 1).

Функция $U(r, \varphi)$ в областях I, II, III удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 U_i = \frac{\partial^2 U_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U_i}{\partial \varphi^2} = -2G_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1)$$

где G_1, G_2, G_3 — соответственно модули сдвига в областях I, II, III. На контурах этих областей $U_i(r, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют условиям

$$U_1(r_2, \varphi) = U_3(r_3, \varphi) = U_2(r_1, \varphi) = U_2(r_1, \varphi) = 0 \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{G_1} \frac{\partial U_1}{\partial \varphi} &= \frac{1}{G_2} \frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \text{ при } \varphi = 0, \quad r_1 < r < r_2 \\ \frac{1}{G_2} \frac{\partial U_2}{\partial r} &= \frac{1}{G_3} \frac{\partial U_3}{\partial r} \text{ при } r = r_2, \quad -\varphi_2 < \varphi < 0 \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

$$U_1(0, r) = U_2(0, r); \quad U_2(\varphi, r_2) = U_3(\varphi, r_2) \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial U_1}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=\varphi_1} = \left(\frac{\partial U_2}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=-\varphi_2} = \left(\frac{\partial U_3}{\partial \varphi} \right)_{\varphi=-\varphi_2} = 0; \quad U_3(0, r) = 0 \quad (5)$$

Производя замену

$$t = \ln \frac{r}{r_2} \quad (6)$$

и представляя функцию $U(r, \varphi)$ в виде

$$U_i(r, \varphi) = G_i \left[\Phi_i(t, \varphi) - \frac{1}{2} r_2^2 e^{2t} \right] \quad (i = 1, 2, 3) \quad (7)$$

получаем, что функции $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) удовлетворяют уравнению Лапласа и условиям

$$\Phi_{01}(-t_1, \varphi) = \frac{U_0}{G_1} + \frac{1}{2} r_2^2 e^{-2t_1} \quad (8)$$

$$\Phi_{02}(-t_1, \varphi) = \frac{U_0}{G_2} + \frac{1}{2} r_2^2 e^{-2t_1} \quad (9)$$

Ищем решение этого уравнения в виде

$$\Phi(t, \varphi) = \begin{cases} \Phi_1(t, \varphi) & 0 \leq \varphi \leq \varphi_1; \quad -t_1 \leq t \leq 0 \\ \Phi_2(t, \varphi) & -\varphi_2 \leq \varphi \leq 0; \quad -t_1 \leq t \leq 0 \\ \Phi_3(t, \varphi) & -\varphi_2 \leq \varphi \leq 0; \quad 0 \leq t \leq t_2 \end{cases} \quad (10)$$

где

$$t_1 = \ln \frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 = \ln \frac{r_3}{r_2} \quad (11)$$

Решив уравнение Лапласа методом разделения переменных, получим для $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$) следующие выражения:

$$\begin{aligned} \Phi_i(t, \varphi) &= \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^{(i)} \operatorname{sh} \alpha_k^{(i)} t + B_k^{(i)} \operatorname{ch} \alpha_k^{(i)} t) \sin \alpha_k^{(i)} \varphi + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} (C_k^{(i)} \operatorname{sh} \beta_k^{(i)} \varphi + D_k^{(i)} \operatorname{ch} \beta_k^{(i)} \varphi) \sin \beta_k^{(i)} t \end{aligned} \quad (12)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k &= \alpha_k^{(1)} = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_1}, & \beta_k &= \beta_k^{(1)} = \beta_k^{(2)} = \frac{k\pi}{t_1} \\ \lambda_k &= \alpha_k^{(2)} = \alpha_k^{(3)} = \frac{(2k-1)\pi}{2\varphi_2}, & \gamma_k &= \beta_k^{(3)} = \frac{k\pi}{t_2} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Удовлетворяя условиям (11), для определения постоянных $B_k^{(2)}$ и $D_k^{(2)}$ получаем совокупность бесконечных систем линейных уравнений

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} Y_p + P_k \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (14)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \lambda_k \gamma_k B_k^{(2)} &= \gamma Y_k - r_2^2 \\ \beta_k t_1 D_k^{(2)} &= X_k - r_2^2 \Phi_{02} (-1)^{k+1} \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

$$a_{kp} = \frac{2\gamma \beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + g_{2,1} \operatorname{th} \beta_k \varphi_1) (\beta_k^2 + \lambda_k^2)} \quad (16)$$

$$b_{kp} = \frac{2\lambda_k}{\gamma t_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + g_{2,1} \operatorname{cth} \lambda_k t_2) (\beta_k^2 + \lambda_k^2)} \quad (17)$$

$$P_k = -(1 - g_{2,1}) \frac{4r_2^2 [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}] \operatorname{th} \beta_k \varphi_1}{(\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + g_{2,1} \operatorname{th} \beta_k \varphi_1) (4 + \beta_k^2)} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} Q_k &= \frac{2r_2^2 \lambda_k}{\gamma (\lambda_k^2 - 4) (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + g_{2,1} \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left\{ 1 + \right. \\ &+ \left. \frac{\lambda_k^2 - 4}{2\lambda_k^2 t_1} \left(\frac{2\Phi_{02}}{r_2^2} - 1 \right) + \frac{2}{\lambda_k} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} \right) \right\} \quad (19) \end{aligned}$$

Вводя новые обозначения, (14) можно рассматривать как одну бесконечную систему

$$Z_i = \sum_{n=1}^{\infty} A_{in} Z_n + N_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (20)$$

где

$$Z_{2k-1, n} = X_k, \quad Z_{2k, n} = Y_k \quad (k = 1, 2, \dots)$$

Покажем, что система (20) вполне регулярна

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_{2k-1, n} &= \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} = \frac{2\gamma \beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + g_{2,1} \operatorname{th} \beta_k \varphi_1)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \beta_k^2} = \\ &= \frac{\gamma}{\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + g_{2,1} \operatorname{th} \beta_k \varphi_1} \left(\operatorname{cth} \beta_k \varphi_2 - \frac{1}{\beta_k \varphi_2} \right) \ll \frac{\gamma}{1 + g_{2,1}} \quad (21) \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_{2k, n} = \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} = \frac{2r_k}{\lambda t_1 (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + g_{2,3} \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_p^2 + \lambda_k^2} =$$

$$= \frac{1}{\lambda (\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + g_{2,3} \operatorname{cth} \lambda_k t_2)} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_1 - \frac{1}{\lambda_k t_1} \right) \leq \frac{1}{\lambda (1 + g_{2,3})} \quad (22)$$

число λ выбираем из равенства

$$\frac{\lambda}{1 + g_{2,1}} = \frac{1}{\lambda (1 + g_{2,3})} \quad \lambda = \sqrt{\frac{1 + g_{2,1}}{1 + g_{2,3}}} \quad (23)$$

Таким образом, вполне регулярность (20), следовательно и (14), доказана. Легко видеть из (18) и (19), что свободные члены системы (20) ограничены сверху и при $i \rightarrow \infty$ стремятся к нулю.

Подставляя значения постоянных интегрирования в (12), получаем выражения функций $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$).

Для определения постоянной U_0 воспользуемся обобщенной теоремой Бредта [2] о циркуляции касательного напряжения при кручении составных призматических стержней:

$$\int_{\Gamma_0} \tau_{\alpha\beta}^{(i)} ds = 2G_i \Omega_0 \quad (24)$$

где Γ_0 — внутренний контур сечения, Ω_0 — площадь, ограниченная контуром Γ_0

$$\left. \begin{aligned} \tau_{\alpha\beta}^{(1)} &= -\frac{G_1 e^{-t}}{r_2} \frac{\partial U_1}{\partial t} = -\frac{G_1 e^{-t}}{r_2} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - r_2^2 e^{2t} \right) \\ \tau_{\alpha\beta}^{(2)} &= -\frac{G_2 e^{-t}}{r_2} \frac{\partial U_2}{\partial t} = -\frac{G_2 e^{-t}}{r_2} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - r_2^2 e^{2t} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Соотношение (24) при помощи (25) после некоторых преобразований приводится к виду

$$\int_{-\varphi_2}^{\varphi_1} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \right)_{t=-t} d\varphi = \int_{-\varphi_2}^0 \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \right)_{t=-t} d\varphi + \int_0^{\varphi_1} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} \right)_{t=-t} d\varphi \quad (26)$$

Подставив значения функций $\Phi_1(t, \varphi)$ и $\Phi_2(t, \varphi)$ в это соотношение и производя интегрирование, получим для определения постоянной U_0 следующую формулу:

$$r_2^2 (\varphi_1 + \varphi_2) - 2 (\Phi_{01} \varphi_1 + \Phi_{02} \varphi_2) - \frac{2t}{\varphi_2} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{Y_p}{\lambda_p^2} = 0 \quad (27)$$

В частном случае, когда

$$G_1 = G_3, \quad G_2 \neq G_3$$

$$\left. \begin{aligned} X_k &= \sum_{p=1}^{\infty} a'_{kp} Y_p \\ Y_k &= \sum_{p=1}^{\infty} b_{kp} X_p + Q_k \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

где

$$a_{kp} = \frac{2\beta_k}{\varphi_2 (\operatorname{th} \beta_k \varphi_2 + \operatorname{th} \beta_k \varphi_1) (\lambda_p^2 + \beta_k^2)} \quad (29)$$

Жесткость при кручении составного призматического стержня определяется по формуле

$$C = 2G_i \left[U_0 \Omega_0 + \int_{\Omega} U d\Omega \right] \quad (30)$$

где U_0 — значение напряжений на внутреннем контуре; Ω_0 — площадь, ограниченная внутренним контуром; Ω — область сечения стержня. Подставив в (30) $U_i(t, \varphi) = \Phi_i(t, \varphi) - \frac{1}{2} r_i^2 e^{2t}$ ($i = 1, 2, 3$) и используя выражения $\Phi_i(t, \varphi)$ ($i = 1, 2, 3$), после интегрирования получим для определения жесткости C следующую формулу:

$$\begin{aligned} C &= nG_1 \varphi_1 \frac{1}{2t_1} (2\Phi_{01} - r_2^2) (r_2^2 - r_1^2) + nG_2 \varphi_2 \frac{1}{2t_2} (2\Phi_{02} - r_2^2) (r_2^2 - r_1^2) - \\ &\quad - nG_3 \varphi_2 \frac{1}{2t_2} (r_3^2 - r_2^2)^2 + \frac{n}{2} \varphi_2 (G_3 r_3^4 - G_2 r_2^4) + \\ &\quad + nG_1 \varphi_1 \left(\frac{r_1^4}{2} + \frac{r_1^4}{2} - 2\Phi_{01} r_1^2 \right) + nG_2 \varphi_2 \left(\frac{r_1^4}{2} + \frac{r_2^4}{2} - 2\Phi_{02} r_1^2 \right) - \\ &\quad - \frac{n}{2} G_3 \varphi_2 r_2^4 + G_1 \varphi_1 r_1^2 \left(\Phi_{01} - \frac{r_1^2}{2} \right) + G_2 \varphi_2 r_1^2 \left(\Phi_{02} - \frac{r_1^2}{2} \right) + \\ &\quad + \frac{4nG_2 \varphi_2}{\varphi_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{Y_k}{\lambda_k (4 - \lambda_k^2)} \left(\operatorname{cth} \lambda_k t_1 + \operatorname{cth} \lambda_k t_2 - \frac{e^{2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{e^{-2t_1}}{\operatorname{sh} \lambda_k t_1} - \frac{16nG_3 r_2^4}{t_2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{2t_1}]^2}{\gamma_k (4 + \gamma_k^2)} \operatorname{th} \gamma_k \varphi_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{4nG_2 r_2^2}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k [1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k (4 + \beta_k^2)} (\operatorname{th} \beta_k \varphi_1 + \operatorname{th} \beta_k \varphi_2) + \right. \\ &\quad \left. + (1 - g_{2,1}) \frac{16nr_2^4}{t_1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[1 + (-1)^{k+1} e^{-2t_1}]}{\beta_k (4 + \beta_k^2)} \operatorname{th} \beta_k \varphi_1 \right) \quad (31) \end{aligned}$$

В качестве численных примеров рассмотрим случай, когда число зубцов равняется двадцати, а размеры сечения определяются следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} G_1 = G_2, \quad \frac{r_3}{3} = \frac{r_2}{2} = r_1, \quad n = 12 \\ \frac{G_3}{G_2} = 2, \quad \varphi_1 = \varphi_2 = \frac{\pi}{24} \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Решив бесконечные системы (14), получим для неизвестных следующие оценки:

$$\begin{aligned} -0.048248 r_2^2 &\leq X_1 \leq -0.047349 r_2^2 \\ -0.021953 r_2^2 &\leq X_2 \leq -0.021589 r_2^2 \\ -0.019790 r_2^2 &\leq X_3 \leq -0.019434 r_2^2 \\ -0.018320 r_2^2 &\leq X_4 \leq -0.017981 r_2^2 \\ -0.016919 r_2^2 &\leq X_5 \leq -0.016561 r_2^2 \\ -0.052424 r_2^2 &\leq Y_1 \leq -0.051656 r_2^2 \\ -0.022657 r_2^2 &\leq Y_2 \leq -0.022337 r_2^2 \\ -0.013446 r_2^2 &\leq Y_3 \leq -0.013193 r_2^2 \\ -0.008230 r_2^2 &\leq Y_4 \leq -0.008037 r_2^2 \\ -0.007405 r_2^2 &\leq Y_5 \leq -0.007248 r_2^2 \end{aligned}$$

При этом были использованы определенные по формуле (27) значения постоянной Φ_{02} с избытком и недостатком

$$0.501848 \leq \frac{\Phi_{02}}{r_2^2} \leq 0.501981 \quad (33)$$

Используя эти оценки и (33), на основании (31) получим следующую оценку для жесткости:

$$1.794819 \leq \frac{C}{G_2 r_2^4} \leq 1.796523 \quad (34)$$

В таблице приводятся значения напряжений в некоторых характерных точках с избытком и недостатком:

Точки сечения		(0, 0)	$(0, -\frac{\varphi_2}{4})$	$(0, -\frac{\varphi_2}{2})$	$(0, -\frac{3}{4}\varphi_2)$	$(0, -\varphi_2)$
$\frac{\varphi_2^{(2)}}{G_2 \theta r_2}$	С недостатком	∞	0.228604	0.110056	0.74267	0
	С избытком	∞	0.236487	0.123452	0.802421	0
$\frac{\varphi_2^{(2)}}{G_2 \theta r_2}$	С недостатком	∞	1.196342	1.155037	0.824775	0.641703
	С избытком	∞	1.205001	1.164622	0.832729	0.653832

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы.

Թ. Ա. ԱՐՄՈՒՅՅՈՒՆՅԱՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ՍԵԿՏՈՐԻ ՏՆՏԲ ՈՒՆԵՑՈՂ ԸՆԳՂԱՅՆԱԿԱՆ ՀԱՏՎԱԾՔՈՎ
ՊՐԻՉՄԱՏԻԿ ՉՈՂԵՐԻՑ ԿԱԶՄՂԱՅՐ ՍՆԱՄԵՁ ԱՏԱՄՆԱԿՈՐ ԼԻՍԵՌԻ
ՈՂՈՐՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Աշխատանքում դիտարկված է օղակի սեկտորի ընդլայնական հատվածքով պրիզմատիկ մարմիններից կազմված անոմեղ և ատամնավոր լիսեռի սլաքման խնդիրները (գծ. 1):

Խնդիրը լուծված է լարման ֆունկցիայի միջոցով, որը լուրջաքանչյուր տիրույթում, ըստ տարբեր նյութերի, ներկայացված է եռանկյունաչափական շարքերի միջոցով: Օգտագործելով խնդրի եզրային պայմանները, ինչպես նաև տարբեր տիրույթների բաժանման դժերի վրա սեղափոխումների և լարումների համապատասխան բաղադրիչների անընդհատություն պայմանները շարքերի գործակիցների համար ստացվում է հավասարումների անվերջ սխեմաների երկու համախումբ:

Ապացուցված է այդ համախումբի լիովին սեղուլլարությունը և ազատ անդամների սահմանափակությունը: Որոշված է կոշտությունը և լարումները հատվածքի բնորոշ կետերում:

R. A. ARUTIUNIAN

TORSION OF A CIRCULAR HOLLOW SHAFT WITH DENTS COMPOSED OF DIFFERENT PRISMATIC BARS AND RING SECTOR SHAPE SECTIONS

S u m m a r y

The problems of torsion round hollow shaft with teeth composed of different prismatic bars and ring sector shape sections in work, are shown in figure (1).

The problem is solved by tensional function which in each interval, according to different materials, are presented by trigonometrical rows. Using the limiting conditions of the problem and also the replacement on different intervals of the separating lines and the conditions of continuity for corresponding tensions' components of the coefficients of rows, are obtained from the equations of the two infinite systems taken together.

Complete regularity of the convention and the limit of the free members are proved.

The rudeness and the tension of the sections at definite points are determined.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. *Арутюнян Н. Х. и Абрамян Б. А.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
3. *Чобакян К. С.* Применение функций напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат., ест. и техн. наук, VIII, № 2, 1955, 17 — 20.
4. *Чобакян К. С., Галфали П. О.* Задачи о кручении прямоугольного стержня с тонким усиливающим покрытием. Изв. АН СССР, ОТН, серия механика и машиностроение, № 1, 1960, 165 — 167.
5. *Галфали П. О., Чобакян К. С.* Приближенное решение некоторых задач о кручении стержней с тонким усиливающим покрытием. Изв. АН СССР, ОТН, серия механика и машиностроение, № 4, 1959, 85 — 92.
6. *Абрамян Б. А., Тоцоян В. С.* Кручение призматических стержней с поперечным сечением в виде кольцевого сечения с зубцом. Изв. АН АрмССР, т. 12, № 6, 1959.
7. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., 1949.