ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 4, 1969 Механика

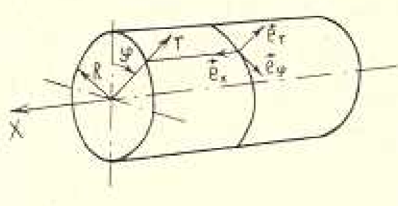
Р. Н. ОВАКИМЯН

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТОКОНЕСУЩЕЙ ОБОЛОЧКИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОВОДИМОСТИ

Во многих областях науки и техники постоянно растет потребность в сильных магнитных полях. Ввиду этого в последнее время широко используются сверхпроводящие токонесущие поверхности [1,2]. У сверхпроводников отсутствует электрическое сопротивление, так что тепловые потери при протекании тока не возникают, и сильные магнитные поля могут быть получены практически без потребления мощности.

К настоящему времени дальнейшее увеличение напряженности магнитного поля находится в прямой зависимости от обеспечения прочности токонесущих поверхностей, имеющих в основном вид тонких пластинок и оболочек, и устойчивости их первоначальной формы. Этим в значительной мере объясняется повышенный интерес к задачам, относящимся к прочности и устойчивости пластинок и оболочек в сильном электромагнитном поле.

В данной статье рассматривается устойчивость цилиндрической токонесущей оболочки бесконечной длины, изготовленной из сверхпроводящего материала, к малым радиальным возмущениям.



Фиг. 1.

Введем цилиндрическую систему координат x, φ, r ($\vec{e}_x$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_r$ — единичные орты-векторы), совместив полярную ось x с осью оболочки (фиг. 1). Обозначим срединный радиус оболочки через R, а толщину оболочки — через h. Малые радиальные возмущения оболочки ζ представим в виде бегущей волны вдоль оси x

$$\zeta = \zeta_0 e^{i(kx - \omega t)} \tag{1}$$

где ζ_0 — амплитуда колебаний, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны возмущения, ω — круговая частота.

Предварительно заметим, что если проводник при своем движении пересекает силовые линии магнитного поля, то, как известно, в нем возбуждается электродвижущая сила. В идеальном сверхпроводящем проводнике сколь угодно малая электродвижущая сила возбуждала бы бесконечный ток, что невозможно. Следовательно, идеально проводящая оболочка при колебаниях должна увлекать с собой магнитные силовые линии, прилегающие к поверхности оболочки. Иначе говоря, магнитное поле никогда не проникает в толщину сверхпроводника и магнитная индукция $\vec{B}$, равная

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$$

где $\vec{H}$ — напряженность магнитного поля, μ — относительная магнитная проницаемость, $\mu_0 = \text{const}$ — магнитная проницаемость вакуума, в сечении сверхпроводящей оболочки всегда удовлетворяет условию [3]

$$\vec{B} = 0$$

Здесь уравнения даны в системе единиц СИ.

Таким образом, при колебаниях сверхпроводящей токонесущей оболочки сила постоянного тока $\vec{J}$ по величине не меняется, возмущения же магнитного поля возможны только вне сверхпроводящего материала оболочки.

Предполагая, что характер возмущения напряженности магнитного поля $\vec{h}$ таков, как и характер возмущения ζ (1), представим его составляющие по осям x, φ, r в виде

$$h_x = f_1(r)\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad h_\varphi = f_2(r)\, e^{i(kx-\omega t)}, \quad h_r = f_3(r)\, e^{i(kx-\omega t)} \qquad (2)$$

где определению подлежат неизвестные функции $f_i(r)$ $(i = 1, 2, 3)$.

Учитывая неизмеримо малую величину скорости распространения механических колебаний $\frac{\omega}{k}$ по сравнению со скоростью света в пустоте c,

$$\frac{\omega^2}{k^2} \ll c^2$$

распределение возмущений $\vec{h}$ вне оболочки можно описать уравнениями Максвелла для статического поля [5]

$$\text{rot}\,\vec{h} = 0, \qquad \text{div}\,\vec{b} = 0 \qquad (3)$$

где $\vec{b} = \mu_0\vec{h}$ (не уменьшая общности, примем $\mu = 1$).

Так как возмущения $\vec{h}$ (2) от координаты φ не зависят, то по уравнениям (3) в цилиндрической системе координат $\text{rot}\,\vec{h}$ будет иметь следующий вид:

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rh_\varphi)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial h_x}{\partial r} - \frac{\partial h_r}{\partial x}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{\partial h_\varphi}{\partial x}\vec{e}_r = 0$$

или

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rh_\varphi) = 0, \quad \frac{\partial h_x}{\partial r} - \frac{\partial h_r}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial h_\varphi}{\partial x} = 0 \tag{4}$$

а дивергенция $\vec{b}$, учитывая, что μ_0 — постоянная величина, будет равна

$$\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rh_r) = 0 \tag{5}$$

После подстановки выражения h_φ из (2) в последнее уравнение системы (4) и дифференцирования по x следует принять

$$h_\varphi = 0 \tag{6}$$

Из равенства (6) следует, что при радиальных колебаниях оболочки возмущения напряженности магнитного поля в окружном направлении всегда равны нулю.

При совместном решении второго уравнения системы (4) и уравнения (5) с учетом вида выражений h_x и h_r (2), в частности, для h_x получим уравнение Бесселя

$$\frac{d^2 f_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{df_1(r)}{dr} - k^2 f_1(r) = 0 \tag{7}$$

причем

$$f_3(r) = \frac{1}{ik}\frac{df_1(r)}{dr} \tag{8}$$

Решение уравнения (7) выражается посредством функций Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого порядка

$$f_1(r) = C_1 I_0(kr) + C_2 K_0(kr) \tag{9}$$

где C_1 и C_2 — неизвестные постоянные, определяемые из граничных условий.

Одно из граничных условий составляется из требования, чтобы магнитное поле было всюду касательно к сверхпроводящей поверхности оболочки [3]

$$\vec{n}\cdot\vec{H} = 0 \tag{10}$$

где $\vec{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности оболочки.

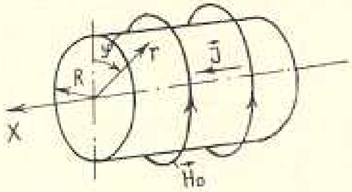
Другое граничное условие составляется с учетом направления тока, протекающего по поверхности оболочки.

Случай 1. Ток $\vec{J}$ направлен вдоль оси x (фиг. 2).

В этом случае напряженность магнитного поля отлична от нуля только вне оболочки в области $r \geqslant R + \dfrac{h}{2}$ (для невозмущенного состояния) и $r \geqslant R + \frac{h}{2} + \zeta$ (в возмущенном состоянии). В дальнейшем, как принято в теории тонких оболочек, все расчеты будут отнесены к срединной поверхности оболочки радиуса R. В невозмущенном состоянии напряженность магнитного поля $\vec{H}_0$ в данной системе координат равна

$$\vec{H}_0 = -\frac{J}{2\pi r}\vec{e}_\varphi \tag{11}$$

откуда следует, что при $r \to \infty$ $\vec{H}_0 \to 0$. Следовательно, и возмущение $\vec{h}$ также должно стремиться к нулю. Поэтому в выражении (9) для рассматриваемого случая следует принять $C_1 = 0$.



Фиг. 2.

Итак,

$$h_x = C_2 K_0(kr)\, e^{i(kx-\omega t)} \tag{12}$$

а по уравнению (8)

$$h_r = iC_2 K_1(kr)\, e^{i(kx-\omega t)} \tag{13}$$

где $K_1(kr)$ — функция Макдональда первого порядка. Для определения постоянной C_2 перейдем к уравнению (10).

Уравнение возмущенной поверхности оболочки задается в виде

$$r_0 = R + \zeta \tag{14}$$

где r_0 — радиус оболочки. В случае задания поверхности уравнением вида (14) вектор внешней нормали $\vec{n}$ равен

$$\vec{n} = -\frac{p}{N}\vec{e}_x + \frac{1}{N}\vec{e}_r$$

где $p = \frac{\partial r_0}{\partial x}$, а $N = \sqrt{p^2 + 1}$.

После дифференцирования, пренебрегая членами второго порядка $k\zeta$ по сравнению с единицей, получим для нормали $\vec{n}$ следующее выражение:

$$\vec{n} = -ik\zeta\vec{e}_x + \vec{e}_r \tag{15}$$

Напряженность магнитного поля $\vec{H}$ на поверхности оболочки $r_0 = R + \zeta$ с учетом возмущений h_x (12) и h_r (13), накладываемых на стационарное поле $\vec{H}_0$ (11), равна

$$\vec{H} = C_2 K_0 (kR)\, e^{i(kx-\omega t)} \vec{e}_x - \frac{J}{2\pi (R+\zeta)} \vec{e}_\varphi + i C_2 K_1 (kR)\, e^{i(kx-\omega t)} \vec{e}_r \qquad (16)$$

Подставив выражения (15) и (16) в граничное условие (10), получим

$$-iC_2 \left[kK_0 (kR) \zeta - K_1 (kR) \right] e^{i(kx-\omega t)} = 0$$

откуда имеем $C_2 = 0$. Тогда $h_x = h_r = 0$.

Таким образом, в случае осевого направления тока J при малых радиальных колебаниях сверхпроводящей оболочки возмущения магнитного поля, накладываемые на стационарное поле, по всем трем осям координат равны нулю. Физически это означает, что магнитное поле вне оболочки в возмущенном состоянии выражается так же, как в случае невозмущенной оболочки.

В общем случае на поверхность сверхпроводника в магнитном поле [3] действует давление

$$\vec{p} = -\frac{HB}{2} \vec{n}$$

которое в невозмущенном состоянии оболочки при $r_0 = R$ с учетом (11) равно

$$\vec{p}_0 = -\mu_0 \frac{H_0^2}{2} \vec{e}_r = -\mu_0 \frac{J^2}{8\pi^2 R^2} \vec{e}_r \qquad (17)$$

а в возмущенном состоянии при $r_0 = R + \zeta$ с учетом (15), (11), а также выражения (17) равно

$$\vec{p} = ikp_0 \zeta \vec{e}_x - \left(1 - 2\frac{\zeta}{R}\right) p_0 \vec{e}_r \qquad (18)$$

Из соотношения (18) следует, что в осевом направлении возмущенной оболочки появляется усилие

$$\vec{p}_x = ikp_0 \zeta \vec{e}_x$$

Величина возмущения магнитного давления $\Delta \vec{p}$ на поверхности оболочки является разностью давлений в возмущенном (18) и невозмущенном (17) состояниях и равна

$$\Delta \vec{p} = ikp_0 \zeta \vec{e}_x + 2p_0 \frac{\zeta}{R} \vec{e}_r \qquad (19)$$

В данном случае уравнения движения оболочки бесконечной длины без учета сил тяжести имеют следующий вид [4]:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\nu}{R}\frac{\partial \zeta}{\partial x}=-\frac{1-\nu^2}{Eh}\left(p_x-\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)\\ &\frac{\nu}{R}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{h^2}{12}\frac{\partial^4 \zeta}{\partial x^4}+\frac{\zeta}{R^2}=\frac{1-\nu^2}{Eh}\left(p_r-\rho h\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}\right)\end{aligned} \tag{20}$$

где $u(x, t)$ — тангенциальное продольное перемещение, E — модуль упругости, ν — коэффициент Пуассона, ρ — плотность материала оболочки. Так как $u \ll \zeta$, то, принимая инерционный член $\rho h\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}\to 0$, из системы уравнений (20), после подстановки составляющих $\Delta\vec{p}$ (19) и дифференцирования по x и t, получим следующее характеристическое уравнение:

$$\omega^2=\Omega^2-\frac{2+\nu}{R\rho h}p_0 \tag{21}$$

где $\Omega^2=\dfrac{1}{\rho h}\left(Dk^4+\dfrac{Eh}{R^2}\right)$ — квадрат частоты собственных осесимметричных колебаний оболочки, а $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ — цилиндрическая жесткость.

Как видно из выражения (21), давление возмущения магнитного поля $\Delta\vec{p}$, возникающее при колебаниях токонесущей оболочки бесконечной проводимости, уменьшает устойчивость оболочки. В данном случае при увеличении радиуса оболочки ($\zeta>0$) давление магнитного поля уменьшается по сравнению с невозмущенным состоянием оболочки, а при уменьшении радиуса ($\zeta<0$) давление возрастает. Такого типа возмущения давления могут привести к перетяжке и неустойчивости поверхности оболочки.

Условием сохранения устойчивости оболочки является выполнение неравенства

$$p_0\leqslant\frac{\rho hR}{2+\nu}\Omega^2 \tag{22}$$

что является условием отсутствия мнимой части в выражении частоты колебаний ω, которое вообще может быть комплексным числом. Знак равенства соответствует критическому давлению магнитного поля.

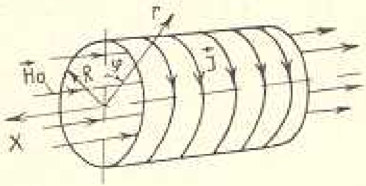
Случай 2. Ток $\vec{J}$ циркулирует по поверхности оболочки по винтовой линии (цилиндрический соленоид) (фиг. 3).

Пусть на единицу длины оболочки приходится n_0 витков проводника, намотанных так плотно, что каждый виток соленоида можно заменить замкнутым кольцеобразным током той же силы. В этом случае [5] по поверхности оболочки вдоль φ циркулирует равномерно распределенный поверхностный ток плотности

$$\vec{i}_0=n_0 J\vec{e}_\varphi \tag{23}$$

Магнитное поле соленоида $(r > R)$ бесконечной длины равно нулю, а внутри соленоида $(r < R)$ поле однородно и равно

$$\vec{H}_0 = -i_0 \vec{e}_x \tag{24}$$



Фиг. 3.

Возмущения магнитного поля, возникающие при радиальных колебаниях оболочки, по-прежнему описываются уравнениями (4) и (5). Так как функция $K_0(kr)$, входящая в уравнение (9), имеет особенность в начале координат, то для рассматриваемой области $0 \leqslant r \leqslant R + \zeta$ следует положить $C_2 = 0$.

Тогда

$$h_x = C_1 I_0(kr) e^{i(kx - \omega t)} \tag{25}$$

и по уравнению (8)

$$h_r = -iC_1 I_1(kr) e^{i(kx - \omega t)} \tag{26}$$

где $I_1(kr)$ — функция Бесселя чисто мнимого аргумента первого порядка.

Напряженность магнитного поля в возмущенном состоянии с учетом возмущений (25), (26) и стационарного магнитного поля (24) на поверхности оболочки при $r_0 = R + \zeta$ равна

$$\vec{H} = [-i_0 + C_1 I_0(kR) e^{i(kx - \omega t)}] \vec{e}_x - iC_1 I_1(kR) e^{i(kx - \omega t)} \vec{e}_r \tag{27}$$

Подставив выражения (15) и (27) в граничное условие (10) $\vec{n} \cdot \vec{H} = 0$, получим в заданном приближении

$$C_1 = \frac{k i_0 \zeta_0}{I_1(kR)} \frac{1}{1 + k \dfrac{I_0(kR)}{I_1(kR)} \zeta} = \frac{k i_0}{I_1(kR)} \zeta_0$$

Следовательно, подставив значение C_1 в выражения (25) и (26), получим

$$h_x = k i_0 \frac{I_0(kr)}{I_1(kR)} \zeta \tag{28}$$

и

$$h_r = -i k i_0 \frac{I_1(kr)}{I_1(kR)} \zeta \tag{29}$$

Таким образом, на внутренней поверхности оболочки при текущем $r_0 = R + \zeta$ напряженность магнитного поля на основании выражений (24), (28) и (29) будет равна

$$\vec{H} = -i_0 \left[1 - k\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}\zeta\right]\vec{e}_x - iki_0\zeta\vec{e}_r \tag{30}$$

В рассматриваемом случае на внутреннюю поверхность невозмущенной оболочки действует растягивающее радиальное давление

$$\vec{p}_0 = \mu_0 \frac{H_0^2}{2}\vec{e}_r = \mu_0 \frac{i_0^2}{2}\vec{e}_r = \mu_0 \frac{n_0^2 J^2}{2}\vec{e}_r \tag{31}$$

В возмущенном состоянии, пренебрегая квадратами величин ζ по сравнению с единицей, на основании выражений (15) и (30) величина давления будет

$$\vec{p} = -\frac{ik}{2}\mu_0 i_0^2\zeta\vec{e}_x + \frac{\mu_0 i_0^2}{2}\left[1 - 2k\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}\zeta\right]\vec{e}_r \tag{32}$$

Из соотношения (32) следует, что в осевом направлении, помимо радиального давления

$$\vec{p}_r = \frac{\mu_0 i_0^2}{2}\left[1 - 2k\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}\zeta\right]\vec{e}_r$$

появляется усилие

$$\vec{p}_x = -\frac{ik}{2}\mu_0 i_0^2\zeta\vec{e}_x$$

Величина возмущения магнитного давления $\Delta\vec{p}$ равна разности давлений в возмущенном (32) и невозмущенном (31) состояниях

$$\Delta\vec{p} = -ikp_0\zeta\vec{e}_x - 2k\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)}p_0\zeta\vec{e}_r \tag{33}$$

Из системы уравнений движения оболочки (20), принимая по-прежнему инерционный член $\rho h\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \to 0$, получим следующее характеристическое уравнение

$$\omega^2 = \Omega^2 + \frac{1}{R\rho h}\left[2kR\frac{I_0(kR)}{I_1(kR)} + \nu\right]p_0 \tag{34}$$

Из выражения (34) следует, что магнитное поле в цилиндрическом соленоиде бесконечной проводимости в отличие от случая 1 (осевого направления тока (21)) увеличивает устойчивость оболочки при радиальных колебаниях токонесущей поверхности.

Филиал БАО по Космическим Исследованиям
Филиал Государственного Института
Прикладной Оптики

Поступила 14 II 1969

Ռ. Ն. ՀՈՎԱԿԻՄՅԱՆ

ԱՆՍԱՀՄԱՆ ՀԱՂՈՐԴԱԿԱՆՈՒԹՅԱՄԲ ՀՈՍԱՆՔԱԿԻՐ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված է անվերջ երկար հոսանքակիր գլանային թաղանթի կայունությունը վազող ալիքի տիպի փոքր շառավղային տատանումների նկատմամբ, թաղանթների տեխնիկական տեսության սահմաններում:

Անվերջ հաղորդականությամբ թաղանթի համար կիրառված է գերհաղորդիչ մակերևույթին մագնիսական ուժագծերի շոշափող լինելու պայմանը:

Ցույց է տրված, որ հաստատուն հոսանքի առանցքային ուղղվածության դեպքում շառավղային տատանումների ժամանակ մագնիսական ճնշումը իջեցնում է թաղանթի կայունությունը, իսկ շրջանային ուղղվածության դեպքում (գլանային սոլենոիդ)—բարձրացնում է կայունությունը:

R. N. OVAKIMIAN

THE STABILITY OF A CURRENT-CARRYING CYLINDRICAL SHELL OF INFINITE ELECTROCONDUCTIVITY

S u m m a r y

The stability of a current-carrying shell of infinite length in relation to small radial oscillations is considered.

It is shown, that in the case of axial direction of the current the stability of the shell of infinite electroconductivity is decreased due to magnetic pressure while in the case of circular current the stability is increased.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кремлев М. Г.* Сверхпроводящие магниты. УФН, т. 93, 675.
2. *Сэмпсон У., Крейг П., Стронгин М.* Успехи в создании сверхпроводящих магнитов. УФН, т. 93, 703.
3. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, М., 1957.
4. *Болотин В. В.* Неконсервативные задачи теории упругой устойчивости. Физматгиз, М., 1961.
5. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. Гостехиздат, М., 1957.