

Б. А. КОРБУТ, В. И. ЛАЗАРЕВ

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ С ПОЛЫМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ ПРИ РАДИАЛЬНОМ ДАВЛЕНИИ

Рассматривается тонкостенная цилиндрическая оболочка средней длины, содержащая внутри полый наполнитель (фиг. 1). Снаружи оболочка подвержена действию равномерного радиального давления. Определяются верхнее и нижнее критические давления.

Аналогичная задача, в предположении, что наполнитель подчиняется модели Винклера с известным коэффициентом постели, решалась в работе [1]. Однако, там величина коэффициента постели не связывалась с физическими и геометрическими параметрами наполнителя и поэтому фактически оставалась неизвестной. Кроме того, учет действия наполнителя на основе винклеровского основания весьма приближенно отражает работу наполнителя, в частности, не учитывает явления связности и возникающие в связи с этим касательные напряжения.

В настоящей статье предлагается модель наполнителя, которая, с одной стороны, учитывает связность, с другой — позволяет связать работу наполнителя с его упругими постоянными.

Особенность потери устойчивости оболочки при радиальном давлении состоит в том, что вдоль оси образуется одна полуволна, в в окружном направлении — несколько. Это позволяет принять допущение о незначительности касательных напряжений в наполнителе в осевом направлении в сравнении с напряжениями вдоль окружности. Исходя из этого, предлагается заменить наполнитель как трехмерное тело системой плоских тел — дисков, не связанных между собой. Такое допущение будет лучше оправдываться с увеличением длины оболочки (наполнителя). Деформацию каждого диска определим, исходя из решения плоской задачи теории упругости, предполагая, что диски находятся в условиях плоского напряженного состояния. Если исходить из плоской деформации, то придется упругие постоянные заменить на их приведенные величины. На окончательный же результат, как показывают расчеты, такая замена повлияет мало.

1. Для определения верхнего критического давления воспользуемся уравнениями устойчивости пологих оболочек в смешанной форме [2]

$$\frac{D}{h} \nabla^2 \nabla^2 w = - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \tau_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{q_z}{h} \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{E} \nabla^2 \nabla^2 \Phi = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.2)$$

где q_z — нормальная реакция заполнителя, остальные обозначения — общепринятые.

Две из трех неизвестных функций в уравнениях (1.1) и (1.2) примем в виде

$$w = A_n \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{R} \quad (1.3)$$

$$\Phi = B_n \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{R} \quad (1.4)$$

Здесь A_n и B_n — постоянные, n — число волн вдоль окружности, R и L — соответственно радиус и длина оболочки.

Выбранные функции соответствуют наличию на торцах оболочки диафрагм, жестких в своей и гибких из своей плоскости.

Третья неизвестная q_z определяется из решения бигармонического уравнения относительно функции напряжений для заполнителя

$$\nabla^4 \Phi_s = 0 \quad (1.5)$$

Решение (1.5) представим так [3]:

$$\Phi_s = (A_1 r^n + A_2 r^{n+2} + A_3 r^{-n} + A_4 r^{-n+2}) \cos n\theta \quad (1.6)$$

где r — радиус, θ — полярный угол, A_i ($i=1, \dots, 4$) — постоянные (фиг. 1).

Предполагая, что крепление заполнителя к оболочке допускает проскальзывание, граничные условия запишем следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_r = 0; \quad \tau_{r\theta} = 0 & \quad \text{при } r = a \\ w_s = w; \quad \tau_{r\theta} = 0 & \quad \text{при } r = R \end{aligned} \quad (1.7)$$

Здесь σ_r и $\tau_{r\theta}$ — радиальное и касательное напряжения, w_s — радиальное перемещение, a и R — соответственно внутренний и наружный радиусы заполнителя.

Используя известные соотношения [3]

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta^2} \quad (1.8)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi_s}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial r \partial \theta}$$

$$\frac{\partial w_s}{\partial r} = \frac{1}{E_s} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi_s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial \theta^2} - \nu_s \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial r^2} \right) \quad (1.9)$$

получим из (1.6) с учетом (1.7)

$$\sigma_r = -[A_1 n(n-1)r^{n-2} + A_2(n-2)(n+1)r^n + A_3 n(n+1)r^{-n-2} + A_4(n-1)(n+2)r^{-n}] \cos n\theta \quad (1.10)$$

$$E_s w_s = -\{n(1 + \nu_s)(A_1 r^{n-1} - A_2 r^{-n-1}) + [n(1 + \nu_s) - 2(1 - \nu_s)]A_3 r^{n+1} - [n(1 + \nu_s) + 2(1 - \nu_s)]A_4 r^{-n+1}\} \cos n\theta \quad (1.11)$$

$$A_1 = -\frac{A_n E_s R^{-n+1}}{2(1 + \nu_s) \Delta_n} (n+1)(n-1 + \varepsilon^{-2n} - n\varepsilon^2)$$

$$A_2 = -\frac{A_n E_s R^{-n-1}}{2(1 + \nu_s) \Delta_n} (n-1)(n+1 - \varepsilon^{-2n} - n\varepsilon^2)$$

$$A_3 = -\frac{A_n E_s R^{n+1}}{2(1 + \nu_s) \Delta_n} (n-1)(n+1 - \varepsilon^{2n} - n\varepsilon^2)$$

$$A_4 = -\frac{A_n E_s R^{n-1}}{2(1 + \nu_s) \Delta_n} (n+1)(n-1 + \varepsilon^{2n} - n\varepsilon^2) \quad (1.12)$$

$$\Delta_n = n_s^2(\varepsilon^{-2n} - \varepsilon^{2n}) + n^2(\varepsilon^{-2} - \varepsilon^2) + \frac{1 - \nu_s}{1 + \nu_s} [n(\varepsilon^{-2n} - \varepsilon^{2n}) - (\varepsilon^{-n} - \varepsilon^n)^2 + 2n^2(\varepsilon^{-2} - 1)]$$

где ν_s — коэффициент Пуассона материала заполнителя.

Реакцию q_z найдем из условия непрерывности напряжений на поверхности контакта

$$q_z = -\sigma_r \quad \text{при } r = R \quad (1.13)$$

Условие (1.13) с учетом (1.8), (1.9), (1.10), (1.11) и (1.12) дает

$$q_z = -\alpha_n w_s \quad (1.14)$$

$$\alpha_n = \frac{\sigma_r|_{r=R}}{w_s|_{r=R}} = \frac{E_s (n^2 - 1)}{R(1 + \nu_s) \Delta_n} [(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^n)^2 - n^2(\varepsilon^{-1} - \varepsilon)^2] \quad (1.15)$$

Выражение (1.14) по форме совпадает с отпором по модели Винклера, а постоянная α_n — с соответствующим коэффициентом постели. Однако, в отличие от винклеровского основания α_n учитывает действие как нормальных, так и касательных напряжений.

Докритическое кольцевое напряжение в оболочке определяется по формуле [1]

$$\sigma_y = \frac{qR}{h \left(1 + \frac{\alpha_0 R^2}{Eh}\right)} \quad (1.16)$$

где q — внешнее давление, а α_0 находится из (1.15) при условии $n = 0$

$$\alpha_0 = \frac{E_s (1 - \varepsilon^2)}{(1 + \nu_s) R \left(\varepsilon^2 + \frac{1 - \nu_s}{1 + \nu_s}\right)} \quad (1.17)$$

Внося функции (1.3), (1.4) и (1.14) с учетом (1.11), (1.12), (1.15), (1.16) и (1.17) в уравнения (1.1) и (1.2), получим после упрощений [1]

$$q_n^* = (1 + \alpha_n^*) \left[\frac{1}{12(1 - \nu^2)} n^2 x + \frac{\delta^2}{n^4 x} + \alpha_n^* \frac{1}{n^2 x} \right] \quad (1.18)$$

Здесь введены безразмерные параметры

$$q_n^* = \frac{qR^2}{Eh^2}, \quad \alpha_n^* = \frac{E_n^*(1 - \nu^2)}{(1 + \nu_n) \left(\varepsilon^2 + \frac{1 - \nu_n}{1 + \nu_n} \right)}, \quad E_n^* = \frac{E_n R}{Eh}, \quad x = \frac{h}{R} \quad (1.19)$$

$$\alpha_n^* = \frac{E_n^*(n^2 - 1)}{(1 + \nu_n) \Delta_n} [(\varepsilon^{-n} - \varepsilon^n)^2 - n^2(\varepsilon^{-1} - \varepsilon)^2], \quad \delta = \frac{\pi R}{L}$$

ν_n — коэффициент Пуассона материала оболочки.

Критическое давление находится из (1.18) путем минимизации q_n^* по n .

2. Решая нелинейную задачу, воспользуемся методом Ритца. Полная энергия системы будет [2]

$$\mathfrak{E} = U_c + U_n + U_s - U_q \quad (2.1)$$

где U_c , U_n и U_s — составляющие потенциальной энергии соответственно срединной поверхности, изгиба и заполнителя; U_q — потенциал внешних сил. Энергия оболочки и потенциал внешних сил определяются известными выражениями [2]. Для определения энергии заполнителя необходимо предварительно задаться прогибом оболочки, поскольку ее величина зависит от характера задаваемого волнообразования.

Выражение для прогиба возьмем в виде [2]

$$w = f_1 \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{R} + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} + f_0 \quad (2.2)$$

где f_1 , f_2 и f_0 — амплитуды слагаемых общего прогиба. Тогда энергию заполнителя можно представить так (фиг. 2)

$$U_s = \int_0^L \int_0^{2R} u_s dx dy \quad (2.3)$$

$$U_s = \frac{1}{2} \alpha_0 \left(f_0 + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \right)^2 + \alpha_2 \left(f_0 + f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \right) \times$$

$$\times f_1 \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{R} + \frac{1}{2} \alpha_n \left(f_2 \sin \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{R} \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} (\alpha_n - \alpha_0) f_1 f_2 \sin^2 \frac{\pi x}{L} \cos \frac{\pi y}{R} \quad (2.4)$$

Выполнив процедуру Ритца — Папковича, получим

$$q^* = F \left[\left(\frac{A}{B - C \varepsilon^2} - B \right) \varepsilon + \frac{1}{2} C \varepsilon^2 \right] + q_n^* \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\pi^2 \gamma}{16 \theta^4} \left[1 + \theta^4 + 2 \frac{\alpha_0^*}{1 + \alpha_0^*} \left[\frac{1 + \alpha_0^*}{\pi^2 \gamma} + \frac{4}{3} \frac{\pi^2 \gamma}{(1 - \nu^2)} \right] \right] \\
 B &= \frac{1}{4 \theta^2} + \frac{2 \theta^2}{S_1^2}, \quad C = 2 \pi^2 \gamma \left(\frac{1}{S_1^2} + \frac{1}{S_2^2} \right) \\
 q_{cr}^* &= F \left[\frac{\theta^4}{\pi^2 \gamma} + \frac{1}{12} \frac{\pi^2 \gamma S_1^2}{(1 - \nu^2) \theta^4} + \frac{\alpha_n^*}{\pi^2 \gamma} \right] \\
 F &= \theta^2 (1 + \alpha_n^*), \quad \theta = \frac{\pi R}{nL}, \quad \xi = \frac{f_2}{h} \\
 S_1 &= 1 + \theta^2, \quad S_2 = 1 + 9 \theta^2, \quad \gamma = \frac{Rh}{L^2}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Нижнее критическое давление определяется из условий

$$\frac{\partial q^*}{\partial \theta} = \frac{\partial q^*}{\partial \xi} = 0 \tag{2.7}$$

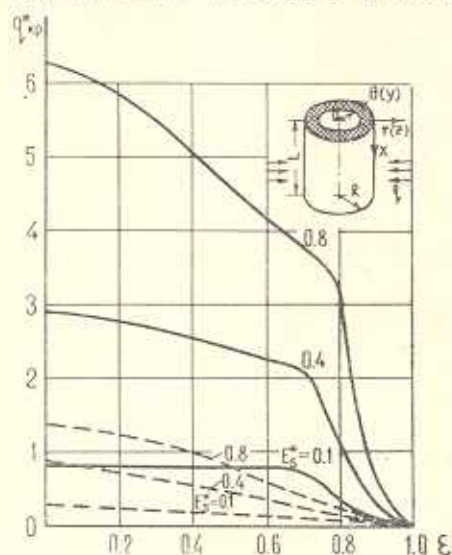
Сравнение выражений (1.18) и (2.5) с соответствующими выражениями из работы [1] показывает, что они имеют одинаковую структуру. Однако, по существу они различным образом отражают влияние наполнителя по соображениям, высказанным выше. Кроме того, параметры α_0^* и α_n^* теперь связываются с упругими постоянными наполнителя E_s и ν_s , т. е. легко определяются.

3. Были вычислены значения верхнего и нижнего критического давлений при следующих данных: $\frac{L}{R} = \pi$, $\frac{h}{R} = \frac{1}{250}$, $\nu = \nu_s = 0.3$, $E_s = 0, 0.1, 0.4, 0.8$, $\varepsilon = 0, 0.3, 0.6, 0.9, 1.0$. Результаты даны на фиг. 1, 2 и 3.

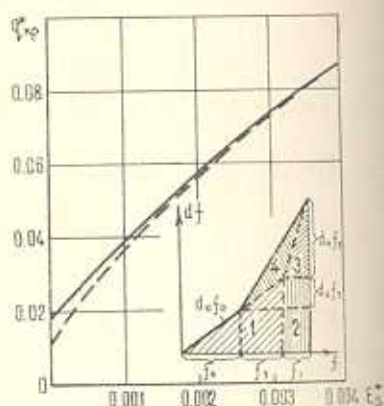
На первой из фигур приведены зависимости критических давлений от радиуса и жесткости наполнителя. Как видно, с увеличением диаметра канала устойчивость оболочки падает. Характерно, что в интервале значений $\varepsilon = 0 - 0.7$ уменьшение q_{cr}^* плавное; при $\varepsilon = 0.7 - 1.0$ q_{cr}^* падает резко. Переход из первой области во вторую сопровождается интенсивным уменьшением числа волн. Такой результат представляется естественным, поскольку при малом диаметре канала наполнитель работает как массив и число волн должно быть велико. Напротив, для больших диаметров канала система оболочка-наполнитель по условиям работы приближается к двухслойной оболочке, которая по характеру волнообразования близка к однослойной.

Для сравнения на фиг. 1 пунктирными линиями показаны критические давления, найденные в предположении, что $\alpha_n^* = \alpha_0^*$, т. е., что отпор не зависит от числа волн. Это равносильно моделированию наполнителя основанием Винклера с постоянным коэффициентом постели. Как

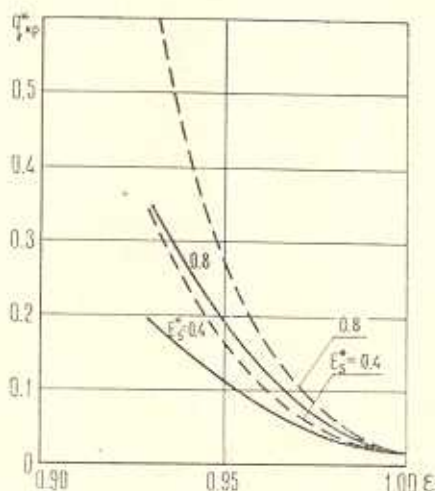
видно, винклеровская модель значительно занижает критические давления, причем занижение растет с ε^* увеличением жесткости заполнителя. Такой результат объясняется влиянием касательных напряжений, величина которых растет с увеличением числа волн. Последнее тем больше, чем выше жесткость заполнителя.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

На фиг. 2 показано сравнение верхнего (сплошная линия) и нижнего (пунктир) критических давлений при различной жесткости заполнителя в случае отсутствия канала. Здесь видно, что оба давления становятся практически равными уже при весьма малой жесткости заполнителя ($E_s^* = 0.004$) и, следовательно, надобность в решении нелинейной задачи отпадает. Для оболочки с принятыми параметрами со-

ответствующий модуль упругости не должен быть меньше $\sim 50 \text{ кг/см}^2$. Реальные заполнители имеют модуль упругости порядка $10^3 - 10^4 \text{ кг/см}^2$.

Для оценки точности предложенной модели заполнителя на фиг. 3 дано сравнение полученных критических давлений с результатами, даваемыми теорией двухслойных оболочек (пунктир) [4]. Как и следовало ожидать, совпадение хорошее в области больших значений $\varepsilon = 0.95 - 1$, т. е. для случая, когда суммарная толщина оболочки и заполнителя мала.

Բ. Ա. ԿՈՐԲՈՒՏ, Վ. Ի. ԼԱԶԱՐԵՎ

ՍԵԱՄԵՋ ԼՅՎԱՆՔՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ
ՇՈՒԱՎՂԱՅԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Իրտարկված է միջին երկարություն ունեցող թաղանթի, որը ներառում ունի սնամեջ առաձգական լցվածք: Լցվածքը մոդելավորված է սկավառակների սխեմայով, որոնք միացված չեն միմյանց հետ: Սկավառակների զեֆորմացիաները որոշված է առաձգականության ախտի վրա հարթ խնդրից:

Իրտարկված թաղանթի համար որոշված են վերին և ստորին կրիտիկական լարումները, շառավղային ճնշմամբ սեղման գեպըրում: Գծային խնդիրը լուծված է փոքր կորություն ունեցող թաղանթների հավասարումների օգնությամբ, ոչ-գծային խնդիրը՝ Ռիսցի մեթոդով:

Հաշվված են լցվածքի տարրեր կոշտությունների և ներքին տրամագրծերի զեպըրում կրիտիկական ճնշումները: Ի հայտ են բերված, սնամեջ լցվածքով, թաղանթի վարքի մի շարք առանձնահատկություններ:

B. A. KORBUT, V. I. LAZAREV

ON STABILITY OF A CYLINDRICAL SHELL
WITH THE HOLLOW CORE UNDER RADIAL PRESSURE

S u m m a r y

A thin-walled cylindrical shell of the average length with hollow elastic core is examined. The core is modeled as a system of discs not connected one with other. The discs deformation is defined from a solution of a plane problem of elasticity.

The upper and lower critical pressures are defined for the considered shell in the case of radial compression. The linear problem is

solved by means of mixed form equations for sloping shells and non-linear problem is solved by Ritz' method.

Different critical pressures for different values of rigidity and inner diametres of the core have been calculated.

Peculiarities of behaviour of the shell with hollow core are established.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Корбут Б. А., Саксонов С. Г. Устойчивость цилиндрической оболочки с упругим наполнителем при внешнем радиальном давлении. ИВУЭ, Авиационная техника, 3, 1966.
2. Вольмир С. А. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
3. Тимошенко С. П. Теория упругости. ГТТИ, М.-Л., 1934.
4. Королев В. И. Тонкие двухслойные пластинки и оболочки. Инж. сб. АН СССР, т. XXII, 1955.