

Э. В. БЕЛУБЕКЯН

## ИЗГИБ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН С СИММЕТРИЧНЫМИ ТРЕЩИНАМИ

В настоящей работе дается решение задачи поперечного изгиба прямоугольной пластинки, свободно опертой по контуру, для двух случаев расположения трещин.

В первом случае рассматривается пластинка с двумя трещинами, идущими от кромок пластинки и симметричными относительно осей симметрии прямоугольника. Здесь же рассматривается решение этой задачи для случая, когда длины трещин не равны, т. е. трещины симметричны только относительно одной из осей прямоугольника.

Во втором случае рассматривается пластинка с одной трещиной, идущей от кромки пластинки вдоль одной из осей симметрии прямоугольника.

При решении задачи применен метод дополнительных воздействий, разработанный в работе [1].

Задача сведена к решению парных рядов-уравнений, неизвестные коэффициенты которых определяются из вполне регулярных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.

В случае, когда длины трещин не равны, получаются „тройные“ ряды-уравнения, которые приводятся к квазивполне регулярной бесконечной системе.

Выведены особенности изгибающих моментов вблизи концов трещин.

Приведены численные примеры для частных случаев.

Задача об изгибе прямоугольной пластинки с разрезом, идущим от кромки пластинки до половины одной из осей пластинки, рассматривалась в работе [2].

Изгиб прямоугольной пластинки с симметричным относительно осей пластинки разрезом рассматривался в работе [3].

Исследованию изгиба некоторых бесконечных пластин с трещинами посвящены работы [4—7].

1. Рассмотрим первый случай, когда трещины длиной  $\nu b$  ( $0 < \nu < 1$ ) направлены от кромок вдоль оси  $y$  и симметричны относительно оси  $x$  пластинки (фиг. 1).

Задача сводится к определению прогибов  $w$  пластинки, удовлетворяющих в ее области уравнению

$$\Delta \Delta w = \frac{P}{D} \quad (1.1)$$

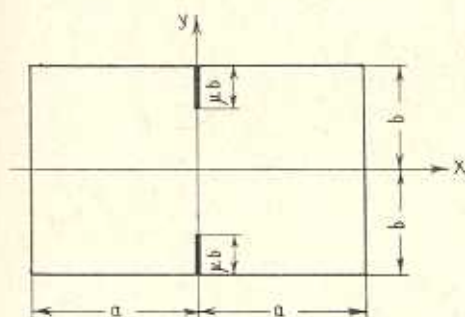
и следующим граничным условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = \pm b \quad (1.2)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \pm(1-\nu)b < y < \pm b \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad \pm(1-\nu)b < y < \pm b \quad (1.5)$$



Фиг. 1.

Для простоты принимается, что функция, выражающая распределение нагрузки, зависит только от  $y$  и разлагается в ряд Фурье

$$p = \sum_1^{\infty} a_k \cos \lambda_k y, \quad a_k = \frac{2}{b} \int_0^b p \cos \lambda_k y dy \quad (1.6)$$

Согласно [1], с учетом симметричности задачи относительно осей  $x$  и  $y$ , функция  $w$  представляется в виде

$$w = f(y) + \frac{1}{D} \sum_1^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k x \operatorname{sh} \lambda_k x) \cos \lambda_k y \pm \frac{1}{D} \sum_1^{\infty} \frac{a_k}{4\lambda_k} [(1+\sigma) \operatorname{sh} \lambda_k x + (1-\sigma) \lambda_k x \operatorname{ch} \lambda_k x] \cos \lambda_k y \quad (1.7)$$

где  $f(y)$  — частное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2)

$$f(y) = \frac{1}{D} \sum_1^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^4} \cos \lambda_k y \quad (1.8)$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{2b} \quad k = 1, 3, 5, \dots$$

$\sigma$  — коэффициент Пуассона,  $D$  — жесткость пластинки.

В выражении (1.7) знак плюс перед второй суммой относится к области  $x > 0$ , а минус — к области  $x < 0$ .

Как видно из (1.7), для угла наклона  $\partial w / \partial x$  на линии  $x = 0$  получается разрыв величиной  $\sum_1^{\infty} z_k \cos \lambda_k y$ .

Следовательно, функция  $w$  должна удовлетворять еще условию непрерывности угла наклона на неразрезанной части линии  $x = 0$ , т. е.

$$\sum_1^{\infty} z_k \cos \lambda_k y = 0 \quad \text{при } -(1-\mu)b < y < (1-\mu)b \quad (1.9)$$

Таким образом, для определения постоянных коэффициентов  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $z_k$  имеются условия (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) и (1.9).

Уравнения (1.2) и (1.5) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя граничным условиям (1.3), получим выражения для  $A_k$  и  $B_k$

$$A_k = -\frac{a_k}{\lambda_k^3 \operatorname{ch} \lambda_k a} \left( 1 + \frac{\lambda_k a}{2} \operatorname{th} \lambda_k a \right) - z_k \left( \frac{1+\sigma}{4\lambda_k} \operatorname{th} \lambda_k a + \frac{1-\sigma}{4} \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k a} \right) \quad (1.10)$$

$$B_k = \frac{a_k}{2\lambda_k^3 \operatorname{ch} \lambda_k a} - \frac{1-\sigma}{4} z_k \operatorname{th} \lambda_k a \quad (1.11)$$

Из уравнений (1.4) и (1.9) для определения коэффициентов  $z_k$  получаются следующие парные ряды-уравнения:

$$\sum_0^{\infty} z_{2k-1} \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi = 0 \quad (0 < \varphi < \beta) \quad (1.12)$$

$$\sum_0^{\infty} z_{2k+1} \left( k + \frac{1}{2} \right) (1 - N_k) \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi = g(\varphi) \quad (\beta < \varphi < \pi)$$

где

$$\varphi = \frac{\pi y}{b} \quad \beta = (1-\mu)\pi \quad (1.13)$$

$$N_k = \frac{1 + e^{-2\lambda_k a} - 2\gamma \lambda_k a}{2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k a} \quad \gamma = \frac{1-\sigma}{3+\sigma} \quad (1.14)$$

$$g(\varphi) = \sum_0^{\infty} C_k \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi \quad (1.15)$$

$$C_k = -\frac{16 b^3 a_{2k+1}}{\pi^3 (1-\sigma) (3+\sigma) (2k+1)^2} \times \left[ \sigma + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k a} \left| \frac{\pi (2k+1) a}{4b} (1-\sigma) \operatorname{th} \lambda_k a - \sigma \right| \right] \quad (1.16)$$

Таким образом, задача сводится к решению „парных рядов“ (1.12). Интегрируя по  $\varphi$  второе из уравнений (1.12) и пользуясь методом, разработанным в работе [8], приведем решение системы (1.12) к решению следующей бесконечной системы линейных алгебраических уравнений:

$$X_n = \sum_0^{\infty} a_{kn} X_k + b_n \quad (1.17)$$

где приняты обозначения

$$X_k = \frac{(-1)^k a_{2k+1}}{k + \frac{1}{2}} \quad (1.18)$$

$$a_{kn} = \left(k + \frac{1}{2}\right) N_k J_{kn} \quad (1.19)$$

$$b_n = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k C_k}{k + \frac{1}{2}} J_{kn} + C J_n \quad (1.20)$$

$$J_{kn} = \int_0^{\beta_k} P_k(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (1.21)$$

$$J_n = \int_0^{\beta_1} P_{-1/2}(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta \quad (1.22)$$

$$\beta_1 = \pi - \beta$$

$P_n(\cos \theta)$  — полином Лежандра,  $P_{-1/2}(\cos \theta)$  — функция Лежандра,  $C$  — постоянная интегрирования, подлежащая определению.

Система (1.17) вполне регулярна при  $a > b$  и квазивполне регулярна при  $a > 0$  и  $N_k$ , имеющем порядок не ниже  $1/k$ , так как она аналогична системе, полученной в работе [3], где полностью исследована регулярность этой системы.

При этом получается

$$X_n = 0 \quad (n^{-1/2}) \quad a_{2n+1} = 0 \quad (n^{-1/2}) \quad (1.23)$$

Постоянная интегрирования  $C$  определится из условия конечности угла наклона  $\partial w / \partial y$  на линии  $x = 0$  вблизи концов трещины  $\varphi = \beta - 0$ .

Выделим главную часть ряда  $\sum_0^{\infty} a_{2k+1} \sin(k + 1/2) \varphi$ , входящего в выражение для  $\partial w / \partial y$  и приравняем нулю коэффициент при особенности у края трещины. Используя при этом сумму ряда

$$\sum_0^{\infty} P_k(\cos \varphi) \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \beta = \begin{cases} 0 & (0 \leq \beta < \varphi < \pi) \\ [2(\cos \varphi - \cos \beta)]^{-1/2} & (0 \leq \varphi < \beta \leq \pi) \end{cases} \quad (1.24)$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_0^{\infty} \alpha_{2k+1} \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi &= \sum_0^{\infty} \left( k + \frac{1}{2} \right) X_k \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi_1 = \\ &= \frac{\partial}{\partial \varphi} \sum_0^{\infty} \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi_1 \left[ \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} X_p + b_k \right] = \\ &= \cos \frac{\varphi_1}{2} \left[ \sum_0^{\infty} F_p + CP_{-1/2}(1) \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \varphi_1 \left[ \sum_0^{\infty} F_p \int_1^{\alpha} \frac{P'_p(x) dx}{x - \cos \varphi_1} + \right. \\ &\quad \left. + C \int_1^{\alpha} \frac{P'_{-1/2}(x) dx}{\sqrt{x - \cos \varphi_1}} \right] \quad (0 < \varphi < \beta) \quad (\beta_1 < \varphi_1 < \pi) \quad (1.25) \end{aligned}$$

где

$$F_p = \left( p + \frac{1}{2} \right) X_p N_p + \frac{(-1)^p C_p}{p + \frac{1}{2}} \quad (1.26)$$

$$\varphi_1 = \pi - \varphi \quad \alpha = \arccos \beta_1 \quad (1.27)$$

В выражении (1.25) учтено условие равенства нулю коэффициента при особенности, т. е.

$$\sum_0^{\infty} F_p P_p(\cos \beta_1) + CP_{-1/2}(\cos \beta_1) = 0 \quad (1.28)$$

Таким образом, задача сведена к решению вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений (1.17) совместно с уравнением (1.28).

Нетрудно показать, что уравнению (1.28) будет соответствовать увеличение порядка убывания коэффициентов  $\alpha_{2n+1}$  на одну единицу.

Выделим особенность решения у краев трещин для изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ .

Значения изгибающих моментов на линии  $x = 0$  определяются по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= \sum_0^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k^2} \left\{ \sigma + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k a} \left[ \frac{\lambda_k a}{2} (1 - \sigma) \operatorname{th} \lambda_k a - \sigma \right] \right\} \cos \lambda_k y + \\ &+ \frac{\pi(1 - \sigma)(3 + \sigma)}{4b} \sum_0^{\infty} \alpha_{2k+1} \left( k + \frac{1}{2} \right) (1 - N_k) \cos \lambda_k y \quad (1.29) \\ &\quad (0 < y < b) \end{aligned}$$

$$M_y = \sum_0^{\infty} \frac{a_k}{\lambda_k^2} \left\{ 1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k a} \left[ 1 + \frac{1-\sigma}{2} \lambda_k a \operatorname{th} \lambda_k a \right] \right\} \cos \lambda_k y -$$

$$- \frac{(1-\sigma)^2 \pi}{4b} \sum_0^{\infty} a_{2k+1} \left( k + \frac{1}{2} \right) (1 - L_k) \cos \lambda_k y \quad (0 < y < b) \quad (1.30)$$

где

$$L_k = \frac{1 + e^{-2\lambda_k a} - 2\lambda_k a}{2 \operatorname{ch}^2 \lambda_k a}$$

Последние ряды в выражениях (1.29) и (1.30) обращаются в бесконечность у края трещины  $y = (1-\nu)b - 0$ . Выделим главную часть этого ряда на участке  $(0, (1-\nu)b)$ . Пользуясь при этом значением суммы ряда (1.25), получим

$$\sum_0^{\infty} a_{2k+1} \left( k + \frac{1}{2} \right) \cos \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi = \sum_0^{\infty} \left( k + \frac{1}{2} \right)^2 X_k \sin \left( k + \frac{1}{2} \right) \varphi_1 =$$

$$= \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sqrt{\cos \beta_1 - \cos \varphi_1}} H + \Psi(\varphi_1) \quad (0 < \varphi < \beta) \quad (\beta_1 < \varphi_1 < \pi) \quad (1.31)$$

где

$$H = -\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sum_0^{\infty} F_p P_p'(\cos \beta_1) + C P_{-1/2}'(\cos \beta_1) \right] \quad (1.32)$$

а ограниченная и непрерывная функция  $\Psi(\varphi_1)$  определяется из выражения

$$\Psi(\varphi_1) = -2 \cos \varphi_1 \sqrt{\cos \beta_1 - \cos \varphi_1} H + \frac{1}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \left[ \sum_0^{\infty} F_p + C P_{-1/2}(1) \right] +$$

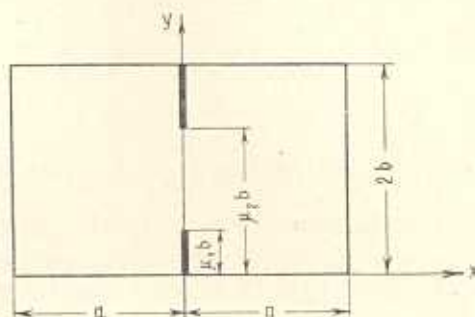
$$+ 2 \sin \frac{\varphi_1}{2} \left( 2 \cos^2 \frac{\varphi_1}{2} - \sin^2 \frac{\varphi_1}{2} \right) \left[ \sum_0^{\infty} F_p P_p'(1) + C P_{-1/2}'(1) \right] +$$

$$+ \frac{2 \cos \varphi_1}{\sqrt{2}} \left[ \sum_0^{\infty} F_p \int_0^{\pi} P_p^*(x) \sqrt{x - \cos \varphi_1} dx + C \int_0^{\pi} P_{-1/2}^*(x) \sqrt{x - \cos \varphi_1} dx + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin^2 \varphi_1}{\sqrt{2}} \left[ \sum_0^{\infty} F_p \int_0^{\pi} \frac{P_p^*(x) dx}{\sqrt{x - \cos \varphi_1}} + C \int_0^{\pi} \frac{P_{-1/2}^*(x) dx}{\sqrt{x - \cos \varphi_1}} \right] \right] \quad (1.33)$$

Таким образом, для изгибающих моментов у концов трещин получается интегрируемая особенность порядка  $(\cos \beta_1 - \cos \varphi_1)^{-1/2}$ .

2. Следует отметить, что рассмотренная выше задача решается также другим методом в более общей постановке. А именно, предполагается, что длины трещин, идущих от кромок пластинки, не равны, т. е. имеет место симметрия только относительно оси  $y$  (фиг. 2).



Фиг. 2.

Функция прогибов, удовлетворяющая уравнению (1.1), выбирается в виде

$$w = f(y) + \frac{1}{D} \sum_1^{\infty} [A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k x \operatorname{sh} \lambda_k x] \sin \lambda_k y \pm \frac{1}{D} \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_k}{4\lambda_k} [(1 + \sigma) \operatorname{sh} \lambda_k x + (1 - \sigma) \lambda_k x \operatorname{ch} \lambda_k x] \sin \lambda_k y \quad (2.1)$$

где частное решение  $f(y)$  имеет вид

$$f(y) = \frac{1}{D} \sum_1^{\infty} \frac{\alpha_k}{\lambda_k^4} \sin \lambda_k y \quad (2.2)$$

$\alpha_k$  — коэффициенты разложения распределенной нагрузки в ряд Фурье.

$$p = \sum_1^{\infty} \alpha_k \sin \lambda_k y \quad \alpha_k = \frac{1}{b} \int_0^{2b} p \sin \lambda_k y dy \quad (2.3)$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{2b} \quad k = 1, 2, 3, 4, \dots$$

Граничные условия будут

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad x = \pm a \quad (2.4)$$

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad y = 0 \quad \text{и} \quad y = 2b \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad x = 0 \quad \begin{array}{l} 0 < y < \nu_1 b \\ \nu_2 b < y < 2b \end{array} \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \sigma) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad x = 0 \quad \begin{array}{l} 0 < y < \nu_1 b \\ \nu_2 b < y < 2b \end{array} \quad (2.7)$$

Условия (2.5) и (2.7) удовлетворяются тождественно. Из уравнений (2.4) получаются значения  $A_k$  и  $B_k$  по формулам (1.10) и (1.11).

Удовлетворяя граничным условиям (2.6) и условию непрерывности угла наклона  $\partial w / \partial x$  на неразрезанной части линии  $x = 0$ , задачу сведем к решению следующих „трояных“ рядов-уравнений:

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \alpha_k k \sin k\varphi &= q(\varphi) & (0 < \varphi < \beta_1) \\ \sum_1^{\infty} \alpha_k \sin k\varphi &= 0 & (\beta_1 < \varphi < \beta_2) \\ \sum_1^{\infty} \alpha_k k \sin k\varphi &= q(\varphi) & (\beta_2 < \varphi < \pi) \end{aligned} \quad (2.8)$$

где приняты обозначения

$$\varphi = \frac{\pi y}{2b}, \quad \beta_1 = \frac{\nu_1 \pi}{2}, \quad \beta_2 = \frac{\nu_2 \pi}{2} \quad (2.9)$$

$$q(\varphi) = \sum_1^{\infty} L_k \sin k\varphi \quad (2.10)$$

$$L_k = U_k + \alpha_k k N_k \quad (2.11)$$

$$U_k = \frac{32b^3 \alpha_k}{\pi^2 (1 - \sigma) (3 + \sigma) k^2} \left\{ \sigma + \frac{1}{\operatorname{ch} \lambda_k a} \left[ (1 - \sigma) \frac{\pi a}{4b} k \operatorname{th} \lambda_k a - \sigma \right] \right\} \quad (2.12)$$

$N_k$  определяется по формуле (1.14).

Система (2.8) решается методом, указанным Баблюном А. А. и Мхитаряном С. М.\*

Принимая

$$\sum_1^{\infty} \alpha_k k \sin k\varphi = \Phi(\varphi) \quad \text{при} \quad \beta_1 < \varphi < \beta_2 \quad (2.13)$$

\* Баблюн А. А., Мхитарян С. М. „К решению некоторых трояных уравнений с тригонометрическими функциями“. Работа доложена на семинаре института математики и механики АН Арм.ССР.



для определения коэффициентов  $\alpha_k$  получим следующее уравнение:

$$\alpha_k = \frac{2}{\pi k} \left[ \int_{\beta_1}^{\beta_2} \Phi(s) \sin ks ds + \int_0^{\beta_1} q(s) \sin ks ds + \int_{\beta_3}^{\pi} q(s) \sin ks ds \right] \quad (2.14)$$

Подставив значение  $\alpha_k$  из (2.14) во второе уравнение системы (2.8), получим уравнение для определения  $\Phi(s)$

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} \Phi(s) \sum_1^{\infty} \frac{\sin ks \sin k\varphi}{k} ds + \int_0^{\beta_1} q(s) \sum_1^{\infty} \frac{\sin ks \sin k\varphi}{k} ds + \int_{\beta_3}^{\pi} q(s) \sum_1^{\infty} \frac{\sin ks \sin k\varphi}{k} ds = 0 \quad (2.15)$$

Используя сумму ряда

$$\sum_1^{\infty} \frac{\sin ks \sin k\varphi}{k} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} + \operatorname{tg} \frac{s}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} - \operatorname{tg} \frac{s}{2}} \right|$$

уравнение (2.15) приведем к виду

$$\int_b^a \ln \left| \frac{u+v}{u-v} \right| \Phi_1(v) dv = f_1(u) \quad (2.16)$$

где приняты обозначения

$$\Phi_1(v) = \frac{2\Phi(2 \operatorname{arctg} v)}{1+v^2} \quad f_1(u) = f(2 \operatorname{arctg} u) \quad (2.17)$$

$$b = \operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2} \quad a = \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}$$

Уравнение (2.16) решается методом М. Г. Крейна [9]. При этом решение получается в виде

$$\Phi_1(t) = \left[ \frac{1}{M'(x)} \frac{d}{dx} \int_b^x g(v, x) f_1(v) dv \right]_{x=a} g(t, a) - \int_t^a g(t, x) \frac{d}{dx} \left[ \frac{1}{M'(x)} \frac{d}{dx} \int_b^x g(v, x) f_1(v) dv \right] dx \quad (2.18)$$

где  $g(v, x)$  является решением уравнения

$$\int_b^x \ln \left| \frac{u+v}{u-v} \right| g(v, x) dv = 1 \quad (b \leq x \leq a) \quad (2.19)$$

и имеет вид

$$g(v, x) = \frac{1}{\pi J_0(x, b) \sqrt{(x^2 - v^2)(v^2 - b^2)}} \quad (2.20)$$

$$J_0(x, b) = \frac{1}{x} K(k_1) \quad k_1 = \frac{b}{x} \quad (2.21)$$

$K(k_1)$  — полный эллиптический интеграл I рода.

Это решение в неявном виде дается в работе Штаермана И. Я. [10]

$$M'(x) = \frac{d}{dx} \int_b^x g(v, x) dv = \frac{x}{2(x^2 - b^2) K^2(k_1)} \quad (2.22)$$

Подставив значения (2.20) и (2.22) в (2.18) и перейдя к прежним переменным, получим

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) = & \frac{\cos \frac{\beta_2}{2} \cos \frac{\beta_1}{2}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \beta_2} \sqrt{\cos \beta_1 - \cos \varphi}} \sum_1^{\infty} L_p Q_p - \\ & - \frac{2 \cos \frac{\beta_1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\cos \varphi - \cos \beta_2}}{\pi \sqrt{2} (\cos \beta_1 - \cos \varphi)} \times \\ & \times \sum_1^{\infty} L_p \left[ \int_0^{\beta_1} \frac{\sin s \sqrt{\cos s - \cos \beta_1} \sin ps}{(\cos s - \cos \varphi) \sqrt{\cos s - \cos \beta_2}} ds - \right. \\ & \left. - \int_{\beta_2}^{\pi} \frac{\sin s \sqrt{\cos \beta_1 - \cos s} \sin ps}{(\cos \varphi - \cos s) \sqrt{\cos \beta_2 - \cos s}} ds \right] \quad (2.23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_p = & - \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}}{\pi K(k)} \left\{ \int_0^{\beta_2} [K(k) E(\zeta, k) - F(\zeta, k) E(k)] \sin ps ds + \right. \\ & \left. + \int_{\beta_2}^{\pi} [K(k) E(\nu, k) - F(\nu, k) E(k)] \sin ps ds \right\} \quad (2.24) \end{aligned}$$

$$k = \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}}, \quad \zeta = \arcsin \frac{\operatorname{tg} \frac{\beta_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\beta_1}{2}} \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{\beta_2}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{s}{2}}}$$

$$\mu = \arcsin \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \frac{s}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_2}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{s}{2} - \operatorname{tg}^2 \frac{\beta_1}{2}}}$$

$E(k)$  — полный эллиптический интеграл II рода,  $F(\mu, k)$  и  $E(\mu, k)$  — неполные эллиптические интегралы I и II рода.

Подставив значение  $\Phi(\varphi)$  из (2.23) в (2.14), получим для определения неизвестных коэффициентов  $a_k$  следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$a_k = \sum_{p=1}^{\infty} a_{kp} a_p + b_k \quad (2.25)$$

здесь

$$a_{kp} = p N_p I_{kp} \quad (2.26)$$

$$b_k = \sum_1^{\infty} U_p I_{kp} \quad (2.27)$$

$$I_{kp} = \frac{2}{\pi k} \left\{ Q_p \cos \frac{\beta_2}{2} \cos \frac{\beta_1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sin k\varphi d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \beta_2} \sqrt{\cos \beta_1 - \cos \varphi}} \right.$$

$$- \frac{2}{\pi \sqrt{2}} \cos \frac{\beta_1}{2} \int_{\beta_1}^{\beta_2} \frac{\sin k\varphi \cos \frac{\varphi}{2} \sqrt{\cos \varphi - \cos \beta_2}}{(\cos \beta_1 - \cos \varphi)} \times$$

$$\times \left[ \int_0^{\beta_1} \frac{\sin s \sqrt{\cos s - \cos \beta_1} \sin ps}{(\cos s - \cos \varphi) \sqrt{\cos s - \cos \beta_2}} ds - \right.$$

$$\left. - \int_{\beta_1}^{\pi} \frac{\sin s \sqrt{\cos \beta_1 - \cos s} \sin ps}{(\cos \varphi - \cos s) \sqrt{\cos \beta_2 - \cos s}} ds \right] d\varphi +$$

$$\left. \int_0^{\beta_1} \sin p\varphi \sin k\varphi d\varphi + \int_{\beta_2}^{\pi} \sin p\varphi \sin k\varphi d\varphi \right\} \quad (2.28)$$

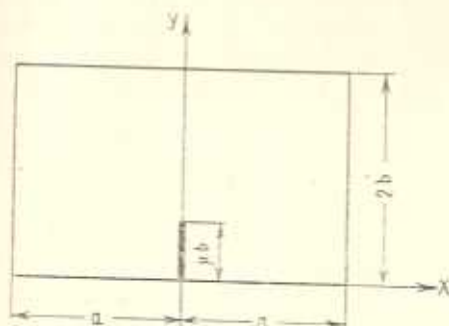
Благодаря тому, что  $N_p$  убывает по экспоненциальному закону и имеет место оценка  $I_{k_p} = 0 \left( \frac{1}{k} \right)$ , нетрудно доказать, что система (2.25) квазиполне регулярна, т. е. начиная с некоторого номера  $k_0$

$$S_k = \sum_1^{\infty} |a_{k_p}| < 1 \quad \text{для } k > k_0 \quad (2.29)$$

Однако, следует отметить, что полученные результаты представляют некоторую трудность для численных расчетов ввиду того, что и выражения для коэффициентов бесконечной системы входят двойные интегралы.

Поэтому числовые расчеты, приведенные ниже, произведены для частного случая, когда длины трещин равны, по формулам, полученным в предыдущем параграфе.

3. Рассмотрим второй случай изгиба пластинки, когда трещина длиной  $\mu b$  ( $0 < \mu < 2$ ) направлена от кромки вдоль оси симметрии  $y$  пластинки (фиг. 3).



Фиг. 3.

Функция прогибов  $w$  определится по формуле (2.1). Граничные условия будут

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad y = 2b \quad (3.1)$$

$$w = 0 \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при } x = \pm a \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad 0 < y < \mu b \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad 0 < y < \mu b \quad (3.4)$$

а также получается условие непрерывности угла наклона  $\partial w / \partial x$  на неразрезанной части линии  $x = 0$

$$\sum_1^{\infty} x_k \sin \lambda_k y = 0 \quad \text{при } b < y < 2b \quad (3.5)$$

Уравнения (3.1) и (3.4) удовлетворяются тождественно.  $A_k$  и  $B_k$  определяются из условия (3.2) по формулам (1.10) и (1.11).

Из уравнений (3.3) и (3.5) для определения коэффициентов  $x_k$  получаются следующие парные ряды-уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} k x_k (1 - N_k) \sin k\varphi &= \sum_1^{\infty} U_k \sin k\varphi & (0 < \varphi < \beta) \\ \sum_1^{\infty} x_k \sin k\varphi &= 0 & (\beta < \varphi < \pi) \end{aligned} \quad (3.6)$$

где

$$\varphi = \frac{\pi y}{2b}, \quad \beta = \frac{\pi\pi}{2} \quad (3.7)$$

$N_k$  определяется формулой (1.14), а  $U_k$  — формулой (2.12). Пользуясь методом, разработанным в работе [11], приведем решение системы (3.6) к следующей бесконечной системе линейных алгебраических уравнений:

$$x_n = \sum_1^{\infty} a_{kn} x_k + b_n \quad (3.8)$$

где

$$a_{kn} = \frac{1}{2} k N_k J_{kn} \quad (3.9)$$

$$b_n = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} U_k J_{kn} \quad (3.10)$$

$$J_{kn} = \int_0^{\beta} Z_k(\cos \theta) Z_n(\cos \theta) \operatorname{ctg} \theta/2 d\theta \quad (3.11)$$

$$Z_n(\cos \theta) = P_{n-1}(\cos \theta) + P_n(\cos \theta)$$

$P_n(\cos \theta)$  — полином Лежандра.

Исследуем систему (3.8).

В работе [12] показано, что при  $N_k$ , имеющем порядок убывания не ниже, чем  $1/k$ ,  $S_n = \sum_1^{\infty} |a_{kn}|$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$  и, начиная с некоторого номера  $n_0$ ,

$$S_n < 1 \quad \text{при } n \geq n_0 \quad (3.12)$$

Следовательно, система (3.8) квазивполне регулярна.

Можно также показать, что при  $a \geq b$  система (3.8) вполне регулярна.

Для этого, используя оценку  $|J_{kn}| \leq \frac{2}{n}$  и учитывая (1.14), оценим сумму модулей коэффициентов бесконечной системы

$$S_n = \sum_1^{\infty} |a_{kn}| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{k |1 + e^{-k\pi} - k\pi(1-\sigma)/(3+\sigma)|}{\text{ch}^2 \frac{k\pi}{2}} \quad (3.13)$$

Наибольшее значение в правой части (3.13) получится при  $\sigma = 0.5$  и  $n = 1$  и будет равно 0.1.

Следовательно, имеем

$$S_n \leq 0,1 \quad \text{для } n \geq 1 \quad (3.14)$$

т. е. система (3.8) вполне регулярна при  $a \geq b$ .

Оценим свободные члены  $b_n$  системы (3.8). В том случае, когда на пластинку действует непрерывно распределенная нагрузка, коэффициенты  $U_k$ , согласно (2.12), будут иметь порядок  $1/k^3$ . Следовательно, свободные члены  $b_n$  имеют тот же порядок убывания, что и члены ряда (3.10).

Для  $J_{kn}$  из работы [12] будем иметь оценку  $J_{kn} = O(n^{-3/2})$ , откуда следует, что свободные члены  $b_n$  системы (3.8) ограничены сверху и при  $n \rightarrow \infty$  стремятся к нулю, как

$$b_n = O(n^{-3/2}) \quad (3.15)$$

Путем последовательных приближений можно показать, что неизвестные коэффициенты  $a_n$  будут иметь тот же порядок, что и свободные члены системы (3.8), т. е.

$$a_n = O(n^{-3/2}) \quad (3.16)$$

Аналогично первому случаю изгиба пластинки, выделение особенностей для изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$  у края трещины сводится к отделению главной части ряда  $\sum_1^{\infty} \alpha_k k \sin k\varphi$  на участке  $(\beta < \varphi < \pi)$ . Подставив сюда значение  $\alpha_k$  из (3.8) и используя из [11] соотношение

$$dY_k(x) = \frac{k}{1-x} Z_k(x) dx \quad (3.17)$$

и сумму ряда

$$\sum_1^{\infty} Y_k(\cos \theta) \sin kx = \begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} (\cos \theta - \cos x)^{-1/2} & (x > \theta) \\ 0 & (x < \theta) \end{cases} \quad (3.18)$$

получим

$$\sum_1^{\infty} a_k k \sin k\varphi = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} k \sin k\varphi \sum_{p=1}^{\infty} [pN_{p^2} + U_p] \int_0^{\beta} Z_k(\cos \theta) \times \\ \times Z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \cos \varphi}} G + f(\varphi) \quad (\beta < \varphi < \pi) \quad (3.19)$$

где

$$G = -\frac{\sqrt{2}}{2} \left[ \sum_1^{\infty} pN_{p^2} Z_p(\cos \beta) + \sum_1^{\infty} U_p Z_p(\cos \beta) \right] \quad (3.20)$$

а ограниченная и непрерывная функция  $f(\varphi)$  имеет вид

$$f(\varphi) = \frac{\sqrt{2}}{2} \sin \frac{\varphi}{2} \left[ \sum_1^{\infty} pN_{p^2} \int_1^{\alpha} \frac{Z_p'(x) dx}{\sqrt{x - \cos \varphi}} + \right. \\ \left. + \sum_1^{\infty} U_p \int_1^{\alpha} \frac{Z_p'(x) dx}{\sqrt{x - \cos \varphi}} \right] \\ \alpha = \arccos \beta \quad (3.21)$$

4. В качестве примеров рассматриваются квадратная пластинка ( $a = b$ ) и бесконечная пластинка ( $a = \infty$ ) для обоих случаев расположения трещин. В первом случае принимается, что длины трещин равны и  $\mu = \frac{1}{2}$ , во втором случае  $\mu = 1$ . Таким образом, общая длина трещин в рассматриваемых примерах одинакова и равна половине ширины пластинки. Далее принимается  $\nu = \text{const}$  и  $\tau = 0.25$ .

В первом случае изгиба пластинки по формулам (1.6) и (1.8) получаем

$$a_k = \frac{4p(-1)^k}{\pi(2k+1)} \quad (4.1)$$

$$f(y) = \frac{p}{24D} [y^3 - 6y^2b^2 + 5b^4] \quad (4.2)$$

Из системы уравнений (1.17) и уравнения (1.28) определяем значения коэффициентов  $a_{2k+1}$  и постоянной  $C$ . Здесь вычислены десять значений коэффициентов  $a_{2k+1}$ , которые приведены в табл. 1.

По формулам (1.7), (1.29), (1.30) вычислены значения прогибов  $w$  и изгибающих моментов  $M_x$ ,  $M_y$  на линии  $x = 0$ .

Таблица 1

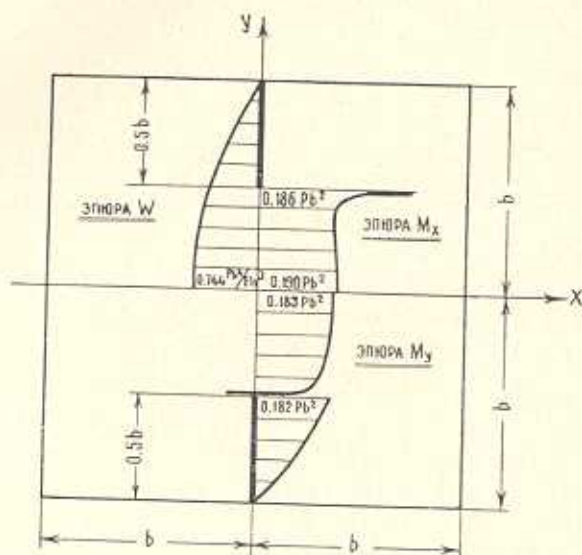
$k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\alpha_{2k+1}/pb^3$	-0,009	0,019321	-0,009714	-0,001735	0,003897	0,000562	-0,002261	-0,000252	0,001508	0,000141
$C/pb^3$	0,16712									
$\alpha_{2k+1}/pb^3$	-0,006261	0,012169	-0,006798	-0,001119	0,002689	0,000385	-0,001564	-0,00017	0,001042	0,000096
$C/pb^3$	0,114097									

Таблица 2

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha_k/pb^3$	-0,049874	-0,050219	-0,013191	0,011808	0,006027	-0,006135	-0,003861	0,003794	0,002672	-0,002677
$\alpha_k/pb^3$	-0,033978	-0,034289	-0,009162	0,007886	0,004051	-0,004162	-0,002626	0,00256	0,001807	-0,001812



Построены эпюры прогибов и изгибающих моментов на линии  $x = 0$  для квадратной пластинки (фиг. 4) и бесконечной пластинки (фиг. 5).

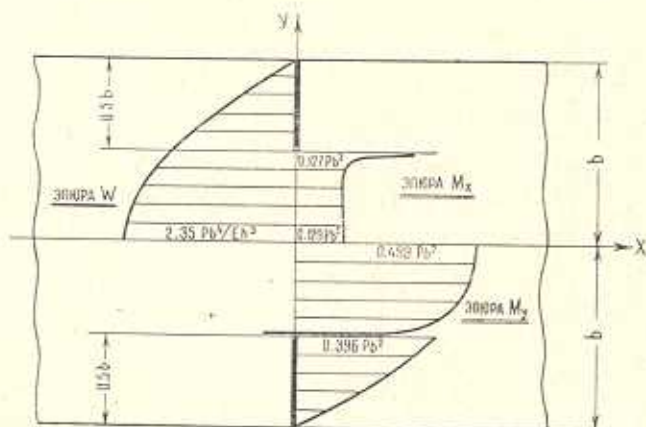


Фиг. 4.

Во втором случае получаем

$$a_{2k} = 0 \quad a_{2k+1} = \frac{4p}{\pi(2k+1)} \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (4.3)$$

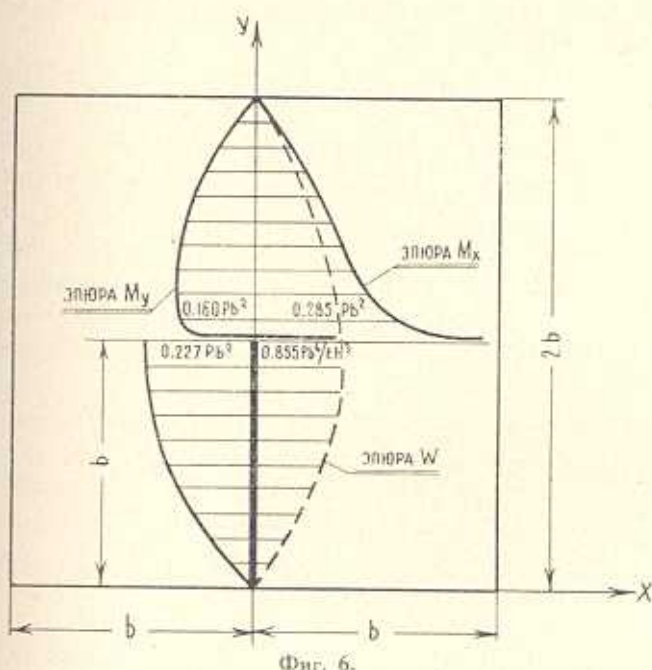
$$f(y) = \frac{p}{24D} y [y^3 - 4by^2 + 8b^2] \quad (4.4)$$



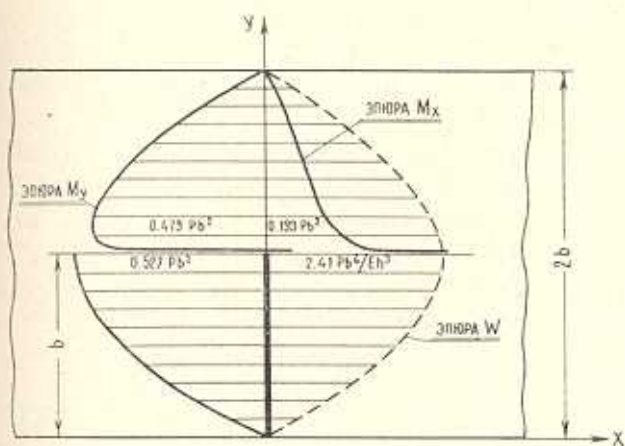
Фиг. 5.

Определены десять значений коэффициентов  $\alpha_k$  из системы (3.8) (табл. 2). Вычислены значения прогибов и изгибающих моментов на

линии  $x=0$  и построены эпюры для квадратной пластинки (фиг. 6) и бесконечной пластинки (фиг. 7).



Сравним значения, наибольших прогибов и изгибающих моментов для первого и второго случая изгиба пластинки, а также для случая, рассмотренного в работе [3], когда трещина симметрична относительно осей симметрии и равна половине ширины пластинки.



Из эпюр для первого случая изгиба пластинки имеем: для квадратной пластинки (фиг. 4)

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \ y=0 \quad w_{\max} &= 0.744 pb^4/Eh^3 & M_{y\max} &= 0.183 pb^2 & M_{x\max} &= 0.19 pb^2 \\ \text{при } x=0 \ y=0.4b \quad M_x &= 0.186 pb^2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

для бесконечной пластинки (фиг. 5)

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \ y=0 \quad w_{\max} &= 2.35 pb^4/Eh^3 & M_{y\max} &= 0.499 pb^2 & M_{x\max} &= 0.129 pb^2 \\ \text{при } x=0 \ y=0.4b \quad M_x &= 0.127 pb^2 \end{aligned} \quad (4.6)$$

Для второго случая изгиба пластинки имеем:  
для квадратной пластинки (фиг. 6)

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \ y=0 \quad w_{\max} &= 0.855 pb^4/Eh^3 & M_{y\max} &= 0.227 pb^2 \\ \text{при } x=0 \ y=0.1b \quad M_{x\max} &= 0.285 pb^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

для бесконечной пластинки (фиг. 7)

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \ y=0 \quad w_{\max} &= 2.41 pb^4/Eh^3 & M_{y\max} &= 0.527 pb^2 \\ \text{при } x=0 \ y=0.1b \quad M_{x\max} &= 0.193 pb^2 \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из работы [3] имеем:

для квадратной пластинки

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \ y=0 \quad w_{\max} &= 0.999 pb^4/Eh^3 & M_{y\max} &= 0.231 pb^2 \\ \text{при } x=0 \ y=0.6b \quad M_{x\max} &= 0.234 pb^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

для бесконечной пластинки

$$\begin{aligned} \text{при } x=0 \ y=0 \quad w_{\max} &= 2.879 pb^4/Eh^3 & M_{y\max} &= 0.529 pb^2 \\ \text{при } x=0 \ y=0.6b \quad M_{x\max} &= 0.159 pb^2 \end{aligned}$$

Сравнивая значения (4.5), (4.6), (4.7), (4.8) и (4.9), замечаем, что наибольшие прогиб и изгибающий момент  $M_y$  получаются для случая, когда трещина симметрична относительно осей симметрии прямоугольника. Наименьшие же прогиб и изгибающий момент  $M_y$  имеем для первого случая изгиба пластинки.

Наибольшее значение изгибающего момента  $M_x$  на расстоянии  $0.1b$  от края трещины получается для второго случая изгиба пластинки, а наименьшее — для первого случая изгиба пластинки.

Числовые расчеты произведены на ЭЦВМ „Наири“.

Է. Վ. ԹԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՀԱՔԵՐՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱՂԵՐԻ ՄՌՈՒՄԸ

Ա մ փ ո փ ու ռ մ

Աշխատանքում արվում է ճաքեր ունեցող և կզրագծով ազատ նենված, աղղանկյուն սալի ծածան խնդրի լուծումը նետակալ երկու զեպքերի համար. ա) երբ սալն ունի եզրերից կեղզ երկու ճաքեր, որոնք սիմետրիկ են աղղանկյան սիմետրիալի առանցքների նկատմամբ (զիտվում է նաև անհամասար երկարության ճաքերի զեպքը):

բ) երբ սալն ունի, իր սիմետրիալի առանցքով կեղզ, միայն մեկ ճաք: Խնդրի լուծման ժամանակ օգտագործված է լրացուցիչ աղղեցությանների կզանակը:

Խնդիրը բերվում է «զուլդ շարքերի» լուծմանը, որոնց անհայտ գործակիցները որոշվում են լրիվ սեզուլլար հանրահաշվական դժային հավասարումների անվերջ սխառնից:

Անհամասար երկարության ճաքերի զեպքում ստացվում են «եռակի շարքեր», որոնք բերվում են քվադրիտիկ սեզուլլար անվերջ սխառնի: Կատարված է ճաքերի ծայրերին մոտ կետերում լուծման կզակության անջատում:

Բերված են մասնավոր զեպքերի համար թվային օրինակներ:

E. V. BELUBEKIAN

BENDING OF RECTANGULAR PLATES WITH SYMMETRICAL CRACKS

S u m m a r y

The solution of the problem of bending of rectangular plates freely supported along the contour in two cases of disposition of cracks is given.

In the first case the plate with two cracks located symmetrically in relation to the symmetry axis of the plate is considered.

In the second case the plate with a crack on a symmetry axis of the plate is considered.

The method of supplementary actions is used.

The problem is brought to a solution of dual series-equations which in its turn is reduced to a quite regular infinite system of linear equations.

Numerical examples are given.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сапонджян О. М. Некоторые задачи теории изгиба тонких плит. Докторская диссертация, 1949. См. также: Сапонджян О. М., ПММ, т. 13, в. 5, 1949.
2. Сапонджян О. М. Об одном случае изгиба тонкой прямоугольной плиты. Докл. АН Арм. ССР, т. 37, № 3, 1963.
3. Белубекян Э. В. Изгиб свободно опертой по контуру прямоугольной пластинки с симметричным разрезом. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XXI, № 2, 1968.
4. Williams M. L. The bending stress distribution at the base of a stationary crack. J. Appl. Mech., vol. 28, No. 1, 1961.
5. Си, Парис, Эрдоган. Коэффициенты интенсивности напряжений в задачах растяжения и изгиба пластин. Прикл. механика, т. 84, серия E, № 2, 1962, ИЛ.
6. Knowles J. K., Wang N. M. On the bending of an elastic plate containing a crack. J. Math. and Phys., vol. 39, No. 4, 1960.
7. Си, Райс. Изгиб неоднородных пластин с трещинами. Прикл. механика, т. 31, серия E, № 3, 1964, ИЛ.
8. Баблюкян А. А. Решение некоторых „парных“ рядов. Докл. АН АрмССР, т. 39, № 3, 1964.
9. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения. Изд. „Наука“, М., 1967.
10. Штасерман И. Я. Контактные задачи теории упругости. Гостехтеориздат, М.-Л., 1949.
11. Баблюкян А. А. Решение некоторых парных уравнений. ПММ, вып. 2, т. 31, 1967.
12. Баблюкян А. А., Саакян В. Г. Решение смешанной задачи теории упругости для кругового кольца. Изв. АН АрмССР, Механика, т. XX, № 5, 1967.
13. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеориздат, Л.-М., 1952.