ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 4, 1969 Механика

Дж. Э. МКРТЧЯН

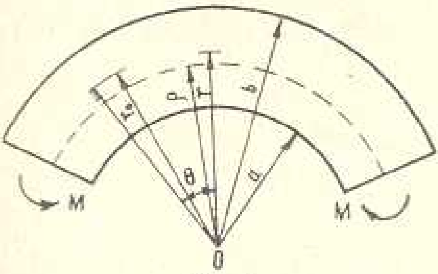
# ЧИСТЫЙ ИЗГИБ КРУГОВОГО СТЕРЖНЯ, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Рассматривается напряженно-деформированное состояние кругового кольцевого стержня, изготовленного из разномодульного материала, изгибаемого парами сил, приложенными к торцевым сечениям.

В работе приводится решение поставленной задачи методами теории упругости, а также приводится решение этой же задачи с принятием гипотезы плоских сечений и с пренебрежением радиальными напряжениями.

Сравнение результатов показывает, что расхождение величин напряжений $\sigma_\theta$, вычисленных по обоим методам, незначительно.

1. Рассмотрим чистый изгиб кривого стержня, представляющего собой часть кругового кольца, под действием сил, приложенных к концевым сечениям и приведенных к парам (фиг. 1).




Фиг. 1.

Стержень изготовлен из разномодульного материала, характеризующегося упругими постоянными $E^+$, $\nu^+$ (при растяжении) и $E^-$, $\nu^-$ (при сжатии).

Предполагается, что в сечениях, параллельных плоскости кольца, напряжения отсутствуют, т. е. имеем случай обобщенного плоского напряженного состояния.

Очевидно, что в рассматриваемой задаче, как и в случае обычного изотропного (одномодульного) материала, касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ отсутствует, а нормальные напряжения $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$ не зависят от полярного угла $\theta$ и являются функциями только от координаты $r$.

Заметим, что в рассматриваемом случае изгиба стержня на внутренней части $\sigma_\theta < 0$, на внешней части $\sigma_\theta > 0$. Поэтому естественно, что на некоторой, пока неизвестной, дуге окружности ($r = \rho$) напряжение $\sigma_\theta$ обращается в нуль.

Как и в случае обычного изотропного материала [4], рассматривая равновесие отдельных элементов стержня, нетрудно убедиться, что в данном случае во всех точках стержня напряжение $\sigma_r$ отрицательно.

В силу сказанного, стержень дугой окружности $r = \rho$ разделится на две части. Первая часть $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ является областью первого рода, так как для всех точек этой области $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta \leqslant 0$. Вторая часть $(\rho < r \leqslant b)$ является областью второго рода, так как для нее $\sigma_r \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Для решения поставленной задачи необходимо рассмотреть каждую часть стержня в отдельности.

Как известно, для обычного изотропного материала (для областей первого рода) решение плоской задачи приводится к определению функции напряжений $\varphi$, удовлетворяющей уравнению

$$\Delta\Delta\varphi = 0 \tag{1.1}$$

и соответствующим контурным условиям.

Общее решение этого уравнения при условии, что напряженное состояние рассматриваемого тела полярно-симметричное, имеет вид:

$$\varphi = A_1 \ln r + B_1 r^2 \ln r + C_1 r^2 \tag{1.2}$$

Можно показать, что для областей второго рода, в случае полярно-симметричного напряженного состояния, уравнение относительно функции напряжений $\varphi$ [2] примет следующий вид:

$$\Delta\Delta\varphi + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11}} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right) = 0 \tag{1.3}$$

где

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E^-} \quad \text{при} \quad \sigma_r < 0, \quad \sigma_\theta > 0 \tag{1.4}$$

или

$$a_{11} = \frac{1}{E^-}, \qquad a_{22} = \frac{1}{E^+} \quad \text{при} \quad \sigma_r > 0, \quad \sigma_\theta < 0 \tag{1.5}$$

Общий интеграл уравнения (1.3) для всех возможных случаев (1.4) и (1.5) будет

$$\varphi = A_2 r^2 + B_2 r^{1+\alpha} + C_2 r^{1-\alpha}, \qquad \alpha = \sqrt{\frac{a_{22}}{a_{11}}} \tag{1.6}$$

Входящие в выражения (1.2) и (1.6) постоянные интегрирования $A_i$, $B_i$, $C_i$ определяются из контурных условий задачи и из условий непрерывности напряжений и перемещений на границах раздела областей первого и второго родов.

Для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ имеем функцию напряжений (1.2) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = 0, \qquad \text{при } r = \rho \quad \sigma_\theta = 0 \tag{1.7}$$

Для второй части имеем функцию напряжений (1.6) и следующие контурные условия:

$$\text{при } r=\rho \quad \sigma_\theta=0, \qquad \text{при } r=b \quad \sigma_r=0 \tag{1.8}$$

На границе раздела двух областей $(r=\rho)$ имеем условия непрерывности напряжения $\sigma_r$ и перемещений $u$, $v$

$$\sigma_r\big|_{r=\rho-0}=\sigma_r\big|_{r=\rho+0}, \quad u\big|_{r=\rho-0}=u\big|_{r=\rho+0}, \quad v\big|_{r=\rho-0}=v\big|_{r=\rho+0} \tag{1.9}$$

На торцевых сечениях контурным условиям удовлетворяем по принципу Сен-Венана

$$\int_a^\rho \sigma_\theta dr+\int_\rho^b \sigma_\theta dr=0, \qquad \int_a^\rho r\sigma_\theta dr+\int_\rho^b r\sigma_\theta dr=M \tag{1.10}$$

Аналогично классическому решению [3] нетрудно доказать, что первое условие (1.10) равносильно первому условию (1.9).

Напряжения $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$ выражаются через функцию напряжений $\varphi$ известными соотношениями

$$\sigma_r=\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}, \qquad \sigma_\theta=\frac{d^2\varphi}{dr^2} \tag{1.11}$$

Используя (1.11) и удовлетворяя контурным условиям (1.7), (1.8) и (1.10), для неизвестных коэффициентов, фигурирующих в (1.1) и (1.6), получим

$$A_1=\frac{4MN}{K}(\alpha+1)a^2\rho^2\left(1+\ln\frac{\rho}{a}\right)$$

$$B_1=\frac{2MN}{K}(\alpha+1)(a^2+\rho^2)$$

$$C_1=-\frac{M}{K}N(\alpha+1)(a^2+3\rho^2+2a^2\ln a+2\rho^2\ln\rho) \tag{1.12}$$

$$A_2=-\frac{2\alpha MH}{K(\alpha-1)}(\alpha+1)(b^{2\alpha}+\rho^{2\alpha})$$

$$B_2=\frac{4MH}{K(\alpha-1)}(\rho^{\alpha+1}+\alpha b^{\alpha+1})$$

$$C_2=\frac{4MH}{K(\alpha-1)^2}(\alpha+1)(b^{2\alpha}\rho^{\alpha+1}-\alpha\rho^{2\alpha}b^{\alpha+1})$$

где

$$N=\frac{1}{\alpha-1}\left[(\alpha+1)b^{2\alpha}-2\alpha b^{\alpha+1}\rho^{\alpha-1}+(\alpha-1)\rho^{2\alpha}\right]$$

$$H = \rho^2 - a^2 - 2a^2 \ln \frac{\rho}{a}$$

$$K = 2\alpha H \left| (b^{\alpha+1} - \rho^{\alpha+1})^2 + \left(\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\right)^2 (\rho b^{\alpha} - b\rho^{\alpha})^2 \right| - \tag{1.13}$$

$$- (1+\alpha) N \left| 4a^2\rho^2 \left( \ln \frac{\rho}{a} \right)^2 + (\rho^2 - a^2)^2 \right|$$

Напряжения $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$ для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ будут

$$\sigma_r = -\frac{4MN(\alpha+1)}{Kr^2} \left| \rho^2 \left( r^2 \ln \frac{\rho}{r} - a^2 \ln \frac{\rho}{a} \right) - a^2 r^2 \ln \frac{r}{a} + \rho^2 (r^2 - a^2) \right|$$

$$\sigma_\theta = -\frac{4MN}{Kr^2} (\alpha+1) \left| a^2 \left( \rho^2 \ln \frac{\rho}{a} - r^2 \ln \frac{r}{a} \right) + \rho^2 r^2 \ln \frac{\rho}{r} + a^2 (\rho^2 - r^2) \right| \tag{1.14}$$

Для второй части $(\rho < r \leqslant b)$ напряжения $\sigma_r$ и $\sigma_\theta$ определяются по формулам:

$$\sigma_r = -\frac{4MH(\alpha+1)}{K(\alpha-1)\, r^{\alpha+1}} [\alpha b^{\alpha+1} r^{\alpha+1} (b^{\alpha-1} - r^{\alpha-1}) - \alpha\rho^{2\alpha} (b^{\alpha+1} - r^{\alpha+1}) +$$

$$+ \rho^{\alpha+1} (b^{2\alpha} - r^{2\alpha})]$$

$$\sigma_\theta = \frac{4MH\alpha(\alpha+1)}{K(\alpha-1)\, r^{\alpha+1}} [\alpha b^{\alpha+1} (r^{2\alpha} - \rho^{2\alpha}) - b^{2\alpha} (r^{\alpha+1} - \rho^{\alpha+1}) +$$

$$+ \rho^{\alpha+1} r^{\alpha+1} (r^{\alpha-1} - \rho^{\alpha-1})] \tag{1.15}$$

Для каждой части стержня закон упругости в главных направлениях $r$ и $\theta$ будет:

для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^-} (\sigma_r - \nu^- \sigma_\theta), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^-} (\sigma_\theta - \nu^- \sigma_r) \tag{1.16}$$

для второй части $(\rho < r \leqslant b)$

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^-} (\sigma_r - \nu^- \sigma_\theta), \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+} (\sigma_\theta - \nu^+ \sigma_r) \tag{1.17}$$

Приводим также чисто геометрические соотношения, которые, как известно [1, 2], одинаковы для областей первого и второго родов

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \gamma = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = 0 \tag{1.18}$$

Интегрируя уравнения (1.18), с учетом соотношений (1.16), (1.11), (1.2) и (1.6), определим перемещения:

для первой области ($a \leqslant r \leqslant \rho$) получим

$$u_1 = \frac{1}{E^-}\left[-\frac{(1+\nu^-)}{r}A_1 + 2(1-\nu^-)B_1 r\ln r - B_1(1+\nu^-)r + \right.$$

$$\left. + 2C_1(1-\nu^-)r\right] + D_1\sin\theta + F_1\cos\theta \tag{1.19}$$

$$v_1 = \frac{4B_1 r\theta}{E^-} + L_1 r + D_1\cos\theta + F_1\sin\theta$$

для второй области ($\rho < r \leqslant b$) получим

$$u_2 = \frac{1}{\alpha E^-}[2\alpha(1-\nu^-)rA_2 + (1+\alpha)(1-\alpha\nu^-)B_2 r^{\alpha} +$$

$$+ (\alpha-1)(1+\alpha\nu^-)C_2 r^{-\alpha}] + D_2\sin\theta + F_2\cos\theta \tag{1.20}$$

$$v_2 = \frac{2A_2(1-\alpha^2)}{E^+}r\theta + L_2 r + D_2\cos\theta - F_2\sin\theta$$

где $A_i$, $B_i$, $C_i$ определяются по формулам (1.12), а $D_i$, $F_i$, $L_i$ — постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления стержня как жесткого тела.

Закрепим точку с координатами $r = r_0$, $\theta = 0$ и элемент радиуса, проходящего через эту точку.

При этом соответствующие условия закрепления стержня будут:

$$\text{при } \theta = 0, \quad r = r_0 \qquad u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \tag{1.21}$$

Эта точка закрепления может оказаться или в первой области, или во второй. Предполагая, что точка закрепления находится в первой области ($a \leqslant r_0 \leqslant \rho$), из условий (1.21) получим

$$L_1 = 0, \quad D_1 = 0$$

$$F_1 E^- = \frac{(1+\nu^-)}{r_0}A_1 - 2(1-\nu^-)B_1 r_0\ln r_0 + B_1(1+\nu^-)r_0 -$$

$$-2C_1(1-\nu^-)r_0 \tag{1.22}$$

Если точка закрепления находится во второй области ($\rho \leqslant r_0 \leqslant b$) то условие (1.21) даст

$$L_2 = 0, \quad D_2 = 0$$

$$\alpha F_2 E^- = -2\alpha(1-\nu^-)A_2 r_0 + (1+\alpha)(\alpha\nu^- - 1)B_2 r_0^{\alpha} +$$

$$+ (1-\alpha)(1+\alpha\nu^-)C_2 r_0^{-\alpha} \tag{1.23}$$

К этим условиям закрепления (1.21) добавляются условия непрерывности перемещений $u$ и $v$ на границе раздела двух областей (1.9).

Из третьего условия (1.9) получим

$$L_1 = L_2 = 0, \qquad D_1 = D_2 = 0, \qquad F_1 = F_2 = F$$

$$2B_1\alpha^2 = A_2(1-\alpha^2) \tag{1.24}$$

Подставляя значения коэффициентов из (1.12) и (1.19) и (1.20) с учетом (1.24), определим перемещения. При этом получим:

для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$

$$u_1 = -\frac{4MN(\alpha+1)}{KE^-}\Bigg|\frac{a^2\rho^2}{r}\left(1+\ln\frac{\rho}{a}\right)+$$

$$+r(1-\nu^-)\left(\rho^2+\rho^2\ln\frac{\rho}{r}-a^2\ln\frac{r}{a}\right)+r(a^2+\rho^2)\Bigg|+F\cos\theta \tag{1.25}$$

$$v_1 = \frac{8MN(\alpha+1)}{KE^-}(a^2+\rho^2)\,r\theta - F\sin\theta$$

для второй части $(\rho < r \leqslant b)$

$$u_2 = -\frac{4MH(\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)KE^-}\left[\alpha^2(1-\nu^-)\,r\,(b^{2\alpha}+\rho^{2\alpha}) - r^\alpha(1-\alpha\nu^-)(\alpha b^{\alpha+1}+\rho^{\alpha+1}) -\right.$$

$$\left.-\,b^{\alpha+1}\rho^{\alpha+1}r^{-\alpha}(1+\alpha\nu^-)(b^{\alpha-1}-\alpha\rho^{\alpha-1})\right]+F\cos\theta \tag{1.26}$$

$$v_2 = \frac{4MH(\alpha+1)^2}{\alpha KE^-}(b^{2\alpha}+\rho^{2\alpha})\,r\theta - F\sin\theta$$

Из последнего условия (1.24) с учетом (1.12) получим следующее трансцендентное уравнение относительно неизвестного радиуса $\rho$:

$$(\alpha-1)^2 s^{2\alpha+2} + (3\alpha+1)(\alpha-1)m^2 s^{2\alpha} - 4\alpha^2 s^{\alpha-1}(s^2+m^2) + (\alpha+1)^2 s^2 +$$

$$+(3\alpha-1)(\alpha+1)m^2 + 2(\alpha^2-1)m^2(1+s^{2\alpha})\ln\frac{s}{m} = 0 \tag{1.27}$$

где

$$s = \frac{\rho}{b}, \qquad m = \frac{a}{b} \tag{1.28}$$

Нетрудно показать, что уравнение (1.27) в промежутке $m < s < 1$ имеет один действительный корень, который определяется известными методами приближенных вычислений.

Отметим, что после удовлетворения условию непрерывности перемещения $v$ условие непрерывности для $u$ удовлетворяется тождественно.

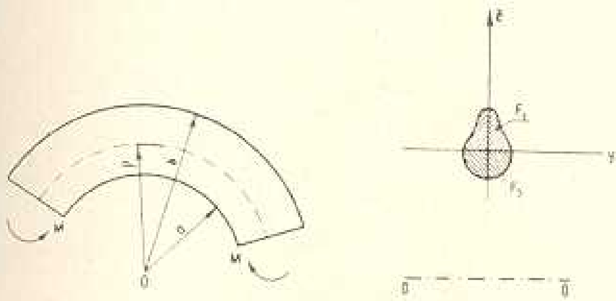
После решения уравнения (1.27) можно сказать в какой именно области находится закрепленная точка ($r = r_0$, $\theta = 0$). Если она будет в первой области, то постоянная интегрирования $F$ определяется из условия (1.22), если же будет во второй области, то—из условия (1.23).

Отметим, что из выражений (1.25) и (1.26) для перемещения $v$ следует, что поперечные сечения кривого стержня после деформаций остаются плоскими.

2. Решим рассмотренную выше задачу приближенно—методами сопротивления материалов.

Сделаем, как и в случае одномодульного материала, допущение, что радиальными напряжениями $\sigma_r$ можно пренебречь.

Предполагается, что сечение стержня симметрично относительно плоскости кривизны. Ось $z$ в сечении является осью симетрии (фиг. 2), а внешние силы приложены в плоскости симметрии.



Фиг. 2.

В рассматриваемом случае так же, как и в случае обычного изотропного материала [5], можно показать, что точки поперечного сечения стержня после изгиба также образуют плоское сечение, повернутое вокруг некоторой оси $y$, т.е. поперечное сечение стержня после изгиба остается плоским.

Из вышесказанного следует, что нормальное напряжение $\sigma_\theta$ является функцией только от координаты $z$.

Очевидно, что под действием внешней нагрузки (пары $M$) внутренние волокна ($r=a$) сжаты, а внешние ($r=b$)—растянуты.

Поэтому, естественно, что на некоторой, пока неизвестной, цилиндрической поверхности ($r=\rho$) напряжение $\sigma_\theta$ обращается в нуль.

Линия пересечения этой поверхности с поперечным сечением есть нейтральная ось сечения (ось $y$).

Так как закон упругости для растянутой ($F_1$) и сжатой ($F_2$) частей пишется в различной форме [1], то и выражечия для $\sigma_\theta$ этих частей будут различными.

С учетом вышесказанного граничные условия для торцевых сечений будут:

$$\int_{F_1} \sigma_\theta dF + \int_{F_2} \sigma_\theta dF = 0, \qquad \int_{F_1} z\sigma_\theta dF + \int_{F_2} z\sigma_\theta dF = M \tag{2.1}$$

Так как поперечные сечения стержня после изгиба остаются плоскими, то для любого значения $z$ (фиг. 3) относительное удлинение (укорочение) волокон элемента будет

$$\varepsilon = \frac{z}{z+\rho}\,\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \tag{2.2}$$

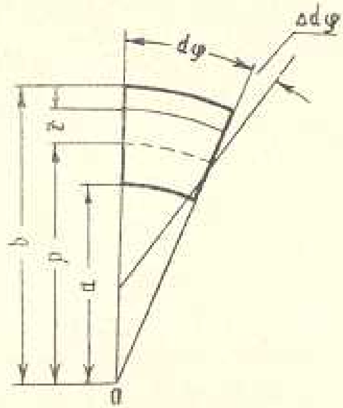
Тогда для напряжений $\sigma_\theta$ получим:

в растянутой части $(0 \leqslant z \leqslant b-\rho)$

$$\sigma_\theta = E^{+}\,\frac{z}{z+\rho}\,\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \tag{2.3}$$

в сжатой части $(a-\rho \leqslant z \leqslant 0)$

$$\sigma_\theta = E^{-}\,\frac{z}{z+\rho}\,\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} \tag{2.4}$$




Фиг. 3.

Подставляя значения $\sigma_\theta$ из (2.3) и (2.4) во второе уравнение (2.1), после элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned} \sigma_\theta &= \frac{\alpha^2 M z}{p\,(z+\rho)} \quad \text{при} \quad 0 \leqslant z \leqslant b-\rho \\ \sigma_\theta &= \frac{M z}{p\,(z+\rho)} \quad \text{при} \quad a-\rho \leqslant z \leqslant 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

где

$$p = \alpha^2 \int_{F_1} z\,dF + \int_{F_2} z\,dF \tag{2.6}$$

Фигурирующая в (2.5) и (2.6) неизвестная величина $\rho$ определяется из первого условия (2.1), которое приводится к следующему трансцендентному уравнению:

$$\alpha^2 F_1 + F_2 = \rho\left(\alpha^2 \int_{F_1} \frac{dF}{z+\rho} + \int_{F_2} \frac{dF}{z+\rho}\right) \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) при заданных форме поперечного сечения и материале стержня решается известными приближенными методами.

3. Сравним решения поставленной задачи полученными методами теории упругости (точное решение) и сопротивления материалов (приближенное решение).

При точном решении задачи, рассмотренном в пункте 1, поперечное сечение стержня было прямоугольное. Поэтому рассмотрим приближенное решение для прямоугольного сечения. В этом случае уравнение (2.7), определяющее величину $\rho$, примет следующий вид:

$$\alpha^2 - m = s\left(\alpha^2 - 1 - \alpha^2 \ln s + \ln \frac{s}{m}\right) \tag{3.1}$$

где

$$m = \frac{a}{b}, \qquad s = \frac{\rho}{b} \tag{3.2}$$

Выражения для напряжений (1.14), (1.15) и (2.5) можно представить в виде:

точное решение

$$\sigma_r = k_1 \frac{M}{b^2}, \qquad \sigma_\theta = k_2 \frac{M}{b^2} \tag{3.3}$$

приближенное решение

$$\sigma_\theta = k_3 \frac{M}{b^2} \tag{3.4}$$

где $k_1$, $k_2$, $k_3$, как видно из вышеуказанных формул, зависят от материала стержня ($\alpha$), от его размеров ($m$) и от координаты точки ($z$), где определяются напряжения.

Для некоторых значений $m$ и $\alpha$ вычислены значения функций $k_i$ в девяти точках поперечного сечения, расположенных по высоте.

Результаты вычислений приведены в табл. 1—4. Вычисления произведены на ЭВЦМ „Наири“ вычислительной лаборатории Ереванского политехнического института.

Известно [4], что для обычного материала величины напряжений $\sigma_\theta$, вычисленные методами теории упругости и сопротивления материалов, достаточно близки. Из результатов вычислений, приведенных в таблицах, замечаем, что и для разномодульного материала расхождение величин $\sigma_\theta$, вычисленных по обоим методам, незначительно. Поэтому с достаточной точностью для практических расчетов величины напряжений $\sigma_\theta$ можно вычислить по более простым формулам (2.5).

Сравнение величин напряжений $\sigma_\theta$, приведенных в табл. 1—3, для стержней, изготовленных из разномодульного материала, с соответствующими величинами, приведенными в табл. 4, для стержней, изготовленных из обычного материала, показывает, что из-за разномо-

*Таблица 1*

$m=1/3$

| | $\alpha=0.5$ | | | | $\alpha=0.7$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | Точное решение $s=0.5053$ | | Прибл. реш. $s=0.5039$ | $z$ | Точное решение $s=0.5530$ | | Прибл. реш. $s=0.5508$ |
| | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ |
| −0.171 | 0.000 | −31.590 | −31.580 | −0.217 | 0.000 | −25.319 | −25.288 |
| −0.128 | −2.961 | −20.754 | −20.925 | −0.162 | −2.887 | −16.047 | −16.228 |
| −0.085 | −4.338 | −12.356 | −12.455 | −0.108 | −4.081 | −9.315 | −9.413 |
| −0.042 | −4.759 | −5.599 | −5.560 | −0.053 | −4.362 | −4.144 | −4.101 |
| 0.001 | −4.585 | 0.000 | 0.040 | 0.002 | −4.127 | 0.000 | 0.077 |
| 0.125 | −3.368 | 2.996 | 3.066 | 0.114 | −3.154 | 3.147 | 3.257 |
| 0.249 | −2.144 | 5.058 | 5.097 | 0.226 | −2.073 | 5.461 | 5.521 |
| 0.372 | −1.015 | 6.579 | 6.555 | 0.337 | −1.008 | 7.260 | 7.216 |
| 0.496 | 0.000 | 7.758 | 7.652 | 0.449 | 0.000 | 8.713 | 8.533 |
| | $\alpha=1.5$ | | | | $\alpha=2$ | | |
| | $s=0.6796$ | | $s=0.6748$ | | $s=0.7284$ | | $s=0.7229$ |
| −0.341 | 0.000 | −16.996 | −16.893 | −0.390 | 0.000 | −15.190 | −15.055 |
| −0.255 | −2.699 | −9.840 | −10.011 | −0.291 | −2.630 | −8.510 | −8.670 |
| −0.168 | −3.515 | −5.405 | −5.482 | −0.192 | −3.332 | −4.594 | −4.661 |
| −0.082 | −3.553 | −2.320 | −2.275 | −0.093 | −3.311 | −1.952 | −1.910 |
| 0.005 | −3.242 | 0.000 | 0.259 | 0.005 | −2.989 | 0.000 | 0.383 |
| 0.085 | −2.670 | 3.872 | 4.144 | 0.073 | −2.543 | 4.373 | 4.745 |
| 0.165 | −1.904 | 7.151 | 7.287 | 0.141 | −1.845 | 8.241 | 8.421 |
| 0.245 | −0.988 | 10.026 | 9.884 | 0.209 | −0.980 | 11.775 | 11.561 |
| 0.325 | 0.000 | 12.614 | 12.064 | 0.277 | 0.000 | 15.081 | 14.275 |

*Таблица 2*

$m=1/2$

| | $\alpha=0.5$ | | | | $\alpha=0.7$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | Точное решение $s=0.6419$ | | Прибл. реш. $s=0.6417$ | $z$ | Точное решение $s=0.6788$ | | Прибл. реш. $s=0.6784$ |
| | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ |
| −0.142 | 0.000 | −47.199 | −47.127 | −0.178 | 0.000 | −37.949 | −37.855 |
| −0.106 | −2.642 | −32.913 | −32.984 | −0.134 | −2.607 | −25.963 | −26.040 |
| −0.071 | −4.130 | −20.529 | −20.598 | −0.089 | −3.988 | −15.943 | −16.018 |
| −0.035 | −4.765 | −9.655 | −9.661 | −0.044 | −4.522 | −7.402 | −7.408 |
| 0.000 | −4.763 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | −4.463 | 0.000 | 0.003 |
| 0.090 | −3.857 | 5.063 | 5.103 | 0.081 | −3.691 | 5.463 | 5.528 |
| 0.179 | −2.659 | 9.051 | 9.080 | 0.161 | −2.596 | 9.925 | 9.972 |
| 0.269 | −1.344 | 12.286 | 12.275 | 0.241 | −1.335 | 13.659 | 13.640 |
| 0.358 | 0.000 | 14.971 | 14.899 | 0.322 | 0.000 | 16.845 | 16.719 |

Таблица 2 (продолжение)

| | $\alpha=1.5$ | | | | $\alpha=2$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $s=0.7731$ | | $s=0.7722$ | | $s=0.8084$ | | $s=0.8074$ |
| −0.272 | 0.000 | −25.644 | −25.492 | −0.307 | 0.000 | −22.962 | −22.788 |
| −0.204 | −2.519 | −16.619 | −16.803 | −0.230 | −2.486 | −14.707 | −14.790 |
| −0.136 | −3.661 | −9.898 | −9.978 | −0.153 | −3.550 | −8.599 | −8.678 |
| −0.067 | −3.993 | −4.466 | −4.476 | −0.076 | −3.822 | −3.845 | −3.855 |
| 0.001 | −3.831 | 0.000 | 0.124 | 0.001 | −3.661 | 0.000 | 0.192 |
| 0.058 | −3.320 | 7.144 | 7.319 | 0.049 | −3.215 | 8.037 | 8.475 |
| 0.114 | −2.444 | 13.474 | 13.593 | 0.097 | −2.399 | 15.338 | 15.880 |
| 0.171 | −1.313 | 19.180 | 19.113 | 0.145 | −1.306 | 22.083 | 22.540 |
| 0.228 | 0.000 | 24.396 | 24.001 | 0.193 | 0.000 | 28.401 | 28.563 |

*Таблица 3*

$m=3/4$

| | $\alpha=0.5$ | | | | $\alpha=0.7$ | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | Точное решение $s=0.8281$ | | Прибл. реш. $s=0.8281$ | $z$ | Точное решение $s=0.8472$ | | Прибл. реш. $s=0.8472$ |
| | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ | | $k_1$ | $k_2$ | $k_3$ |
| −0.078 | 0.000 | −160.367 | −160.293 | −0.097 | 0.000 | −129.393 | −129.300 |
| −0.059 | −3.514 | −117.143 | −117.166 | −0.073 | −3.497 | −93.901 | −93.928 |
| −0.039 | −5.813 | −76.129 | −76.173 | −0.049 | −5.736 | −60.655 | −60.707 |
| −0.020 | −7.036 | −37.137 | −37.160 | −0.024 | −6.892 | −29.422 | −29.448 |
| 0.000 | −7.304 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | −7.112 | 0.000 | 0.000 |
| 0.043 | −6.467 | 18.984 | 19.005 | 0.038 | −6.344 | 21.076 | 21.110 |
| 0.086 | −4.859 | 36.197 | 36.218 | 0.076 | −4.804 | 40.431 | 40.466 |
| 0.129 | −2.658 | 51.886 | 51.886 | 0.115 | −2.648 | 58.285 | 58.284 |
| 0.172 | 0.000 | 66.252 | 66.206 | 0.153 | 0.000 | 74.820 | 74.740 |
| | $\alpha=1.5$ | | | | $\alpha=2$ | | |
| | $s=0.8943$ | | $s=0.8942$ | | $s=0.9113$ | | $s=0.9113$ |
| −0.144 | 0.000 | −88.119 | −87.976 | −0.161 | 0.000 | −79.096 | −78.939 |
| −0.108 | −3.455 | −62.920 | −62.950 | −0.121 | −3.440 | −56.146 | −56.179 |
| −0.072 | −5.554 | −40.054 | −40.120 | −0.081 | −5.491 | −35.557 | −35.628 |
| −0.036 | −6.559 | −19.174 | −19.209 | −0.040 | −6.445 | −16.944 | −16.982 |
| 0.000 | −6.676 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | −6.529 | 0.000 | 0.000 |
| 0.026 | −6.057 | 29.491 | 29.590 | 0.022 | −5.958 | 34.771 | 34.917 |
| 0.053 | −4.672 | 57.399 | 57.495 | 0.044 | −4.625 | 68.019 | 68.157 |
| 0.079 | −2.623 | 83.897 | 83.884 | 0.066 | −2.615 | 99.911 | 99.891 |
| 0.106 | 0.000 | 109.133 | 108.878 | 0.089 | 0.000 | 130.596 | 130.219 |

*Таблица 4*

$\alpha=1$

| $z$ | $m=1/3$ Точное решение $s=0,6102$ $k_1$ | $k_2$ | Прибл. реш. $s=0,6068$ $k_3$ | $z$ | $m=1/2$ Точное решение $s=0,7220$ $k_1$ | $k_2$ | Прибл. реш. $s=0,7273$ $k_3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| −0,273 | 0.000 | −20.628 | −20.567 | −0.221 | 0.000 | −31.021 | −30.901 |
| −0.205 | −2.780 | −12.618 | −12.799 | −0.166 | −2.561 | −20.784 | −20.866 |
| −0.137 | −3.794 | −7.198 | −7.292 | −0.111 | −3.827 | −12.571 | −12.650 |
| −0.068 | −3.962 | −3.224 | −3.183 | −0.055 | −4.264 | −5.791 | −5.800 |
| 0.000 | −3.699 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | −4.156 | 0.000 | 0.000 |
| 0.098 | −2.950 | 3.323 | 3.494 | 0.070 | −3.518 | 6.042 | 6.147 |
| 0.197 | −2.011 | 6.041 | 6.134 | 0.139 | −2.530 | 11.225 | 11.300 |
| 0.294 | −1.008 | 8.273 | 8.197 | 0.209 | −1.328 | 15.715 | 15.680 |
| 0.393 | 0.000 | 10.166 | 9.856 | 0.279 | 0.000 | 19.968 | 19.450 |

| $m=3/4$ | $s=0,8690$ | | $s=0,8690$ |
|---|---|---|---|
| −0.119 | 0.000 | −106.171 | −106.055 |
| −0.089 | −3.477 | −76.478 | −76.506 |
| −0,060 | −5.650 | −49.071 | −49.129 |
| −0.030 | −6.733 | −23.664 | −23.694 |
| 0.000 | −6,904 | 0.000 | 0.000 |
| 0.033 | −6.208 | 24.212 | 24.269 |
| 0.065 | −4.742 | 46.782 | 46.838 |
| 0.098 | −2.637 | 67.884 | 67.879 |
| 0.131 | 0.000 | 87.683 | 87.541 |

дульности материала происходит перераспределение напряжений. С увеличением $\alpha$ увеличиваются наибольшие растягивающие напряжения и уменьшается область растягивающих напряжений. При этом наибольшие сжимающие напряжения уменьшаются и увеличивается область сжимающих напряжений. С уменьшением же $\alpha$ перераспределение напряжений $\sigma_\theta$ происходит наоборот. Например, при $m=1/3$, $\alpha=2$ наибольшие растягивающие напряжения увеличиваются на 48.3 %, а наибольшие сжимающие — уменьшаются на 26.2 %. При $m=1/3$, $\alpha=1/2$ наибольшие растягивающие напряжения уменьшаются на 24.8 %, а наибольшие сжимающие — увеличиваются на 53.2 %.

В заключение отметим, что все приведенные в пунктах 1, 2 формулы и соотношения при $\alpha=1$ (для одномодульного материала) приводятся к соответствующим формулам и соотношениям классической теории.

Выражаю глубокую благодарность Хачатряну А. А. за советы и указания, данные мне при выполнении настоящей работы.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 3 III 1969

Ջ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

## ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԿՈՐ ՀԵԾԱՆԻ ՄԱՔՈՒՐ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

*Դիտարկված է՝ կոր շրջանային հեծանի լարվածային-դեֆորմացիոն վիճակը, եզրային կտրվածքներում կիրառված ուժազույգերի ազդեցությունից։*

*Խնդիրը լուծված է առաձգականության տեսության մեթոդով։ Նույն խնդիրը լուծված է նաև նյութերի դիմադրության մեթոդով։*

*Բերված թվային համեմատությունը ցույց է տալիս, որ հիմնական լարումների մեծությունները՝ հաշված վերոհիշյալ եղանակներով, տարբերվում են աննշան չափով։*

J. Z. MKRTCHIAN

## PURE BENDING OF A CIRCULAR BEAM MADE OF DIFFERENT—MODULUS MATERIAL

Summary

The stress-strain state of a circular ring beam, made of different-modulus material found under pairs of bending forces applied to the terminal sections is considered.

The problem has been solved by the method of the theory of elasticity and for the sake of comparison the methods of strength of materials have also been used.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. Инж. ж., МТТ, № 2, 1966.
2. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разносопротивляемой или разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, № 2, 1966.
3. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.-Л., 1947.
4. *Тимошенко С. П.* Теория упругости. ОНТИ, М., 1934.
5. *Феодосьев В. И.* Сопротивление материалов. „Наука" М., 1967.