ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 4, 1969 Механика

А. А. ХАЧАТРЯН

К ТЕОРИИ ОСЕСИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ, ИЗГОТОВЛЕННЫХ ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

Построению теории осесимметричных и неосесимметричных оболочек, изготовленных из разномодульного материала, посвящены работы [1, 2], где принимается условие слабомоментности оболочек, т. е. условие, при котором напряжения по толщине оболочки не меняют своего знака. Имеется также одна работа [3], посвященная осесимметричной задаче круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из разномодульного материала, где условие слабомоментности не принимается.

В настоящей работе на уровне классической теории оболочек, базирующейся на гипотезе недеформируемых нормалей, строится теория осесимметрично нагруженных оболочек вращения, изготовленных из разномодульного материала, без ограничения выводов условием слабомоментности вдоль меридиана.

1. Рассмотрим симметрично нагруженную оболочку вращения, изготовленную из разномодульного материала с упругими характеристиками E^+, ν^+ (при растяжении в любом направлении) и E^-, ν^- (при сжатии в любом направлении).

Пусть оболочка отнесена к триортогональной системе координат s, φ, γ, где линии $s=\mathrm{const}$ представляют собой параллели, $\varphi=\mathrm{const}$ — меридианы срединной поверхности оболочки, а γ направлена по внешней нормали к срединной поверхности. Введем также угол θ, представляющий собой угол между касательной к меридиану и осью вращения оболочки.

В основу предлагаемой теории ставится гипотеза недеформируемых нормалей.

Ввиду осесимметричности задачи все расчетные величины* не зависят от φ и для геометрических соотношений имеем [4, 5]

$$k_1=\frac{1}{R_1}=\frac{d\theta}{ds},\qquad k_2=\frac{1}{R_2}=\frac{\cos\theta}{r}$$
$$A=1,\quad B=r=R_2\cos\theta,\qquad \frac{dr}{ds}=-\sin\theta \tag{1.1}$$

* Здесь использованы общепринятые обозначения, см., напр., [5].

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{r}(w\cos\theta - u\sin\theta), \qquad \omega = 0$$
$$\varkappa_1 = -\frac{d}{ds}\left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}\right), \qquad \varkappa_2 = \left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1}\right)\frac{\sin\theta}{r}, \qquad \tau = 0 \tag{1.2}$$

$$e_s = \varepsilon_1 + \gamma\varkappa_1, \quad e_\varphi = \varepsilon_2 + \gamma\varkappa_2, \quad e_{s\varphi} = \omega + \gamma\tau = 0 \tag{1.3}$$

а уравнение неразрывности деформаций будет

$$\frac{d\varepsilon_2}{ds} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{\sin\theta}{r} - \varkappa_2 \operatorname{ctg}\theta = 0 \tag{1.4}$$

Имеем также следующие уравнения равновесия для элемента оболочки:

$$\frac{d}{ds}(rT_s) + T_\varphi \sin\theta + \frac{r}{R_1}N = -rX$$
$$\frac{d}{ds}(rN) - r\left(\frac{T_s}{R_1} + \frac{T_\varphi}{R_2}\right) = -rZ \tag{1.5}$$
$$\frac{d}{ds}(rM_s) + M_\varphi \sin\theta - rN = 0$$

где

$$T_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_s d\gamma, \qquad T_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_\varphi d\gamma, \qquad N = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \tau_{s\gamma} d\gamma$$
$$M_s = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma\sigma_s d\gamma, \qquad M_\varphi = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \gamma\sigma_\varphi d\gamma \tag{1.6}$$

Относительно напряжений здесь приняты следующие предположения:

а) напряжение σ_γ пренебрегается по сравнению с другими напряжениями;

б) напряжение σ_s по толщине оболочки изменяется по кусочно-линейному закону, при этом в точке раздела меняет свой знак;

в) напряжение σ_φ по толщине оболочки изменяется по линейному закону, причем по всей толщине имеет один и тот же знак.

Последнее предположение равносильно принятию условия слабомоментности по направлению φ. Однако, по-видимому, это предположение нельзя считать ограничивающим, если учесть, что в большинстве решенных задач в классической постановке при обычном изотропном материале условие слабомоментности по направлению φ выполняется.

Таким образом, с учетом принятых выше предположений, в некоторой части оболочки будем иметь следующие варианты распределения напряжений по толщине оболочки и соответствующие им законы упругости:

а) $\sigma_\varphi > 0$ при $-\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \dfrac{h}{2}$

$$\sigma_s \left| \begin{array}{lll} > 0 & \text{при} & -\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1 \\ & & \\ < 0 & \text{при} & \gamma_1 < \gamma \leqslant \dfrac{h}{2} \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} e_s = a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{11}\sigma_\varphi \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1$$

$$\left.\begin{array}{l} e_s = a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{11}\sigma_\varphi \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad \gamma_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}$$

б) $\sigma_\varphi > 0$ при $-\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \dfrac{h}{2}$

$$\sigma_s \left| \begin{array}{lll} < 0 & \text{при} & -\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_2 \\ & & \\ > 0 & \text{при} & \gamma_2 < \gamma \leqslant \dfrac{h}{2} \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} e_s = a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{11}\sigma_\varphi \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_2$$

$$\left.\begin{array}{l} e_s = a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{11}\sigma_\varphi \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad \gamma_2 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}$$

в) $\sigma_\varphi < 0$ при $-\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \dfrac{h}{2}$

$$\sigma_s \left| \begin{array}{lll} > 0 & \text{при} & -\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_3 \\ & & \\ < 0 & \text{при} & \gamma_3 < \gamma \leqslant \dfrac{h}{2} \end{array} \right.$$

$$\left.\begin{array}{l} e_s = a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{22}\sigma_\varphi \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_3$$

$$\left.\begin{array}{l} e_s = a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi = a_{12}\sigma_s + a_{22}\sigma_\varphi \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad \gamma_3 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}$$

г) $\sigma_\gamma < 0$ при $-\frac{h}{2} \leqslant \gamma \leqslant \frac{h}{2}$

$$\sigma_s \begin{cases} < 0 & \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_4 \\ > 0 & \text{при} \quad \gamma_4 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\gamma \\ e_\gamma &= a_{12}\sigma_s + a_{22}\sigma_\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_4$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\gamma \\ e_\gamma &= a_{12}\sigma_s + a_{22}\sigma_\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \gamma_4 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}$$

Здесь γ_i — значение γ для каждого варианта, где σ_s обращается в нуль,

$$a_{11} = \frac{1}{E^+}, \quad a_{22} = \frac{1}{E^-}, \quad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-} \tag{1.7}$$

Детальное изучение этих вариантов приводит к заключению, что рассмотренные четыре варианта можно объединить в два введением коэффициента a_{33}, который будет принимать значения a_{11} или a_{22} в зависимости от знака σ_γ. А именно:

I вариант

$$\sigma_s \begin{cases} > 0 & \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1 \\ < 0 & \text{при} \quad \gamma_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \end{cases} \tag{1.8}$$

Закон упругости при этом будет

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\gamma \\ e_\gamma &= a_{12}\sigma_s + a_{33}\sigma_\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1$$

$$\left.\begin{aligned} e_s &= a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\gamma \\ e_\gamma &= a_{12}\sigma_s + a_{33}\sigma_\gamma \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad \gamma_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2} \tag{1.9}$$

Решая (1.9) относительно напряжений и подставляя значения e_s и e_γ из (1.3), получим

$$\left.\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} \\ \sigma_\gamma &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\frac{a_{11}\varkappa_2 - a_{12}\varkappa_1}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} \end{aligned}\right\} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_1$$

(1.10)

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_s &= \frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{33}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2}\\
\sigma_\varphi &= \frac{a_{22}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{22}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2}
\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad \gamma_1 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}
$$

II вариант

$$
\sigma_s \begin{cases} < 0 & \text{при}\quad -\dfrac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_2 \\ > 0 & \text{при}\quad \gamma_2 < \gamma \leqslant \dfrac{h}{2} \end{cases} \tag{1.11}
$$

Закон упругости при этом будет

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} e_s &= a_{22}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{33}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_2 \\
&\left.\begin{aligned} e_s &= a_{11}\sigma_s + a_{12}\sigma_\varphi \\ e_\varphi &= a_{12}\sigma_s + a_{33}\sigma_\varphi \end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad \gamma_2 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

или

$$
\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned}
\sigma_s &= \frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{33}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2}\\
\sigma_\varphi &= \frac{a_{22}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{22}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{22}a_{33} - a_{12}^2}
\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad -\frac{h}{2} \leqslant \gamma < \gamma_2 \\
&\left.\begin{aligned}
\sigma_s &= \frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{33}\chi_1 - a_{12}\chi_2}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2}\\
\sigma_\varphi &= \frac{a_{11}\varepsilon_2 - a_{12}\varepsilon_1}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2} + \gamma\,\frac{a_{11}\chi_2 - a_{12}\chi_1}{a_{11}a_{33} - a_{12}^2}
\end{aligned}\right\}\quad \text{при}\quad \gamma_2 < \gamma \leqslant \frac{h}{2}
\end{aligned} \tag{1.13}
$$

Из условия обращения в нуль напряжения σ_s, независимо от вариантов, получаем

$$
\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = -\frac{a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2}{a_{33}\chi_1 - a_{12}\chi_2} \tag{1.14}
$$

Во всех приведенных здесь формулах следует учесть, что

$$
\begin{aligned}
&\text{при}\ \sigma_\varphi > 0 \qquad a_{33} = a_{11} = \frac{1}{E^+} \\
&\text{при}\ \sigma_\varphi < 0 \qquad a_{33} = a_{22} = \frac{1}{E^-}
\end{aligned} \tag{1.15}
$$

По этим двум вариантам, с помощью формул (1.6), вычисляя тангенциальные усилия и моменты и учитывая, что в первом варианте

$M_s < 0$, а во втором варианте $M_s > 0$, замечаем, что их можно представить в следующей единой форме:

$$T_s = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + \mu(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2) + \mu b_{11}\frac{(a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^2}{a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}$$

$$T_\tau = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + \mu(K_{12}\varkappa_1 + K_{22}\varkappa_2) + \mu b_{12}\frac{(a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^2}{a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2}$$

$$M_s = D_{11}\varkappa_1 + D_{12}\varkappa_2 + \mu(K_{11}\varepsilon_1 + K_{12}\varepsilon_2) - \frac{1}{3}\mu b_{11}\frac{(a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^3}{(a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)^2} \tag{1.16}$$

$$M_\tau = D_{12}\varkappa_1 + D_{22}\varkappa_2 + \mu(K_{12}\varepsilon_1 + K_{22}\varepsilon_2) - \frac{1}{3}\mu b_{12}\frac{(a_{33}\varepsilon_1 - a_{12}\varepsilon_2)^3}{(a_{33}\varkappa_1 - a_{12}\varkappa_2)^2}$$

где

$$C_{11} = \frac{a_{33}[a_{33}(a_{11} + a_{22}) - 2a_{12}^2]}{(a_{11}a_{33} - a_{12}^2)(a_{22}a_{33} - a_{12}^2)}\frac{h}{2}, \qquad C_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{33}}C_{11}$$

$$C_{22} = \frac{2a_{11}a_{22}a_{33} - a_{12}^2(a_{11} + a_{22})}{(a_{11}a_{33} - a_{12}^2)(a_{22}a_{33} - a_{12}^2)}\frac{h}{2}, \qquad K_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{33}}K_{11}$$

$$K_{11} = \frac{a_{33}^2(a_{11} + a_{22})}{(a_{11}a_{33} - a_{12}^2)(a_{22}a_{33} - a_{12}^2)}\frac{h^2}{8}, \qquad K_{22} = -\frac{a_{12}}{a_{33}}K_{12} \tag{1.17}$$

$$b_{11} = \frac{a_{33}(a_{11} + a_{22})}{2(a_{11}a_{33} - a_{12}^2)(a_{22}a_{33} - a_{12}^2)}, \qquad b_{12} = -\frac{a_{12}}{a_{33}}b_{11}$$

$$D_{ik} = \frac{h^2}{12}C_{ik}, \qquad \mu = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{22} + a_{11}}\,\mathrm{sign}\,M_s$$

Рассматривая (1.16) и (1.17), замечаем, что оба варианта отличаются друг от друга только знаком коэффициента μ, причем остальные коэффициенты (1.17) относительно a_{11} и a_{22} имеют симметричную структуру. Поэтому независимо от вариантов для тангенциальных усилий и моментов можно принимать выражения (1.16) при значении μ, скажем,

$$\mu = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{22} + a_{11}} \tag{1.18}$$

которое соответствует случаю $M_s > 0$ (II вириант) и коэффициенты a_{11}, a_{22} определяются согласно (1.7). В случае же, когда $M_s < 0$ (I вариант), все остается по-прежнему, только в (1.18) коэффициенты a_{11} и a_{22} поменяются местами.

Как видно из (1.16), усилия и моменты содержат нелинейные члены, которые при обычном изотропном материале исчезают ($\mu = 0$).

Теперь можно приступить к составлению уравнения равновесия. Здесь, как и в случае обычной классической теории [3, 4], удобнее пользоваться функциями Мейснера (W, V), через которые изменения кривизны и внутренние силы выражаются следующим образом:

$$\varkappa_1 = -\frac{dW}{ds}, \qquad \varkappa_2 = W\frac{\sin\theta}{r}, \qquad W = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{R_1} \tag{1.19}$$

$$\begin{gathered} T_s = -V\frac{\sin\theta}{r} + \frac{1}{r}F_1(s), \qquad T_\varphi = \frac{dV}{ds} \\ N = V\frac{\cos\theta}{r} + \frac{1}{r}F_2(s) \end{gathered} \tag{1.20}$$

Здесь $F_1(s)$ и $F_2(s)$ являются известными функциями от внешней нагрузки

$$\begin{gathered} F_1(s) = \sin\theta\int\limits_{s_0}^{s} rE_r\,ds + \cos\theta\left(P_z^0 - \int\limits_{s_0}^{s} rE_z\,ds\right) \\ F_2(s) = -\cos\theta\int\limits_{s_0}^{s} rE_r\,ds + \sin\theta\left(P_z^0 - \int\limits_{s_0}^{s} rE_z\,ds\right) \end{gathered} \tag{1.21}$$

где

$$\begin{gathered} E_r = Z\cos\theta - X\sin\theta, \qquad E_z = Z\sin\theta + X\cos\theta \\ P_z^0 = r_0\left(T_s^0\cos\theta_0 + N^0\sin\theta_0\right) \end{gathered} \tag{1.22}$$

а величины с нуликами представляют собой значения соответствующих величин в сечении $s = s_0$.

В силу (1.20)—(1.22) первые два уравнения (1.5) удовлетворяются тождественно, а третье уравнение принимает вид

$$\frac{d}{ds}(rM_s) + M_\varphi\sin\theta - V\cos\theta = F_2 \tag{1.23}$$

В силу же (1.19) уравнение неразрывности (1.4) принимает вид

$$\frac{d\varepsilon_2}{ds} - (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\frac{\sin\theta}{r} - W\frac{\cos\theta}{r} = 0 \tag{1.24}$$

Из первых двух соотношений (1.16), вычисляя ε_1 и ε_2, находим

$$\begin{gathered} \varepsilon_1 = \frac{1}{h}\left(\frac{a_{33}C_{22}}{C_{11}}T_s + a_{12}T_\varphi\right) - \mu Q \\ \varepsilon_2 = \frac{1}{h}\left(a_{12}T_s + a_{33}T_\varphi\right) \end{gathered} \tag{1.25}$$

где

$$
\begin{gathered}
Q=\frac{2\left(K_{11}\varkappa_1+K_{12}\varkappa_2\right)}{C_{11}(1+\delta)}\left[1+\frac{2a_{33}b_{11}K_{11}T^*\left(T^*-\mu\right)}{C_{11}^2(1+\delta)}\right] \\
\delta=\left[1+\frac{4\mu a_{33}b_{11}K_{11}}{C_{11}^2}\left(T^*-\mu\right)\right]^{1/2}, \qquad T^*=\frac{T_s}{K_{11}\varkappa_1+K_{12}\varkappa_2}
\end{gathered} \tag{1.26}
$$

В принятых обозначениях для изгибающих моментов имеем

$$
\begin{gathered}
M_s=-D_{11}\frac{dW}{ds}+D_{12}W\frac{\sin\theta}{r}-\mu\frac{K_{11}}{C_{11}}\left(V\frac{\sin\theta}{r}-\frac{F_1}{r}\right)- \\
-\mu^2K_{11}Q-\mu\frac{a_{33}b_{11}K_{11}^2}{3C_{11}^3}\frac{\left(T_s-\mu C_{11}Q\right)^3}{\left(K_{11}\varkappa_1+K_{12}\varkappa_2\right)^2} \\
M_\varphi=-\frac{a_{12}}{a_{33}}M_s+\frac{h^3}{12a_{33}}W\frac{\sin\theta}{r}
\end{gathered} \tag{1.27}
$$

Подставляя теперь (1.25) в (1.24) и (1.27) в (1.23), окончательно получим следующую систему двух уравнений относительно V и W:

$$
\begin{gathered}
\left(L_s+\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{1}{R_1R_2}\right)V-\frac{h}{a_{33}}\frac{W}{R_2}-\mu\frac{h}{a_{33}}\frac{\sin\theta}{r}Q= \\
=\frac{1}{r}\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{dF_1}{ds}-\frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{\sin\theta}{r}F_1\right) \\
\left(L_s-\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{1}{R_1R_2}\right)W+\frac{1}{D_{11}}\frac{V}{R_2}+\mu\frac{K_{11}}{C_{11}D_{11}}\nabla_s\left(\frac{\sin\theta}{r}V\right)+ \\
+\mu^2\frac{K_{11}}{D_{11}}\nabla_sQ+\mu\frac{a_{33}b_{11}K_{11}^2}{3C_{11}^3D_{11}}\nabla_s\left[\frac{\left(T_s-\mu C_{11}Q\right)^3}{\left(K_{11}\varkappa_1+K_{12}\varkappa_2\right)^2}\right]= \\
=-\frac{1}{D_{11}}\left[\frac{F_2}{r}-\mu\frac{K_{11}}{C_{11}}\nabla_s\left(\frac{F_1}{r}\right)\right]
\end{gathered} \tag{1.28}
$$

где операторы ∇_s и L_s имеют вид

$$
\begin{gathered}
\nabla_s=\frac{d}{ds}-\frac{a_{33}+a_{12}}{a_{33}}\frac{\sin\theta}{r} \\
L_s=\frac{d^2}{ds^2}-\frac{\sin\theta}{r}\frac{d}{ds}-\frac{C_{22}}{C_{11}}\frac{\sin^2\theta}{r^2}
\end{gathered} \tag{1.29}
$$

Как видно из (1.28), полученные уравнения являются нелинейными относительно искомых функций. Нетрудно заметить также, что при $T_s=0$ нелинейности исчезают и разрешающая система (1.28) становится линейной.

Ниже будем рассматривать некоторые частные случаи оболочек.

2. *Круговая коническая оболочка.* В случае круговой конической оболочки имеем

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = 0, \quad \theta = \text{const} \tag{2.1}$$

Здесь вместо s за независимую переменную удобнее принимать r [4]. Тогда учитывая, что

$$\frac{d}{ds} = -\sin\theta \frac{d}{dr} \tag{2.2}$$

уравнения (1.28) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$L_r(V) - \frac{h}{a_{33}} \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} \frac{W}{r} - \frac{\mu h}{a_{33}\sin\theta} \frac{Q}{r} = -\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{C_{12}}{C_{11}} \frac{dF_1}{dr} + \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{F_1}{r}\right)$$

$$L_r(W) + \frac{\cos\theta}{D_{11}\sin^2\theta} \frac{V}{r} - \frac{\mu K_{11}}{C_{11}D_{11}} \nabla_r\left(\frac{V}{r}\right) - \frac{\mu^2 K_{11}}{D_{11}\sin\theta} \nabla_r Q - \tag{2.3}$$

$$-\mu \frac{a_{33}b_{11}K_{11}^2}{3C_{11}^3 D_{11}\sin\theta} \nabla_r \left[\frac{(T_s - \mu C_{11}Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)^2}\right] =$$

$$= -\frac{1}{D_{11}\sin^2\theta}\left[\frac{F_2}{r} + \mu \frac{K_{11}\sin\theta}{C_{11}} \nabla_r\left(\frac{F_1}{r}\right)\right]$$

Здесь операторы ∇_r и L_r имеют вид

$$\nabla_r = \frac{d}{dr} + \frac{a_{33} + a_{12}}{a_{33}} \frac{1}{r}$$
$$L_r = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr} - \frac{C_{22}}{C_{11}} \frac{1}{r^2} \tag{2.4}$$

а F_1 и F_2 определяются по формулам

$$F_1 = \frac{1}{\sin\theta}\int_{r_0}^{r} rX dr + P_z^0 \cos\theta, \quad F_2 = \frac{1}{\sin\theta}\int_{r_0}^{r} rZ dr + P_z^0 \sin\theta \tag{2.5}$$

где

$$P_z^0 = r_0 (T_s^0 \cos\theta + N^0 \sin\theta) \tag{2.6}$$

Приведем также выражение для изгибающего момента M_s

$$M_s = \left(D_{11}\frac{dW}{dr} + D_{12}\frac{W}{r}\right)\sin\theta - \mu \frac{K_{11}}{C_{11}}\left(V\frac{\sin\theta}{r} - \frac{F_1}{r}\right) -$$

$$-\mu^2 K_{11} Q - \mu \frac{a_{33}b_{11}K_{11}^2}{3C_{11}^3} \frac{(T_s - \mu C_{11}Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)^2} \tag{2.7}$$

3. *Сферическая оболочка*. В случае сферической оболочки имеем

$$R_1 = R_2 = R = \text{const} \tag{3.1}$$

Здесь, аналогично [4], условимся отсчитывать дугу s от экватора сферы и введем в рассмотрение угол β, отсчитываемый по меридиану от полюса. Тогда будем иметь

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \beta, \qquad s = R\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right), \qquad r = R\sin\beta \tag{3.2}$$

Принимая за независимую переменную угол β и учитывая, что

$$\frac{d}{ds} = -\frac{1}{R}\frac{d}{d\beta} \tag{3.3}$$

уравнения (1.28) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\left(L_\beta + \frac{C_{12}}{C_{11}}\right)V - \frac{Rh}{a_{33}}W - \mu\frac{Rh}{a_{33}}Q\operatorname{ctg}\beta =$$

$$= -\frac{1}{\sin\beta}\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}\frac{dF_1}{d\beta} + \frac{C_{22}}{C_{11}}F_1\operatorname{ctg}\beta\right)$$

$$\left(L_\beta - \frac{C_{12}}{C_{11}}\right)W + \frac{R}{D_{11}}V - \mu\frac{K_{11}}{C_{11}D_{11}}\nabla_\beta(V\operatorname{ctg}\beta) - \mu^2\frac{K_{11}R}{D_{11}}\nabla_\beta Q - \tag{3.4}$$

$$-\mu\frac{a_{33}b_{11}K_{11}^2R}{3C_{11}^3D_{11}}\nabla_\beta\left[\frac{(T_s - \mu C_{11}Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)^2}\right] =$$

$$= -\frac{R}{D_{11}}\left[\frac{F_2}{\sin\beta} + \mu\frac{K_{11}}{C_{11}R}\nabla_\beta\left(\frac{F_1}{\sin\beta}\right)\right]$$

Здесь операторы ∇_β и L_β имеют вид

$$\begin{aligned} \nabla_\beta &= \frac{d}{d\beta} + \frac{a_{33} + a_{12}}{a_{33}}\operatorname{ctg}\beta \\ L_\beta &= \frac{d^2}{d\beta^2} + \operatorname{ctg}\beta\frac{d}{d\beta} - \frac{C_{22}}{C_{11}}\operatorname{ctg}^2\beta \end{aligned} \tag{3.5}$$

а F_1 и F_2 определяются по формулам

$$\begin{aligned} F_1 &= P_z^0\sin\beta + R^2\int_{\beta_0}^{\beta}[X\cos(\alpha - \beta) - Z\sin(\alpha - \beta)]\sin\alpha\,d\alpha \\ F_2 &= P_z^0\cos\beta + R^2\int_{\beta_0}^{\beta}[X\sin(\alpha - \beta) + Z\cos(\alpha - \beta)]\sin\alpha\,d\alpha \end{aligned} \tag{3.6}$$

где

$$P_z^0 = R\,(T_s^0\sin\beta_0 + N^0\cos\beta_0)\sin\beta_0 \tag{3.7}$$

Для изгибающего момента M_s имеем

$$M_s = \frac{D_{11}}{R}\frac{dW}{d\beta} + \frac{D_{12}}{R} W \operatorname{ctg}\beta - \frac{\mu K_{11}}{C_{11} R \sin\beta}(V \operatorname{ctg}\beta - F_1) -$$

$$- \mu^2 K_{11} Q - \mu \frac{a_{33} b_{11} K_{11}^2}{3C_{11}^3} \frac{(T_s - \mu C_{11} Q)^3}{(K_{11}\varkappa_1 + K_{12}\varkappa_2)^2} \tag{3.8}$$

4. *Круговая цилиндрическая оболочка.* В случае круговой цилиндрической оболочки имеем

$$k_1 = \frac{1}{R_1} = 0, \quad r = R_2 = R, \quad \theta = 0, \quad \varkappa_2 = 0 \tag{4.1}$$

Учитывая также, что

$$L_s = \frac{d^2}{ds^2}, \qquad \Gamma_s = \frac{d}{ds} \tag{4.2}$$

уравнения (1.28) в рассматриваемом случае можно представить в виде

$$\frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{h}{a_{33} R} W = \frac{C_{12}}{RC_{11}} \frac{dF_1}{ds}$$

$$\frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{V}{RD_{11}} + \mu^2 \frac{K_{11}}{D_{11}}\frac{dQ}{ds} + \mu \frac{a_{33} b_{11}}{3C_{11}^3 D_{11}} \frac{d}{ds}\left[\frac{(T_s - \mu C_{11} Q)^3}{\varkappa_1^2}\right] =$$

$$= - \frac{1}{RD_{11}}\left(F_2 - \mu \frac{K_{11}}{C_{11}}\frac{dF_1}{ds}\right) \tag{4.3}$$

Здесь F_1 и F_2 определяются по формулам

$$F_1 = R\left(T_s^0 - \int_{s_0}^{s} X ds\right), \qquad F_2 = -R\int_{s_0}^{s} Z ds \tag{4.4}$$

Приведем также выражение для изгибающего момента M_s

$$M_s = -D_{11}\frac{dW}{ds} + \mu \frac{K_{11}}{RC_{11}} F_1 - \mu^2 K_{11} Q - \mu \frac{a_{33} b_{11}}{3C_{11}^3} \frac{(T_s - \mu C_{11} Q)^3}{\varkappa_1^2} \tag{4.5}$$

5. Рассмотрим частный случай предыдущего пункта, когда на круговой цилиндрической оболочке не действуют внешнее осевое усилие ($T_s^0 = 0$) и тангенциальная составляющая внешней поверхностной нагрузки ($X = 0$), и торцевые закрепления оболочки таковы, что во всей оболочке внутреннее тангенциальное усилие T_s не появляется.

В этом случае будем иметь

$$T_s = 0, \quad F_1 = 0, \quad T^* = 0$$

$$\delta = \left(1 - 4\mu^2 \frac{a_{33} b_{11} K_{11}}{C_{11}^2}\right)^{1/2} = \frac{2}{C_{11}} \left(\frac{2K_{11}}{a_{11} + a_{22}}\right)^{1/2}$$

$$Q = -\frac{2K_{11}}{(1+\delta) C_{11}} \frac{dW}{ds}, \qquad \frac{(T_s - \mu C_{11} Q)^2}{\varkappa_1^2} = \frac{8\mu^2 K_{11}^3}{(1+\delta)^2} \frac{dW}{ds} \tag{5.1}$$

$$M_s = -\frac{2\delta^2}{1+\delta} D_{11} \frac{dW}{ds}$$

На основании этих соотношений уравнения (4.3) упрощаются и принимают вид

$$\frac{d^2 V}{ds^2} - \frac{h}{a_{33} R} W = 0$$

$$\frac{2\delta^2}{1+\delta} \frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{V}{RD_{11}} = -\frac{F_z}{RD_{11}} \tag{5.2}$$

Уравнения (5.2)—линейные с постоянными коэффициентами, и решение их для конкретных примеров не представляет особого труда. После определения V и W, вычисляя ε_1 и ε_2, можно найти перемещения точек срединной поверхности оболочки u, w

$$u = u_0 + \frac{a_{12}}{h} V + \eta W, \qquad w = \frac{a_{33} R}{h} \frac{dV}{ds} \tag{5.3}$$

где η (1.14) имеет вид

$$\eta = \frac{2\mu K_{11}}{(1+\delta) C_{11}} \tag{5.4}$$

В качестве примера рассмотрим изгиб шарнирно опертой по торцам круговой цилиндрической оболочки длины l под действием внешней поверхностной нагрузки интенсивности

$$Z = -q_0 \sin \frac{\pi s}{l} \tag{5.5}$$

Граничные условия при этом будут

$$u = 0, \quad w = 0, \quad M_s = 0 \quad \text{при} \quad s = 0$$
$$T_s = 0, \quad w = 0, \quad M_s = 0 \quad \text{при} \quad s = l \tag{5.6}$$

С учетом (5.5) для F_z получаем

$$F_z = \frac{q_0 R l}{\pi} \left(1 - \cos \frac{\pi s}{l}\right) \tag{5.7}$$

Решение системы (5.2) с учетом (5.7), согласованное с граничными условиями (5.6), будет

$$W = A \cos \frac{\pi s}{l}, \qquad V = B \cos \frac{\pi s}{l} + C \tag{5.8}$$

где

$$A = -\frac{\pi q_0}{l \left(\dfrac{h}{a_{33} R^2} + \dfrac{2\delta^2 D_{11}}{1+\delta} \dfrac{\pi^4}{l^4}\right)}, \qquad B = -\frac{h l^2}{\pi^2 a_{33} R} A, \; C = -\frac{q_0 R l}{\pi} \tag{5.9}$$

Знак изгибающего момента

$$M_s = \frac{2\delta^2 D_{11}}{1+\delta} \frac{\pi}{l} A \sin \frac{\pi s}{l}$$

совпадает со знаком A. Как видно из (5.9), $A<0$, следовательно, и $M_s<0$. Поэтому для рассматриваемого примера следует принимать

$$\mu = \frac{a_{11}-a_{22}}{a_{11}+a_{22}} \tag{5.10}$$

Перемещения точек срединной поверхности оболочки u, w, удовлетворяющие граничным условиям (5.6), будут

$$u = -A\frac{\pi}{l}\left(\gamma_i - \frac{a_{12}}{a_{33}R}\frac{l^2}{\pi^2}\right)\left(1-\cos\frac{\pi s}{l}\right), \qquad w = A\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi s}{l} \tag{5.11}$$

Для завершения решения задачи остается выяснить вопрос коэффициента a_{33}, который связан со знаком напряжения σ_2. Для этого прежде всего следует выяснить, в данном примере σ_2 меняет свой знак по толщине оболочки или нет, так как приведенная в настоящей работе теория была построена в предположении, что σ_2 по толщине оболочки не меняет своего знака.

Из (1.10), вычисляя σ_2, находим

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= A\frac{\pi}{l}\left[\frac{l^2}{\pi^2 a_{33}R} + \frac{a_{12}(\gamma_i-\gamma)}{a_{11}a_{33}-a_{12}^2}\right]\sin\frac{\pi s}{l} \quad \text{при} \quad -\frac{h}{2}\leqslant\gamma\leqslant\gamma_i \\ \sigma_2 &= A\frac{\pi}{l}\left[\frac{l^2}{\pi^2 a_{33}R} + \frac{a_{12}(\gamma_i-\gamma)}{a_{22}a_{33}-a_{12}^2}\right]\sin\frac{\pi s}{l} \quad \text{при} \quad \gamma_i\leqslant\gamma\leqslant\frac{h}{2} \end{aligned} \tag{5.12}$$

Отсюда нетрудно установить, что если геометрические размеры оболочки удовлетворяют неравенству $hR/l^2 \leqslant 0.3$, то σ_2 не меняет знака по всей толщине оболочки и его знак совпадает со знаком A, т. е. $\sigma_2<0$. Поэтому следует здесь положить

$$a_{33} = a_{22} = \frac{1}{E^-}, \qquad a_{11} = \frac{1}{E^+}, \qquad a_{12} = -\frac{\nu^+}{E^+} = -\frac{\nu^-}{E^-} \tag{5.13}$$

Тогда для коэффициентов γ_i, δ и D_{11}, входящих в расчетные формулы, будем иметь

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{\sqrt{a_{11}a_{22}-a_{12}^2}-\sqrt{a_{22}^2-a_{12}^2}}{a_{11}a_{22}+a_{22}^2-2a_{12}^2}\frac{h}{2} \\ \delta &= \frac{2\sqrt{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{22}^2-a_{12}^2)}}{a_{11}a_{22}+a_{22}^2-2a_{12}^2} \\ D_{11} &= \frac{a_{22}(a_{11}a_{22}+a_{22}^2-2a_{12}^2)}{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)(a_{22}^2-a_{12}^2)}\frac{h^3}{24} \end{aligned} \tag{5.14}$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 10 IX 1968

Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԵՎ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԲԵՌՆԱՎՈՐՎԱԾ ՊՏՏՄԱՆ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ու մ

Աշխատանքում ընդունելով՝ թաղանթների տեսության մեջ հայտնի, դեֆորմացիայի չենթարկվող նորմալների հիպոթեզը, կառուցված է տարամոդուլ նյութերից պատրաստված և առանցքասիմետրիկ բեռնավորված պտտման թաղանթների տեսությունը։ Ստացված հավասարումները, ի տարբերություն սովորական իզոտրոպ նյութի դեպքում ստացվող համապատասխան հավասարումներից ոչ-գծային են։

Բերված ընդհանուր հավասարումներից, որպես մասնավոր դեպքեր, ստացված են համապատասխան հավասարումները՝ գնդային, կոնական և գլանային թաղանթների համար։

Վերջում՝ որպես օրինակ, լուծված է մի խնդիր գլանային թաղանթի վերաբերյալ։

A. A. KHACHATRIAN

ON THE THEORY OF AXISYMMETRICALLY LOADED ROTATORY SHELLS MADE FROM DIFFERENT MODUL MATERIAL

S u m m a r y

Accepting the hypothesis of nondeformable normals, the theory of axisymmetrically loaded rotatory shells made from different modul material is constructed.

In particular cases, the equations for spherical, conical and cylindrical shells are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория симметрично нагруженных слабомоментных оболочек вращения, изготовленных из разномодульных материалов. Инж. ж. АН СССР, МТТ, № 6, 1967.
2. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Теория слабомоментных оболочек, изготовленных из разномодульного материала. Прикл. механика. Отд. матем., мех. и киберн. АН УССР, т. V, в. 5, 1969.
3. *Амбарцумян С. А.* Осесимметричная задача круговой цилиндрической оболочки, изготовленной из материала, разносопротивляющегося растяжению и сжатию. Изв. АН СССР, Механика, 4, 1965.
4. *Лурье А. И.* Статика тонкостенных упругих оболочек. Гостехиздат, 1947.
5. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, 1961.