ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 3, 1969 Механика

М. М. МАНУКЯН

# ПЛОСКАЯ КОНТАКТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ НАЛИЧИИ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ

Решение плоской контактной задачи линейной теории ползучести без учета сил трения и сцепления дано в работе И. Е. Прокоповича [2], а с учетом сил трения—в работе [3]. Решению плоской контактной задачи нелинейной теории ползучести посвящены работы [4, 5, 6].

В настоящей работе приводится решение плоской контактной задачи линейной теории ползучести с учетом сил сцепления. В качестве исходной физической теории ползучести принята наследственная теория старения, предложенная Н. Х. Арутюняном [1].

В нашей работе показано, что решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил сцепления сводится к совместному решению связанных между собой двух интегральных уравнений с комплекснозначными ядрами. Получено решение этих интегральных уравнений. В качестве примера рассмотрена задача о давлении жесткого штампа с плоским основанием при наличии сил сцепления на полуплоскость, обладающую свойством ползучести.

## § 1. Постановка задачи и основные уравнения

Пусть два соприкасающихся между собой тела, которые обладают свойством ползучести, прижимаются один к другому под действием внешних сил, равнодействующая которых $P(t)$ перпендикулярна к оси $x$ и проходит через точку соприкосновения этих тел. Примем эту точку за начало координат. Предположим, что одно из этих сжимаемых тел жестко закреплено и что между этими телами вдоль контакта действуют силы сцепления, которые уравновешиваются силой $Q(t)$, направленной вдоль оси $x$. Соотношения, которым должны удовлетворять перемещения точек области контакта тел, при учете сил сцепления, будут

$$\begin{gathered} u_1^*(x,t) + u_2^*(x,t) = 0 \\ v_1^*(x,t) + v_2^*(x,t) = \delta^*(t) - f_1^*(x) - f_2^*(x) \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\delta^*(t) = \delta_1^*(t) + \delta_2^*(t)$ — сближение этих тел в направлении оси $oy$, $f_1^*(x)$ и $f_2^*(x)$ — уравнения поверхностей, ограничивающих первое и второе тела.

Согласно наследственной теории старения [1], соотношения, связывающие компоненты деформации ползучести и напряжения, в случае плоской задачи деформации имеют следующий вид:

$$\varepsilon_x^*(t) = \frac{\sigma_x(t) - \nu\sigma_y(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} [\sigma_x(\tau) -$$

$$- \nu\sigma_y(\tau)] \frac{\partial}{\partial\tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau$$

$$\varepsilon_y^*(t) = \frac{\sigma_y(t) - \nu\sigma_x(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} [\sigma_y(\tau) -$$

$$- \nu\sigma_x(\tau)] \frac{\partial}{\partial\tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \tag{1.2}$$

$$\gamma_{xy}^*(t) = 2(1+\nu) \left\{ \frac{\tau_{xy}(t)}{E(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \tau_{xy}(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \right.$$

где $E(t)$ — модуль упруго-мгновенной деформации, $C(t, \tau)$ — мера ползучести материала, зависящая от возраста материала и от продолжительности действия нагрузки, $\tau_1$ — возраст материала, $t$ — время.

Здесь принято, что коэффициент поперечного расширения при деформациях ползучести $\nu^*(t, \tau)$ равен коэффициенту поперечного расширения при упруго-мгновенных деформациях $\nu(t)$ и постоянен во времени, т. е.

$$\nu^*(t, \tau) = \nu(t) = \nu = \text{const} \tag{1.3}$$

Как известно [1], это равенство при линейной зависимости между напряжениями и деформациями приводит к равенству между упруго-мгновенными напряжениями, вызванными поверхностными силами и соответствующими напряжениями, вычисленными с учетом ползучести. Экспериментальные и теоретические исследования показывают, что принятые допущения (1.3) могут привести при определении напряжений, например, в бетонных конструкциях, к погрешностям, не превышающим 5%, т. е. к погрешностям, допустимым в технических расчетах [2]. Для обычного бетона $\nu = \frac{1}{6}$, $0 < \nu^* \leqslant \frac{1}{6}$.

Если упруго-мгновенные компоненты перемещения точек плоскости обозначить через $u(t)$ и $v(t)$, а соответствующие компоненты при ползучести—через $u^*(t)$ и $v^*(t)$, то из (1.2) следует, что между этими компонентами существует зависимость следующего вида:

$$u^*(t) = u(t) - \int_{\tau_1}^{t} E(\tau) u(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau$$

$$v^*(t) = v(t) - \int_{\tau_1}^{t} E(\tau) v(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \right] d\tau \tag{1.4}$$

Для решения нашей задачи мы пользуемся для перемещений $u(t)$ и $v(t)$ следующими формулами, выраженными через $p(x,t)$ и $q(x,t)$:

$$u(x,t) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(t)}\int_{-a}^{a}\operatorname{sign}(s-x)\,p(s,t)ds +$$

$$+\frac{2(1-\nu^2)}{\pi E(t)}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\,q(s,t)ds \tag{1.5}$$

$$v(x,t) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E(t)}\int_{-a}^{a}\ln\frac{1}{|x-s|}\,p(s,t)\,ds +$$

$$+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2E(t)}\int_{-a}^{a}\operatorname{sign}(s-x)\,q(s,t)\,ds$$

которые легко можно получить известным способом из решения задачи Фламана. Здесь $p(x,t)$ — интенсивность распределения контактного нормального давления, $q(x,t)$ — интенсивность касательных напряжений на участке контакта, $2a$ — ширина контакта, причем $-a\leqslant x\leqslant a$.

Подставляя выражения $u(x,t)$ и $v(x,t)$ из (1.5) в (1.4), получим

$$u^*(x,t) = -\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2}\left\{\frac{1}{E(t)}\int_{-a(t)}^{a(t)}\operatorname{sign}(s-x)\,p^*(s,t)\,ds -\right.$$

$$\left.-\int_{\tau_1}^{t}\int_{-a(\tau)}^{a(\tau)}\operatorname{sign}(s-x)p^*(s,\tau)\,ds\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]d\tau\right\}+$$

$$+\frac{2(1-\nu^2)}{\pi}\left\{\frac{1}{E(t)}\int_{-a(t)}^{a(t)}\ln\frac{1}{|x-s|}\,q^*(s,t)\,ds -\right.$$

$$\left.-\int_{\tau_1}^{t}\int_{-a(\tau)}^{a(\tau)}\ln\frac{1}{|x-s|}\,q^*(s,\tau)\,ds\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]d\tau\right\} \tag{1.6}$$

$$v^*(x,t) = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi}\left\{\frac{1}{E(t)}\int_{-a(t)}^{a(t)}\ln\frac{1}{|x-s|}\,p^*(s,t)\,ds -\right.$$

$$\left.-\int_{\tau_1}^{t}\int_{-a(\tau)}^{a(\tau)}\ln\frac{1}{|x-s|}\,p^*(s,\tau)\,ds\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]d\tau\right\}+$$

$$+\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2}\left\{\frac{1}{E(t)}\int_{-a(t)}^{a(t)}\operatorname{sign}(s-x)q^*(s,t)\,ds -\right.$$

$$
-\int_{\tau_1}^{t}\int_{-a(\tau)}^{a(\tau)}\operatorname{sign}(s-x)q^*(s,\tau)ds\,\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{E(\tau)}+C(t,\tau)\right]d\tau\Bigg\}
$$

Здесь через $p^*(x, t)$ и $q^*(x, t)$ обозначены соответственно интенсивности нормальных и горизонтальных сил, действующих на точки границы полуплоскости с учетом ползучести.

Пользуясь соотношениями (1.1) и (1.6), для определения $p^*(x, t)$ и $q^*(x, t)$ получим следующие интегральные уравнения:

$$
\int_{-a(t)}^{a(t)}\left[\frac{\theta_1^*(t)}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}q^*(s,t)-\frac{\theta_2^*(t)}{2}\operatorname{sign}(s-x)p^*(s,t)\right]ds-
$$

$$
-\int_{\tau_1}^{t}\int_{-a(t)}^{a(\tau)}\left[\frac{\theta_3(t,\tau)}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}q^*(s,\tau)-\right.
$$

$$
\left.-\frac{\theta_4(t,\tau)}{2}\operatorname{sign}(s-x)p^*(s,\tau)\right]dsd\tau=0
$$

$$
\int_{-a(t)}^{a(t)}\left[\frac{\theta_1^*(t)}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}p^*(s,t)+\frac{\theta_2^*(t)}{2}\operatorname{sign}(s-x)q^*(s,t)ds\right]-
$$

$$
-\int_{\tau_1}^{t}\int_{-a(\tau)}^{a(\tau)}\left[\frac{\theta_3(t,\tau)}{\pi}\ln\frac{1}{|x-s|}p^*(s,\tau)+\frac{\theta_4(t,\tau)}{2}\operatorname{sign}(s-x)\times\right.
$$

$$
\left.\times q^*(s,\tau)\right]dsd\tau=C^*(t)-f_0(x) \tag{1.7}
$$

где

$$
\theta_1^*(t)=2\left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1(t)}+\frac{1-\nu_2^2}{E_2(t)}\right]
$$

$$
\theta_2^*(t)=\frac{(1+\nu_1)(1-2\nu_1)}{E_1(t)}+\frac{(1+\nu_2)(1-2\nu_2)}{E_2(t)}
$$

$$
\theta_3(t,\tau)=2\left[(1-\nu_1^2)\frac{\partial\delta_1(t,\tau)}{\partial\tau}+(1-\nu_2^2)\frac{\partial\delta_2(t,\tau)}{\partial\tau}\right]
$$

$$
\theta_4(t,\tau)=(1+\nu_1)(1-2\nu_1)\frac{\partial\delta_1(t,\tau)}{\partial\tau}+(1+\nu_2)(1-2\nu_2)\frac{\partial\delta_2(t,\tau)}{\partial\tau}
$$

$$
\delta_1(t,\tau)=\frac{1}{E_1(\tau)}+C_1(t,\tau),\qquad \delta_2(t,\tau)=\frac{1}{E_2(\tau)}+C_2(t,\tau) \tag{1.8}
$$

$f_0(x)=f_1^*(x)+f_2^*(x)$, $\quad C^*(t)$ — произвольная функция.

Для простоты изложения допустим, что коэффициенты поперечного расширения сжимаемых тел одинаковы, т. е.

$$
\nu_1=\nu_2=\nu \tag{1.9}
$$

Тогда (1.7) примет следующий вид:

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \left[ \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} q^*(s,t) - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) q^*(s,t) \right] ds -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \left[ \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} q^*(s,\tau) - \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) p^*(s,\tau) \right] K(t,\tau) ds d\tau =$$

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \left[ \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s,t) + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) q^*(s,t) \right] ds -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} \left[ \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} p^*(s,\tau) + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) q^*(s,\tau) \right] K(t,\tau) ds d\tau =$$

$$= \frac{C^*(t) - f_0(x)}{\theta_2(t)} \tag{1.10}$$

где

$$\theta_1(t) = 2(1-\nu^2) \left[ \frac{1}{E_1(t)} + \frac{1}{E_2(t)} \right]$$

$$\theta_2(t) = (1+\nu)(1-2\nu) \left[ \frac{1}{E_1(t)} + \frac{1}{E_2(t)} \right]$$

$$\lambda = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}, \qquad K(t,\tau) = \frac{\partial}{\partial\tau} \frac{\delta_1(t,\tau) + \delta_2(t,\tau)}{\dfrac{1}{E_1(t)} + \dfrac{1}{E_2(t)}} \tag{1.11}$$

Если ввести комплекснозначную функцию от вещественной переменной

$$\chi^*(s,t) = p^*(s,t) + iq^*(s,t) \tag{1.12}$$

то (1.10) можно будет представить в следующем виде:

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} K^*(x,s) \chi^*(s,t) ds -$$

$$- \int_{\tau_1}^{t} \int_{-a(\tau)}^{a(\tau)} K(t,\tau) K^*(x,s) \chi^*(s,\tau) ds d\tau = i \frac{C^*(t) - f_0(x)}{\theta_2(t)} \tag{1.13}$$

где

$$K^*(x,s) = i \frac{\lambda}{\pi} \ln \frac{1}{|x-s|} + \frac{1}{2} \operatorname{sign}(s-x) \tag{1.14}$$

Нетрудно видеть, что из (1.13), при отсутствии сил сцепления, получится уравнение И. Е. Прокоповича [2], а если предполагать, что $t = \tau_1$, т. е. что сжимающие тела упругие, то после некоторых преобразований можно показать, что (1.13) совпадает с уравнением Г. Я. Попова [8].

Интегральное уравнение (1.13) можно представить в более компактной форме—в виде следующих интегральных уравнений:

$$\omega(x, t) - \int_{\tau_1}^{t} K(t, \tau)\omega(x, \tau)d\tau = i\frac{C^*(t) - f_0(x)}{\theta_2(t)} \tag{1.15}$$

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} K^*(x, s)\chi^*(s, t)ds = \omega(x, t) \tag{1.16}$$

Таким образом, решение плоской контактной задачи теории ползучести с учетом сил сцепления, т. е. в сущности, отыскание неизвестной комплекснозначной функции $\chi^*(x, t)$, сводится к совместному решению связанных между собой двух интегральных уравнений (1.15) и (1.16).

## § 2. Решение основных интегральных уравнений (1.15) и (1.16)

Решение уравнения (1.15) можно написать в виде

$$\omega(x, t) = i\frac{C^*(t) - f_0(x)}{\theta_2(t)} + \int_{\tau_1}^{t} \left[ i\,\frac{C^*(\tau) - f_0(x)}{\theta_2(\tau)} \right] R(t, \tau)d\tau \tag{2.1}$$

где $R(t, \tau)$ — резольвента линейного интегрального уравнения с ядром $K(t, \tau)$.

Соотношение (2.1) можно представить в виде

$$\omega(x, t) = i\,[\gamma^*(t) - f_0(x)H^*(t)] \tag{2.2}$$

где

$$\gamma^*(t) = \frac{C^*(t)}{\theta_2(t)} - \int_{\tau_1}^{t} \frac{C^*(\tau)}{\theta_2(\tau)} R(t, \tau)d\tau \tag{2.3}$$

$$H^*(t) = \frac{1}{\theta_2(t)} + \int_{\tau_1}^{t} \frac{1}{\theta_2(\tau)} R(t, \tau)d\tau \tag{2.4}$$

Здесь $\gamma^*(t)$ — неизвестная функция, определяющаяся вообще из уравнения равновесия

$$P(t) + iQ(t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} [p^*(x, t) + iq^*(x, t)]dx \tag{2.5}$$

Подставляя выражение $\omega(x, t)$ из (2.2) в (1.16), получим

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} K^*(x, s)\chi^*(s, t)ds = i\,[\gamma^*(t) - f_0(x)H^*(t)] \tag{2.6}$$

Решение этого уравнения будет [7]

$$
\chi^*(x,t)=\frac{C(t)}{\pi(a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}}-i\,\frac{H^*(t)\lambda}{1-\lambda^2}\left\{f_0(x)+\right.
$$

$$
\left.+\frac{\lambda}{i\pi(a+x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(a-x)^{\frac{1}{2}-\gamma}}\int\limits_{-a(t)}^{a(t)}\frac{(a+u)^{\frac{1}{2}+\gamma}(a-u)^{\frac{1}{2}-\gamma}f'(u)du}{u-x}\right\} \tag{2.7}
$$

где

$$
\gamma=-\frac{i}{2\pi}\ln\frac{\lambda+1}{\lambda-1},\qquad C(t)-\text{произвольная функция.} \tag{2.8}
$$

Из (2.8) вытекает, что

$$
\mathrm{ctg}\,\pi\gamma=i\lambda,\qquad \cos\pi\gamma=\frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2-1}},\qquad \sin\pi\gamma=-\frac{i}{\sqrt{\lambda^2-1}} \tag{2.9}
$$

Произвольная функция $C(t)$ определяется из уравнений равновесия.

Приравнивая действительные части и коэффициенты мнимой части уравнения (2.7), получим выражения $p^*(x,t)$ и $q^*(x,t)$.

## § 3. Определение функции $H^*(t)$

Если для меры ползучести принять выражения [1]

$$
\begin{gathered}
C_1(t,\tau)=\left(\frac{A_2}{\tau}+C_1\right)\left[1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}\right]\\
C_2(t,\tau)=\left(\frac{A_3}{\tau}+C_2\right)\left[1-e^{-\gamma_1(t-\tau)}\right]
\end{gathered} \tag{3.1}
$$

где $A_2$, $A_3$, $C_1$, $C_2$, $\gamma_1$ — постоянные параметры, определяемые из опытов, то выражение неизвестной функции $H^*(t)$ можно будет представить в виде

$$
H^*(t)=\frac{1}{\theta_2(\tau_1)}\left[1-\gamma_1\left(C_0+\frac{A_1}{\tau_1}\right)\int\limits_{\tau_1}^{t}\frac{e^{-\gamma(\tau)}}{\theta_2(\tau)}\,d\tau\right] \tag{3.2}
$$

где

$$
C_0=d(C_1+C_2),\qquad A_1=d(A_2+A_3),\qquad d=\frac{2(1-\nu^2)}{\pi} \tag{3.3}
$$

$$
\gamma(\tau)=\gamma_1\int\limits_{\tau_1}^{\tau}\left[1+\left(C_0+\frac{A_1}{\tau}\right)\frac{1}{\theta_2(\tau)}\right]d\tau \tag{3.4}
$$

Из формулы (3.2) следует, что функция $H^*(t)$ принимает максимальное значение при $t=\tau_1$ и минимальное при $t=\infty$.

Если предполагать, что модули мгновенной деформации материала постоянны, т. е.

$$E_1(t) = E_1 = \text{const}, \qquad E_2(t) = E_2 = \text{const} \tag{3.5}$$

то выражение для $H^*(t)$ примет следующий вид [1]:

$$H^*(t) = \frac{1}{\theta_2(t)}\left[1 - \gamma_1 b E_1\left(C_0 + \frac{A_1}{\tau_1}\right) e^{r\tau_1}\tau_1^{p_1}\frac{\Phi(rt, p_1) - \Phi(r\tau_1, p_1)}{r^{1-p_1}}\right] \tag{3.6}$$

где

$$\frac{E_2}{E_1} = m, \quad \frac{\varphi_2(\tau_1)}{\varphi_1(\tau_1)} = n, \quad \varphi_1(\tau) = C_1 + \frac{A_2}{\tau}, \quad \varphi_2(\tau) = \frac{A_3}{\tau} + C_2$$

$$r = \gamma_1(1 + b\, C_1 E_1), \quad p_1 = b\gamma_1 A_2 E_1, \quad b = \frac{1+n}{1+m}\, m$$

Здесь

$$\Phi(\xi, p_1) = \int_0^\xi \frac{e^{-\tau}}{\tau^{p_1}}\, d\tau \tag{3.7}$$

является неполной гамма-функцией.

Таким образом, значение неизвестной функции $H^*(t)$ найдено.

## § 4. О давлении жесткого штампа на полуплоскость

В качестве примера рассмотрим задачу о давлении жесткого штампа с прямолинейным основанием на полуплоскость, находящуюся в условиях ползучести с учетом сил сцепления.

Пусть жесткий штамп прижимается к полуплоскости силой $P(t)$. Тогда будем иметь

$$f_0(x) = 0 \tag{4.1}$$

и интегральное уравнение (1.15) примет вид

$$\omega(t) - \int_{\tau_1}^{t} K(t, \tau)\omega(\tau)d\tau = i\,\frac{C^*(t)}{\theta_2(t)} \tag{4.2}$$

Решение этого интегрального уравнения будет

$$\omega(t) = i\,\frac{C^*(t)}{\theta_2(t)} + i\int_{\tau_1}^{t}\frac{C^*(\tau)}{\theta_2(\tau)}\, R(t, \tau)d\tau \tag{4.3}$$

Тогда (1.16) примет следующий вид:

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} K^*(x, s)\chi^*(s, t)ds = \omega(t) \tag{4.4}$$

Решение уравнения (4.4), согласно (2.7), будет иметь вид

$$\chi^*(x, t) = \frac{C(t)}{\pi(a + x)^{\frac{1}{2}+\gamma}(a - x)^{\frac{1}{2}-\gamma}} \tag{4.5}$$

Произвольная функция $C(t)$ зависит от вида функции $\omega(t)$, то есть функции, характеризующей перемещения точек полуплоскости под штампом.

Определив произвольную функцию $C(t)$ и отделив в правой части (4.5) действительную и мнимую части, мы определим нормальное и касательное напряжения под штампом $p^*(x,t)$ и $q^*(x,t)$. Для этого, пользуясь соотношениями (1.14), (2.8) и (2.9), перепишем интегральное уравнение (4.4) в следующем виде:

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} \left| \ln \frac{1}{|x-s|} - i\frac{\pi}{2} \operatorname{th}\pi\mu \operatorname{sign}(s-x) \right| [p^*(s,t) + iq^*(s,t)]ds = \omega(t) \quad (4.6)$$

где

$$\mu = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\lambda+1}{\lambda-1} = \frac{1}{2\pi} \ln(3-4\nu) \quad (4.7)$$

Из (2.8) и (4.7) следует, что $\gamma = -i\mu$. Тогда (4.5) примет вид

$$\chi^*(x,t) = p^*(x,t) + iq^*(x,t) = C(t)(a-x)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(a+x)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \quad (4.8)$$

Для простоты выкладок, в дальнейших рассуждениях предполагаем, что функция $C(t)$, характеризуемая перемещениями точек полуплоскости под штампом, складывается из двух слагаемых: $C_1(t)$, зависящего только от вертикального перемещения, и $C_2(t)$, зависящего только от горизонтального перемещения, то есть

$$C(t) = C_1(t) + C_2(t) \quad (4.9)$$

Принимая во внимание (4.9), в соотношении (4.6) отделим действительную и мнимую части. Получим, что

$$p^*(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \left[ C_1(t)\cos\left(\mu\ln\frac{a+x}{a-x}\right) - \right.$$
$$\left. - C_2(t)\sin\left(\mu\ln\frac{a+x}{a-x}\right) \right] \quad (4.10)$$

$$q^*(x,t) = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \left[ C_2(t)\cos\left(\mu\ln\frac{a+x}{a-x}\right) + \right.$$
$$\left. + C_1(t)\sin\left(\mu\ln\frac{a+x}{a-x}\right) \right] \quad (4.11)$$

С другой стороны, должны выполняться условия равновесия

$$\int_{-a(t)}^{a(t)} p^*(x,t)dx = P(t), \quad \int_{-a(t)}^{a(t)} q^*(x,t)dx = Q(t)$$

Удовлетворив этим условиям равновесия, определим произвольные функции $C_1(t)$ и $C_2(t)$.

$$C_1(t) = \frac{\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi} P(t), \qquad C_2(t) = \frac{\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi} Q(t) \quad (4.12)$$

В частности, когда $C_2(t) = 0$, что соответствует случаю, когда соотношения (4.10) и (4.11) принимают более простой вид

$$p^*(x,t) = \frac{\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi} P(t) \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \cos\left(\mu \ln \frac{a+x}{a-x}\right) \tag{4.13}$$

$$q^*(x,t) = \frac{\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi} P(t) \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sin\left(\mu \ln \frac{a+x}{a-x}\right) \tag{4.14}$$

Из этих соотношений видно, что контактные напряжения меняют знак бесконечно много раз, когда $x$ приближается к концам штампа ($x = -a$, $x = a$). Следовательно, имеет место явление, обнаруженное в соответствующей задаче классической теории упругости Абрамовым [9].

Легко убедиться в том, что те точки, в которых контактные напряжения начинают менять знак, очень близко расположены к краям штампа. Но контактные напряжения, согласно соотношениям (4.13) и (4.14), у краев штампа бесконечны. В действительности же на краях штампа возникают пластические зоны и происходит перераспределение контактных давлений.

Մ. Մ. ՄԱՆՈՒԿՅԱՆ

## ՍՈՂՔԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՀԱՐԹ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐԸ ԿԱՊԱԿՑՈՒԹՅԱՆ ՈՒԺԵՐԻ ԱՌԿԱՅՈՒԹՅԱՄԲ


### Ամփոփում

*Աշխատանքում բերվում է սողքի տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծումը, երբ հաշվի են առնվում կապակցության ուժերը։ Որպես սողքի հիմնական տեսություն, ընդունված է՝ Ն. Խ. Հարությունյանի առաջարկած, ժառանգականության գծային տեսությունը, նյութի ծերացման հաշվառումով։*

*Սողքի տեսության հարթ կոնտակտային խնդրի լուծումը, առանց շփման և կապակցության ուժերի հաշվառման, տրված է Ի. Ե. Պրոկոպովիչի աշխատանքում [2], իսկ շփման ուժերի հաշվառումով՝ [3] աշխատանքում։*

*Դիտարկվող կոնտակտային խնդրի լուծումը բերվում է (1.15) և (1.16) կոմպլեքսային կորիզներով ինտեգրալ հավասարումների համատեղ լուծմանը։ Այդ հավասարումների սիստեմի լուծումը ներկայացվում է կոմպլեքս փոփոխականի ֆունկցիայի տեսքով։ Այստեղից ստացվում են $q^*(x, t)$ և $p^*(x, t)$ կոնտակտային ճնշումների արտահայտությունները։*

*Որպես կիրառություն, քննարկվում է հարթ հիմք ունեցող կարծր շտամպի ճնշումը, սողքի պայմաններում գտնվող, կիսահարթության վրա, երբ հաշվի են առնվում կապակցության ուժերը։*

M. M. MANOUKIAN

# THE PLANE CONTACT PROBLEM OF THE THEORY OF CREEP WITH COHERENT FORCES

Summary

In the paper the solution of plane contact problem of the theory of creep with coherent forces is obtained. The solution of this problem is reduced to solve the two integral equations with complex value kernels connected with one another.

The solutions of these equations are obtained. As an example the problem of pressure in the semiplane of a rigid punch with a plane foundation is examined.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат. М., 1956.
2. *Прокопович И. Е.* О решении плоской контактной задачи с учетом ползучести. ПММ, т. XX, вып. № 6, 1956.
3. *Ширинкулов Т.* К решению плоской контактной задачи теории ползучести при наличии сил трения. Изв. АН Уз. ССР, сер. техн. наук, № 5, 1963.
4. *Арутюнян Н. Х.* Плоская контактная задача теории ползучести. ПММ, т. 23, вып. 5, 1959.
5. *Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Контактная задача теории ползучести с учетом сил трения. МПП, т. 27, вып. 5, 1963.
6. *Манукян М. М.* Контактная задача теории неустановившейся ползучести с учетом сил трения. Изв. АН СССР, сер. физ.-мат. наук, т. 16, № 6, 1963.
7. *Попов Г. Я.* Плоская контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления или трения. ПММ, т. 30, вып. 3, 1966.
8. *Попов Г. Я.* К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. 16, № 2, 1963.
9. *Абрамов В. М.* Проблема контакта упругой полуплоскости с абсолютно жестким фундаментом при учете сил трения. Докл. АН СССР, т. XVII, № 4, 1937.