ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 3, 1969 Механика

А. Г. ГУРИН, П. Ф. САБОДАШ

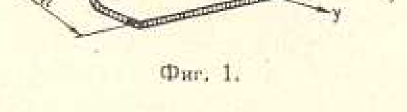
О РЕАКЦИИ ТОНКОЙ УПРУГОЙ ПЛАСТИНКИ ОГРАНИЧЕННЫХ РАЗМЕРОВ НА ДВИЖУЩУЮСЯ НАГРУЗКУ

В настоящей работе в линейной постановке решается плоская двухмерная стационарная задача о колебании тонкой упругой пластинки постоянной толщины и ограниченной в одном измерении. Допускается, что движение пластинки возбуждается фронтом нормального к пластинке давления, который перемещается вдоль ее поверхности с постоянной скоростью. Получено точное решение поставленной задачи для свободно опертых краев пластинки.

В работе [1] рассматривалась двухмерная задача о распространении волн в упругой полосе конечной толщины, вызванных источником нормального давления, который перемещается вдоль одной из границ полосы с постоянной скоростью. Получено точное решение в виде рядов по падающим и отраженным плоским волнам. Для случая безграничной тонкой упругой пластинки, покрывающей акустическое сжимаемое полупространство, точное решение построено в работе [2].

Монография [3] содержит решение ряда нестационарных динамических задач о распространении волн в сжимаемых средах (упругих и акустических) при воздействии на их поверхности нормального давления, фронт которого перемещается с произвольной скоростью.

Предположим, что вдоль поверхности тонкой упругой пластинки (см. фиг.) в отрицательном направлении оси x с постоянной скоростью v перемещается фронт нормального давления. Считая пластинку ограниченной в направлении оси y, определить прогибы точек ее поверхности с течением времени.



Фиг. 1.

Совместим срединную поверхность пластинки с плоскостью неподвижной декартовой прямоугольной системы координат. В этой системе отсчета прогибы срединной поверхности $w\ (x', y', t')$ удовлетворяют известному дифференциальному уравнению (пренебрегается влияние инерции сдвига и углов поворота) [4]

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x'^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x'^2 \partial y'^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y'^4}\right) = -\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t'^2} + Df(x' + vt', y') \tag{1}$$

$$D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{1}$$

где D, как обычно, означает цилиндрическую жесткость пластинки, h—ее толщина, ν—коэффициент Пуассона, E—модуль Юнга, ρ—плотность материала пластинки.

Фронт нормального давления перемещается вдоль поверхности пластинки с постоянной скоростью v. Относительно функции нагрузки принимается следующее допущение. В системе координат, связанной с движущимся фронтом, профиль давления не меняется с течением времени. Кроме того, предполагается четность функции относительно переменной y'. Все дальнейшие рассуждения удобно вести в подвижной системе координат xOy, которая связана с неподвижными координатами следующими соотношениями:

$$x=x'+vt', \quad y=y', \quad t=t' \tag{2}$$

Функция внешнего давления $f(x,y)$ обращается в нуль при $x<0$ для произвольного значения y.

В системе координат, связанной с движущимся источником, математически задача ставится следующим образом. В области $|y|<l$ $-\infty<x<+\infty$ построить решение уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}+\alpha^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=f(x,y)$$

$$\alpha^2=\frac{\rho h v^2}{D} \quad \text{при } |y|<l \quad -\infty<x<+\infty \tag{3}$$

удовлетворяющее граничным условиям свободного опирания на границах полосы

$$w(x,y)=0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}=0 \qquad \text{при } y=\pm l, \ -\infty<x<+\infty \tag{4}$$

и условиям затухания решения на бесконечности. Начальные условия в такой постановке отсутствуют, так как считается, что нагрузка перемещалась бесконечно долго, то-есть разыскивается установившееся движение тонкой упругой пластинки постоянной толщины.

Решение поставленной задачи будем строить следующим образом. Вместо функции прогибов $w(x,y)$ введем в рассмотрение функцию $\overline{w}(x,m)$, связанную с $w(x,y)$ следующей зависимостью:

$$\overline{w}(x,m)=\int\limits_{-l}^{+l} w(x,y)\cos\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2l}\right]dy, \ m=0,1,2,3,\cdots \tag{5}$$

Если к уравнению (3) применить интегральное преобразование (5), то мы получаем обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$\frac{d^4\overline{w}}{dx^4}+\left[\alpha^2-\frac{\pi^2(2m+1)^2}{2l^2}\right]\frac{d^2\overline{w}}{dx^2}+\frac{\pi^4(2m+1)^4}{16l^4}\overline{w}=\overline{f}(x,m)$$

$$\overline{f}(x,m)=\int_{-l}^{+l}f(x,y)\cos\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2l}\right]dy \tag{6}$$

Записанное в виде (6) уравнение нашей задачи только вторым членом отличается от уравнения балки—полоски, лежащей на акустическом полупространстве [2].

Общее решение этого уравнения, выраженное через четыре произвольные постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 имеет вид

$$\overline{w}(x,m)=C_1\exp(i\alpha_m x)+C_2\exp(-i\alpha_m x)+C_3\exp(i\beta_m x)+$$

$$+C_4\exp(-i\beta_m x)+\frac{1}{\alpha_m\beta_m(\beta_m^2-\alpha_m^2)}\int_0^x\overline{f}(\xi,m)\left\{\beta_m\sin[\alpha_m(x-\xi)]-\right.$$

$$\left.-\alpha_m\sin[\beta_m(x-\xi)]\right\}d\xi \tag{7}$$

где обозначено

$$\alpha_m,\beta_m=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\alpha^2-\frac{\pi^2(2m+1)^2}{2l^2}\mp\alpha\sqrt{\alpha^2-\frac{\pi^2(2m+1)^2}{l^2}}\right]$$

Первая часть решения (7) описывает свободные колебания пластинки, которые накладываются на возмущенное движение, вызванное движущимся источником.

Прогибы срединной поверхности пластины неограниченно возрастают, если значения α_m и β_m между собой совпадают. Это требование приводит к равенству

$$\alpha^2-\frac{\pi^2(2m+1)^2}{l^2}=0$$

что дает следующее значение критической скорости движения нагрузки:

$$v_{\text{кр}}=\frac{\pi(2m+1)h}{2l}\sqrt{\frac{E}{3\rho(1-\nu^2)}} \tag{8}$$

Следует заметить, что $v_{\text{кр}}$ принимает ряд дискретных значений, при которых в упругой пластине наблюдаются резонансные явления. Кроме того, $v_{\text{кр}}$ зависит от геометрических характеристик пластины. В случае балки-полоски [2] критическая скорость принимает, вообще говоря, два значения.

Функция (7), описывающая прогиб срединной поверхности пластинки, должна быть действительной, поэтому произвольные постоянные интегрирования следует подчинить зависимостям

$$C_1 = C_2 = \frac{A_m}{2}, \quad C_3 = C_4 = \frac{B_m}{2} \tag{9}$$

где A_m и B_m — произвольные постоянные. Тогда часть решения (7), описывающая свободные колебания, принимает вид

$$A_m \cos(\alpha_m x) + B_m \cos(\beta_m x) \tag{10}$$

Можно построить более общее решение задачи, используя принцип наложения, а именно:

$$w(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \overline{w}(x, m) \cos\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2l}\right] = \sum_{m=0}^{\infty} \Big\{ A_m \cos(\alpha_m x) +$$

$$+ B_m \cos(\beta_m x) + \frac{1}{\alpha_m \beta_m (\beta_m^2 - \alpha_m^2)} \int_0^x \overline{f}(\xi, m) \Big[\beta_m \sin \alpha_m (x - \xi) -$$

$$- \alpha_m \sin \beta_m (x - \xi) \Big] d\xi \Big\} \cos\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2l}\right] \tag{11}$$

Следует заметить, что если от решения (11) требовать затухания при $x \to \pm \infty$, то произвольные постоянные A_m и B_m следует положить равными нулю. Если же интересоваться просто ограниченными на бесконечности решениями, то выражения для прогибов срединной поверхности можно представить в виде

$$w_1(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \Big[A_m \cos(\alpha_m x) + B_m \cos(\beta_m x) \Big] \cos\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2l}\right] \quad \text{при } x < 0 \tag{12}$$

$$w_2(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} \Big\{ A_m \cos(\alpha_m x) + B_m \cos(\beta_m x) +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_m \beta_m (\beta_m^2 - \alpha_m^2)} \int_0^x \overline{f}(\xi, m) \Big[\beta_m \sin \alpha_m (x - \xi) -$$

$$- \alpha_m \sin \beta_m (x - \xi) \Big] d\xi \Big\} \cos\left[\frac{\pi(2m+1)y}{2l}\right] \quad \text{при } x > 0 \tag{13}$$

Заметим, что в соотношениях (12) и (13) постоянные A_m и B_m остаются неопределенными. Следовательно, решение поставленной задачи в классе ограниченных решений определяется с точностью до выражения (12), т. е. с точностью до свободных колебаний пластинки.

В качестве примера вычислим прогибы пластинки в предположении, что внешняя нагрузка за движущимся фронтом изменяется по закону

$$f(x, y) = H(x)\, e^{-\omega x} \left[1 - \left(\frac{y}{l}\right)^2 \right] \tag{14}$$

где $H(x)$ означает единичную функцию Хевисайда, ω — положительная постоянная. Внешняя нагрузка, преобразованная по формуле (5), записывается в следующем виде:

$$\overline{f}(x, m) = \frac{32 l e^{-\omega x} H(x)}{\pi^3 (2m+1)^3 D} \tag{15}$$

Окончательно прогибы пластинки определяются по формулам

$$w_1(x, y) = 0 \quad \text{при } x < 0$$

$$w_2(x, y) = \frac{32 l}{\pi^3 D} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^3 \alpha_m \beta_m (\beta_m^2 - \alpha_m^2)} \left[\frac{\beta_m}{\omega^2 + \alpha_m^2} (\omega \sin \alpha_m x - \right.$$

$$- \alpha_m \cos \alpha_m x) - \frac{\alpha_m}{\omega^2 + \beta_m^2} (\omega \sin \beta_m x - \beta_m \cos \beta_m x) +$$

$$\left. + \frac{\alpha_m \beta_m (\beta_m^2 - \alpha_m^2) e^{-\omega x}}{(\omega^2 + \alpha_m^2)(\omega^2 + \beta_m^2)} \right] \cos \left[\frac{\pi (2m+1) y}{2l} \right] \quad \text{при } x > 0 \tag{16}$$

Решение (16) непрерывно при $x = 0$. Амплитуды последующих гармоник убывают. На решение (16) можно наложить свободные колебания.

Аналогичным образом может быть решена задача и при других граничных условиях, например, для случая, когда кромки $|y| = l$ пластины жестко заделаны.

Ордена Ленина
Центральный научно-исследовательский
институт машиностроения

Поступила 30 VII 1968

Լ. Գ. ԳՈՒՐԻՆ ԵՎ Պ. Ֆ. ՍԱԲՈԴԱՇ

ՍԱՀՄԱՆԱՓԱԿ ՉԱՓԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԲԱՐԱԿ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԱԼԻ ՀԱԿԱԶԴՈՒՄԸ ՇԱՐԺՎՈՂ ԲԵՌԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում է մի կողմից սահմանափակ, բարակ, հաստատուն հաստությամբ, առաձգական սալի վարքը՝ նրա մակերևույթին ուղղահայաց, ճնշման ճակատի ազդեցության տակ, երբ վերջինս շարժվում է հաստատուն արագությամբ։

Ստացված է նշված դրվածքով խնդրի ճշգրիտ լուծումը շարքերով։

L. G. GURIN, P. F. SABODASH

THE RESPONCE OF A THIN ELASTIC PLATE OF FINITE DIMENSIONS TO MOVING LOADS

S u m m a r y

In this paper the disturbances produced by moving loads in an elastic plate of finite dimensions have been considered.

Exact solutions have been obtained for the displacement of middle plane points of the plate.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сабодаш П. Ф.* О поведении упругой полосы при движении вдоль ее границы нормального давления. Инж. ж., т. V, вып. 4, 1965.
2. *Сабодаш П. Ф., Филиппов И. Г.* Об одной динамической задаче для тонкой упругой пластинки. Прикл. механика, т. III, вып. 6, 1967.
3. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды с ударными волнами. Изд. АН Арм. ССР, Ереван, 1961.
4. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.