ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 3, 1969 Механика

ЛИВЮ ЛИБЕРСКУ

# О ФИЗИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ НЕЛИНЕЙНО-УПРУГОЙ ТЕОРИИ ТОНКИХ СЛОИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

1. В последнее время растет интерес к теории многослойных оболочек. Недавно появился ряд работ, в которых дается широкий обзор полученных в этой области результатов [1]—[3]. Однако, развитие физически нелинейной теории оболочек не соответствует важности этой задачи*.

В физико-нелинейной теории упругих, тонких, слоистых оболочек статические и геометрические уравнения, а также и граничные условия тождественны соответствующим уравнениям и условиям физическо-линейной теории, и единственные уравнения, которые отличаются, суть физические уравнения.

Поэтому, в целях формулировки физико-нелинейной теории упругих, тонких, слоистых оболочек, необходимо вывести только физические уравнения.

Эти уравнения будут выведены в рамках следующих гипотез:

а) считается, что для всего пакета оболочки в целом справедлива гипотеза Лява-Кирхгоффа;

б) слои соединены жестко, т. е. полностью устранены скольжения в поверхностях их разделения;

в) механическое поведение каждого из $p$ слоев постоянной толщины, из которых составлена оболочка, геометрически—линейно, но физически—нелинейно.

2. Нелинейно-упругие уравнения для малых деформаций изотропного тела могут быть написаны в следующем виде [6], [7]:

$$\sigma^{ij} = \Phi_1(K_1, K_2)g^{ij} + \Phi_2(K_1, K_2)e^{ij} \tag{2.1}$$

где $\sigma^{ij}$ — симметричный тензор напряжений; $e_{ij}$ — тензор деформаций; $g_{ij}$ — метрический ковариантный тензор, соответствующий пространству; $\Phi_A(A=1, 2)$ — функция, выражающаяся при помощи инвариантов $K_A$ посредством соотношений [8]

$$\Phi_1 = \frac{\Delta}{\Gamma+1} F_{\Delta\Gamma} K_1^{\Delta-1} K_2^{\Gamma+1} + L_\Delta K_1^\Delta \tag{2.2}$$

$$\Phi_2 = F_{\Delta\Gamma} K_1^\Delta K_2^\Gamma$$

где $\Delta$, $\Gamma = 0, 1, 2, \ldots$, суммирование распространено на те члены, в ко-

* Насколько известно автору, физически-нелинейная теория неоднородных оболочек и пластин была развита в работах [4], [5], [14] и [15].

торых один из индексов повторяется; $F^{(j)}_{\Delta\Gamma}$, $L^{(j)}_{\Delta}$ — константы материала $j$-го слоя; $K_1$ и $K_2$ — независимые инварианты $e_{ij}$, определенные, как

$$K_1 = e^i_i, \qquad K_2 = \frac{1}{2} e^{ij} e_{ij} \tag{2.3}$$

Степени инвариантов $K_1$ и $K_2$ могут быть выражены посредством следующих выражений:

$$K_1^{\Delta} = \sum_{q=0}^{\infty} z^q \overset{(q)}{\underset{\Delta}{C}}, \qquad K_2^{\Gamma} = \sum_{q=0}^{\infty} z^q \overset{(q)}{\underset{\Gamma}{D}}$$

$$K_1^{\Delta} K_2^{\Gamma} = \sum_{q=0}^{\infty} z^q \overset{(q)}{\underset{\Delta\Gamma}{\Lambda}} \tag{2.4}$$

коэффициенты которых $\overset{(q)}{\underset{\Delta}{C}}$, $\overset{(q)}{\underset{\Gamma}{\Gamma}}$, $\overset{(q)}{\underset{\Delta\Gamma}{\Lambda}}$ определены в [8].

Имея в виду, что ненулевые компоненты тензора деформации трехразмерной среды оболочки определены в рамках гипотезы Лява-Кирхгоффа, как [9]:

$$2e_{\alpha\beta} = \mu^{\rho}_{\alpha}(\gamma_{\rho\beta} + z\varkappa_{\rho\beta}) + \mu^{\rho}_{\beta}(\gamma_{\rho\alpha} + z\varkappa_{\rho\alpha}) \tag{2.5}$$

где $\gamma_{\alpha\beta}$, $\varkappa_{\alpha\beta}$ — тензоры деформации (тангенциальной, соответственно изгибной) исходной поверхности, определенной как

$$\gamma_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta} W \tag{2.6}$$

$$\varkappa_{\alpha\beta} = -(W_{,\alpha} + b^{\lambda}_{\alpha} V_{\lambda})|_{\beta} \tag{2.6}$$

$\mu^{\rho}_{\alpha} = \delta^{\rho}_{\alpha} - z b^{\rho}_{\alpha}$ — тензор Краусса; $b_{\alpha\beta}$ — тензор второй квадратичной фундаментальной формы исходной поверхности; запятая и следующий за ней индекс $i$ означают дифференцирование по координате $x^i$; вертикальная черта — ковариантное дифференцирование по метрике исходной поверхности. Инварианты $K_1$ и $K_2$ могут быть выражены

$$K_1 = \sum_{q=0}^{\infty} \overset{(q)}{M} z^q, \qquad K_2 = \sum_{q=0}^{\infty} \overset{(q)}{N} z^q \tag{2.7}$$

где

$$\overset{(q)}{M} = \sum_{m=0}^{2} \overset{(q-m)}{g^{\gamma\delta}} \overset{(m)}{e_{\gamma\delta}}, \qquad \overset{(q)}{N} = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{t=0}^{2} \sum_{s=0}^{2} \overset{(q-r-s-t)}{g^{\alpha m}} \times \overset{(r)}{g^{\beta\rho}} \overset{(s)}{e_{m\rho}} \overset{(t)}{e_{\alpha\beta}} \tag{2.8}$$ *

В этих соотношениях $g^{\alpha\beta}$ — метрический контрвариантный тензор пространства оболочки, имеющий следующий вид:

* Без специальных оговорок греческие индексы (малые) могут принимать значения 1, 2; латинские индексы (малые) — значения 1, 2, 3. Это условие не применяется к нумерационным индексам, написанным в скобках.

$$g^{\alpha\beta} = \sum_{m=0}^{\infty} \overset{(m)}{g}{}^{\alpha\beta} z^m, \quad \text{где [9]}$$

$$\overset{(m)}{g}{}^{\alpha\beta} = (m+1)\overset{(m)}{b}{}^{\alpha\beta}, \quad (\overset{(m)}{b}{}^{\alpha\beta} = \overset{(m-1)}{b_\rho^\alpha}\, b^{\rho\beta}) \tag{2.9}$$

и

$$e_{\alpha\beta} = \sum_{n=0}^{2} \overset{(n)}{e}_{\alpha\beta} z^n$$

$\overset{(n)}{e}_{\alpha\beta}$ выражены в случае принятия гипотезы Лява-Кирхгоффа через

$$\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\beta} + \gamma_{\beta\alpha})$$

$$\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\varkappa_{\alpha\beta} + \varkappa_{\beta\alpha} - b_\alpha^\rho \gamma_{\rho\beta} - b_\beta^\rho \gamma_{\rho\alpha}) \tag{2.10}$$

$$\overset{(2)}{e}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}(b_\alpha^\gamma \varkappa_{\gamma\beta} + b_\beta^\gamma \varkappa_{\gamma\alpha})$$

3. В теории многослойных оболочек, состоящих из произвольного наложения $p$ изотропных слоев, в качестве исходной поверхности выбирается поверхность, разделяющая два слоя, точнее—нижняя поверхность $r$-го слоя, если вести счет с внешней крайней поверхности оболочки ($p \geqslant r > 1$). Эта поверхность отсчета относится к системе криволинейных координат $x^\alpha$, $x^3 \equiv z$ является нормальной координатой к исходной поверхности.

Учитывая, что слой $j$ удален от исходной поверхности на дистанцию $\xi_{(j)}$ и $\xi_{(j-1)}$, моменты напряжения нулевого и единичного порядка, отнесенные к исходной поверхности, определены в [10], как

$$L_{(n)}^{\omega\gamma} = \sum_{j=1}^{r} \int_{\xi_{(j-1)}}^{\xi_{(j)}} \mu \overset{\omega\lambda}{\sigma_{(j)}} \mu_\lambda^\gamma z^n dz + \sum_{j=r+1}^{p} \int_{-\xi_{(j)}}^{-\xi_{(j-1)}} \mu \overset{\omega\lambda}{\sigma_{(j)}} \mu_\lambda^\gamma z^n dz \tag{3.1}$$

где

$$\mu = \sqrt{\frac{g}{a}}, \quad (g = \det(g_{ij}), \quad a = \det(a_{\alpha\beta}))$$

$r$ и $p-r$—число слоев над и, соответственно, под исходной поверхностью отсчета; $L_{(0)}^{\omega\gamma}$, $L_{(1)}^{\omega\gamma}$— тензор тангенциальных усилий и, соответственно, моментов.

Во избежание слишком трудоемких расчетов, ограничимся рассмотрением случая пологих оболочек.

Учитывая в этом случае соотношения (2.1), (2.2), (2.4) и (3.1) и что в случае пологих оболочек

$$e_{\alpha\beta} = \overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} + z\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

где

$$\overset{(0)}{e}_{\alpha\beta} \equiv \gamma_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(V_\alpha|_\beta + V_\beta|_\alpha - 2b_{\alpha\beta}W\right)$$

$$\overset{(1)}{e}_{\alpha\beta} \equiv \varkappa_{\alpha\beta} = -W|_{\alpha\beta} \tag{3.3}$$

и поступая как в случае вывода физических уравнений линейной теории пологих оболочек (см. [12], [13]), получаем физические уравнения в следующем виде:

$$L_{(n)}^{\omega\tau} = A_{(n)}a^{\omega\tau} + A_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma}\gamma_{(\lambda\sigma)} + B_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma}\varkappa_{(\lambda\sigma)} \tag{3.4}$$

где

$$A_{(n)} = \sum_{j=1}^{r}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+1}\left(\xi_{(j)}^{P+n+1} - \xi_{(j-1)}^{P+n+1}\right)\left(\frac{\Delta}{\Gamma+1}F_{\Delta\Gamma}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta-1\,\Gamma+1}{\Lambda}} + L_\Delta^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta\,0}{\Lambda}}\right) -$$

$$-\sum_{j=r+1}^{p}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+1}\left((-\xi_{(j)})^{P+n+1} - (-\xi_{(j-1)})^{P+n+1}\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\Delta}{\Gamma+1}F_{\Delta\Gamma}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta-1\,\Gamma+1}{\Delta}} + L_\Delta^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta\,0}{\Lambda}}\right) \tag{3.5}$$

$$A_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+1}\left(\xi_{(j)}^{P+n+1} - \xi_{(j-1)}^{P+n+1}\right)F_{\Delta\Gamma}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta\,\Gamma}{\Lambda}}\left(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma} + a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=r+1}^{p}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+1}\left((-\xi_{(j)})^{P+n+1} - (-\xi_{(j-1)})^{P+n+1}\right)\times$$

$$\times F_{\Delta\Gamma}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta\,\Gamma}{\Lambda}}\left(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma} + a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda}\right)$$

$$B_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+2}\left(\xi_{(j)}^{P+n+2} - \xi_{(j-1)}^{P+n+2}\right)F_{\Delta\Gamma}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta\,\Gamma}{\Lambda}}\left(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma} + a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{j=r+1}^{p}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+2}\left((-\xi_{(j)})^{P+n+2} - (-\xi_{(j-1)})^{P+n+2}\right)\times$$

$$\times F_{\Delta\Gamma}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta\,\Gamma}{\Lambda}}\left(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma} + a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda}\right)$$

$$(n = 0,1)$$

представляют нелинейные жесткости, удовлетворяющие соотношениям симметрии,

$$A_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma} = A_{(n)}^{\gamma\lambda\omega\sigma} = A_{(n)}^{\omega\sigma\gamma\lambda}$$

$$B_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma} = B_{(n)}^{\gamma\lambda\omega\sigma} = B_{(n)}^{\omega\sigma\gamma\lambda}$$

В теории пологих оболочек, составленных из $2l+1$ изотропных слоев, симметрично расположенных по толщине*, выражения жесткостей (3.5) будут

$$A_{(n)}=\sum_{j=1}^{l+1}\sum_{P=0}^{\infty}\eta(P+n+1)\left(\frac{\Delta}{\Gamma+1}F_{\Delta\Gamma}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta-1\,\Gamma+1}{\Lambda}}+L_{\Delta}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta\ 0}{\Lambda}}\right)$$

$$A_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l+1}\sum_{P=0}^{\infty}\eta(P+n+1)F_{\Delta\Gamma}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta\,\Gamma}{\Lambda}}(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma}+a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda}) \tag{3.6}$$

$$B_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{l+1}\sum_{P=0}^{\infty}\eta(P+n+2)F_{\Delta\Gamma}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{\Delta\,\Gamma}{\Lambda}}(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma}+a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda})$$

$$(n=0,1)$$

где

$$\eta(Q)=\frac{1}{Q}(\xi_{(j)}^{Q}-\xi_{(j-1)}^{Q})(1^{Q}-(-1)^{Q}) \tag{3.7}$$

на основании чего

$$\eta(Q)=\frac{2}{Q}(\xi_{(j)}^{Q}-\xi_{(j-1)}^{Q}) \quad \text{для нечетного } Q,$$

$$\eta(Q)=0 \qquad \text{для четного } Q.$$

4. С практической точки зрения представляет интерес принять во внимание физические уравнения, которые являются приближениями уравнений (3.4), (3.6). Можно показать (см. и [8]), что степени $\overset{(m)}{e}_{\alpha\beta}$ в членах, содержащих коэффициенты материала $L_{\Delta}^{(j)}$ и $F_{\Delta\Gamma}^{(j)}$, определяются лишь индексами этих коэффициентов согласно нижеследующей таблице:

*Таблица 1*

| Коэффициент при | Степень, в которой появляется $\overset{(m)}{e}_{\alpha\beta}$ |
|---|---|
| $L_{\Delta}^{(j)}$ | $\Delta$ |
| $F_{\Delta\Gamma}^{(j)}$ | $\Delta+2\Gamma+1$ |

Обозначая через $_{K}L_{(n)}^{\alpha\beta}$, $(n=0,1)$ члены физических уравнений, которые содержат $\overset{(r)}{e}_{\alpha\beta}$ в степени $K$, физические уравнения $Q$-го порядка определяются как

* Под симметричностью понимаем как геометрическую симметричность, так и симметричность упругих свойств. В этом случае в качестве исходной поверхности выбрана срединная поверхность срединного слоя. Моменты n-го порядка $(n=0,1)$ выражены через [11]

$$L_{(n)}^{\omega\gamma}=\sum_{j=1}^{l+1}\left[\int_{\xi_{(j-1)}}^{\xi_{(j)}}\mu\sigma_{(j)}^{\omega\lambda}\mu_{\lambda}^{\gamma}z^{n}dz+\int_{-\xi_{(j)}}^{-\xi_{(j-1)}}\mu\sigma_{(j)}^{\omega\lambda}\mu_{\lambda}^{\gamma}z^{n}dz\right]$$

$$L_{(n)}^{\alpha\beta}=\sum_{K=1}^{Q}{}_{K}L_{(n)}^{\alpha\beta}=\sum_{K=1}^{Q}[{}_{K}A_{(n)}a^{\alpha\beta}+{}_{K}A_{(n)}^{\alpha\beta\sigma\lambda}\gamma_{(\sigma\lambda)}+{}_{K}B_{(n)}^{\alpha\beta\sigma\lambda}\varkappa_{(\sigma\lambda)}]$$
$$(n=0{,}1)$$

Для получения физических уравнений первого порядка, соответствующих теории тонких слоистых оболочек, согласно вышеуказанной таблице, необходимо сохранить $L_1^{(j)}$ и $F_{00}^{(j)}$ и устранить остальные $L_\Delta^{(j)}$ и $F_{\Delta\Gamma}^{(j)}$. Заменяя в соотношениях (3.4) и (3.5)

$$L_1^{(j)}=\frac{E_{(j)}\nu_{(j)}}{1-\nu_{(j)}^2},\qquad F_{00}^{(j)}=\frac{F_{(j)}}{1+\nu_{(j)}}\tag{4.2}$$

получим новые физические уравнения упруго-линейной теории тонких оболочек, составленных несимметрично из изотропных слоев.

Для получения, например, физических уравнений теории второго порядка необходимо определить только ${}_2L_{(n)}^{\alpha\beta}$ (${}_1L_{(n)}^{\alpha\beta}$ получены при помощи физических линейных уравнений, вывод которых был указан выше).

Для этой цели, в вышеуказанной таблице, необходимо удержать только $L_2^{(j)}$ и $F_{10}^{(j)}$ и устранить остальные $L_\Delta^{(j)}$ и $F_{\Delta\Gamma}^{(j)}$. Тогда мы получаем

$$ {}_2L_{(n)}^{\omega\gamma}={}_2A_{(n)}\,a^{\omega\gamma}+{}_2A_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma}\gamma_{(\sigma\lambda)}+{}_2B_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma}\varkappa_{(\sigma\lambda)}\tag{4.3*}$$

где

$$\begin{gathered}{}_2A_{(n)}=\sum_{j=1}^{r}\sum_{P=0}^{\infty}\Big[\frac{1}{P+n+1}\big(\xi_{(j)}^{P+n+1}-\xi_{(j-1)}^{P+n+1}\big)\times\\ \times\big(F_{10}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{0\,1}{\Lambda}}+L_2^{(j)}\overset{(P)}{\underset{2\,0}{\Lambda}}\big)\Big|-\sum_{j=r+1}^{p}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+1}\times\\ \times\big[(-\xi_{(j)})^{P+n+1}-(-\xi_{(j-1)})^{P+n+1}\big]\big(F_{10}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{0\,1}{\Lambda}}+L_2^{(j)}\overset{(P)}{\underset{2\,0}{\Lambda}}\big)\Big]\end{gathered}\tag{4.4}$$

$$\begin{gathered}{}_2A_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+1}\big(\xi_{(j)}^{P+n+1}-\xi_{(j-1)}^{P+n+1}\big)F_{10}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{1\,0}{\Lambda}}\big(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma}+a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda}\big)-\\ -\frac{1}{2}\sum_{j=r+1}^{p}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+1}\big((-\xi_{(j)})^{P+n+1}-(-\xi_{(j-1)})^{P+n+1}\big)\times\\ \times F_{10}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{1\,0}{\Lambda}}\big(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma}+a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda}\big)\end{gathered}$$

---

* Физические уравнения (порядка $Q$) содержат следующие константы $j$-го слоя материала:

$$L_K^{(j)},\quad F_{K-1;0}^{(j)};\quad F_{K-3;1}^{(j)};\quad F_{K-5;2}^{(j)},\ \cdots,\quad F_{K-2\Gamma-1;\Gamma}^{(j)}$$

где

$$K=1,2,\cdots,Q$$
$$\Gamma=0,1,2,\cdots$$

при условии, что $F_{K-2\Gamma-1;\Gamma}=0$ для $K-2\Gamma-1<0$.

$$
{}_2B_{(n)}^{\omega\lambda\gamma\sigma}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{r}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+2}\left(\xi_{(j)}^{P+n+2}-\xi_{(j)}^{P+n+2}\right)\times
$$

$$
\times F_{10}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{1\,0}{\Lambda}}\left(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma}+a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda}\right)-
$$

$$
-\frac{1}{2}\sum_{j=r+1}^{p}\sum_{P=0}^{\infty}\frac{1}{P+n+2}\left((-\xi_{(j)})^{P+n+2}-(-\xi_{(j-1)})^{P+n+1}\right)\times
$$

$$
\times F_{10}^{(j)}\overset{(P)}{\underset{1\,0}{\Lambda}}\left(a^{\omega\lambda}a^{\gamma\sigma}+a^{\omega\sigma}a^{\gamma\lambda}\right)
$$

Учитывая, что в этом случае действительны соотношения:

$$
K_1=\sum_{q=0}^{1}\overset{(q)}{M}z^q,\qquad K_2=\sum_{q=0}^{2}\overset{(q)}{N}z^q \tag{4.5}
$$

где

$$
\overset{(q)}{M}=a^{\alpha\beta}\overset{(q)}{e}_{\alpha\beta},\quad \overset{(q)}{N}=\frac{1}{2}\sum_{t=0}^{1}a^{\alpha\beta}a^{\omega\rho}\overset{(q-t)}{e}_{\beta\rho}\overset{(t)}{e}_{\alpha\omega}
$$

$$
\overset{(q)}{\underset{0\,1}{\Lambda}}=\overset{(q)}{N},\qquad \overset{(q)}{\underset{1\,0}{\Lambda}}=\overset{(q)}{M}
$$

$$
\overset{(q)}{\underset{2\,0}{\Lambda}}=\sum_{r=0}^{1}a^{\alpha\beta}a^{\omega\rho}\overset{(q-r)}{e}_{\alpha\beta}\overset{(r)}{e}_{\omega\rho} \tag{4.6}
$$

замечаем, что дальнейшее преобразование соотношений (4.3), (4.4) не представляет трудностей.

Институт Механики Жидкости
Отдел Аэромеханики
Академия Социалистической
Республики Румынии

Поступила 24 VI 1968

Լ. Ի. ԼԻԲՐԵՍԿՈՒ

## ԲԱՐԱԿ ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԹԱՂԱՆԹՆԵՐԻ ԱՌԱՁԳԱ-ՈՉ ԳԾԱՅԻՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՖԻԶԻԿԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

*Շարադրվում է առաձգա-ոչ գծային տեսությունը թաղանթի փոքր դեֆորմացիաների դեպքում, երբ այն բաղկացած է սիմետրիկ և ոչ-սիմետրիկ r իզոտրոպ շերտերից։ Ամբողջ թաղանթի համար ընդունվում է Կիրխհոֆ-Լյավի վարկածի ճշտությունը։*

*Փոքր կորության բազմաշերտ թաղանթների համար ֆիզիկական հավասարումները տրվում են բացահայտ տեսքով։*

*Տրվում է ալգորիթմ, որը հնարավորություն է տալիս ստանալ մոտավոր ֆիզիկական հավասարումներ, որոնց կարգը հավասար է Q-ի։*

L. I. LIBRESCU

# ON THE CONSTITUTIVE EQUATIONS OF THE PHYSICALLY NON-LINEAR THEORY OF HETEROGENEOUS THIN SHELLS


## Summary

The author derives the constitutive equations in the physically non-linear theory of heterogeneous thin shells. The Love-Kirchhoff hypothesis is adopted for the general structure as a whole.

The constitutive equations are presented explicitely in the case of shallow shell theory.

The algorithm allowing the obtaining of the approximate constitutive equations of the Q-th order is presented.


## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ambartsumian S. A.* Contributions to the Theory of Anisotropic Layered Shells. Appl. Mech. Reviews, 15, No. 4, 1962.
2. *Амбарцумян С. А.* Некоторые вопросы развития теории анизотропных слоистых оболочек. Изв. АН Арм. ССР, серия, физ.-мат. наук, 17, 3, 1964.
3. *Habip L. M.* A Review of Recent Work on Multilayered Structures. Int. Journ. Mech. Sci., 7, 1965, p. 584—593.
4. *Амбарцумян С. А.* Об изгибе нелинейно-упругих трехслойных пластинок. Изв. АН СССР, ОТН, Механ. и машиностр., 6, 1960, 86—94.
5. *Librescu L.* Aeroelastic Stability of Orthotropic Heterogeneous Thin Panels in the Vicinity of Flutter Critical Boundary (Part. II). Jurna. Mécanique, 6, 1, 1967.
6. *Гольденблат И. И.* Некоторые вопросы механики деформируемых сред. Госиздат, М., 1955.
7. *Wainwright W. L.* On a Nonlinear Theory of Elastic Shells. Int. Journ. Engng. Sci. I, 1963, p. 339—358.
8. *Truesdell C., Toupin R. A.* Handbuch der Physik. III, 1, 1960, 222—793.
9. *Maghdi P. M.* Fondation of Elastic Shell Theory. Progr. Solid Mech., edited by I. N. Sneddon and R. Hill. 4, 1, 1963.
10. *Librescu L.* Elastische Mehrschichtenschallen. Rev. Méc. Appl., 5, 5, 1960.
11. *Либреску Л.* Задачи теории тонких упругих оболочек, составленных из изотропных слоев, расположенных симметрично относительно срединной поверхности. Rev. Méc. Appl., 4, 2, 1959.
12. *Гольденвейзер А. А.* Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
13. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
14. *Амбарцумян С. А.* Об осесимметричной задаче для трехслойной цилиндрической оболочки, составленной из нелинейно-упругих материалов. Изв. АН Арм. ССР, сер. физ.-мат. наук, т. XIV, № 1, 1961, 105—109.
15. *Амбарцумян С. А., Гнуни В. Ц.* О динамической устойчивости нелинейно-упругих трехслойных пластинок. ПММ, т. XXV, вып. 4, 1961, 746—750.