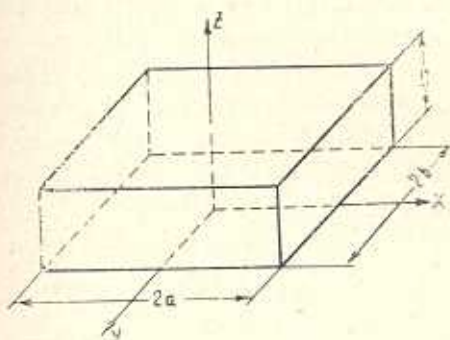


С. М. СААКЯН

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ РАВНОВЕСИЯ УПРУГОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

Дается точное решение одной смешанной задачи об упругом равновесии прямоугольного параллелепипеда, когда боковые плоскости параллелепипеда жестко закреплены, а на верхней и нижней плоскостях заданы компоненты вектора напряжений.

Для простоты рассматривается случай, когда граничные условия симметричны относительно координатных осей  $x$  и  $y$  (фиг. 1). В силу симметрии решение задачи строится для четвертой части параллелепипеда ( $x, y \geq 0$ ).



Фиг. 1.

Для распространения решения на всю область параллелепипеда требуется, чтобы на плоскостях симметрии  $x = 0$ ,  $y = 0$  удовлетворялись условия симметрии

$$\begin{aligned} x = 0: \quad u = \tau_{xy} = \tau_{xz} = 0 \\ y = 0: \quad v = \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

На поверхности параллелепипеда граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x = a: \quad u = v = w = 0; \quad y = b: \quad u = v = w = 0 \\ z = 0: \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_z = 0 \\ z = c: \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \quad A\sigma_z = f(x, y) \end{aligned}$$

где  $f(x, y)$  — кусочно-непрерывная функция, удовлетворяющая условиям

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(-x, y) \\ f(x, y) &= f(x, -y) \end{aligned}$$

а коэффициент  $A$  при  $\varepsilon_z$  имеет значение

$$A = \frac{1 - 2\nu}{2\nu G} \quad \begin{array}{l} (\nu - \text{коэффициент Пуассона}) \\ (G - \text{модуль сдвига материала}) \end{array}$$

Для перемещений и напряжений (кроме  $\varepsilon_z(x, y, z)$ ) нулевые граничные значения берутся только для упрощения выкладок и расчетов. Замена нулевых значений ненулевыми не влияет на ход решения задачи, поскольку ненулевые граничные функции отражаются лишь в свободных членах полученных бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, к исследованию которых сводится решение данной задачи [1].

Рассматриваемая задача при определенных отношениях размеров параллелепипеда является задачей об изгибе прямоугольной плиты с четырьмя закрепленными кромками ( $x = \pm a$ ;  $y = \pm b$ ), когда действующая внешняя нагрузка приложена на плоскости ( $z = c$ ).

Пользуясь методом Фурье, решение однородных уравнений равновесия в форме Ламе представляем в виде трех двойных рядов Фурье с неопределенными коэффициентами. Определение этих коэффициентов сводится к решению бесконечных систем линейных алгебраических уравнений. Доказывается, что полученные бесконечные системы квазивполне регулярны и имеют ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены. Приводится численный пример: результаты вычисления представлены эпюрами.

### § 1. Решение однородных уравнений Ламе

$$\begin{aligned} \nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= 0 \\ \nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial y} &= 0 \\ \nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial \theta}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

ищем в виде суммы двойных рядов Фурье

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{lm}^{(1)}(x) \cos \beta_m y \cos \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(1)}(y) \sin \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \psi_{lm}^{(1)}(z) \sin \alpha_l x \cos \beta_m y \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} f_{lm}^{(2)}(x) \sin \beta_m y \cos \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{ln}^{(2)}(y) \cos \alpha_l x \cos \gamma_n z + \\ &+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{lm}^{(2)}(z) \cos \alpha_l x \sin \beta_m y \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_{mn}^{(3)}(x) \cos \beta_m y \sin \gamma_n z + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{ln}^{(3)}(y) \cos \alpha_l x \sin \gamma_n z + \\ + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \psi_{lm}^{(3)}(z) \cos \alpha_l x \cos \beta_m y$$

где

$$\alpha_l = \frac{(2l-1)\pi}{2a}, \quad \beta_m = \frac{(2m-1)\pi}{2b}, \quad \gamma_n = \frac{n\pi}{c}$$

Подставив (1.2) в (1.1), получим систему из 3-х обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно трех неизвестных функций  $f_{mn}^{(i)}(x)$ ,  $\varphi_{ln}^{(i)}(y)$ ,  $\psi_{lm}^{(i)}(z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Для рассматриваемой задачи решение указанной системы уравнений представляем в виде

$$\begin{aligned} f_{mn}^{(1)}(x) &= A_{mn}^{(1)} \operatorname{sh} k_{mn} x + D_{mn}^{(1)} x k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} x \\ f_{mn}^{(i)}(x) &= B_{mn}^{(i)} \operatorname{ch} k_{mn} x + C_{mn}^{(i)} k_{mn} x \operatorname{sh} k_{mn} x \quad (i = 2, 3) \\ \varphi_{ln}^{(2)}(y) &= M_{ln}^{(2)} \operatorname{sh} k_{ln} y + F_{ln}^{(2)} k_{ln} y \operatorname{ch} k_{ln} y \\ \varphi_{ln}^{(i)}(y) &= N_{ln}^{(i)} \operatorname{ch} k_{ln} y + E_{ln}^{(i)} k_{ln} y \operatorname{sh} k_{ln} y \quad (i = 1, 3) \\ \psi_{lm}^{(i)}(z) &= k_{lm}^{(i)} \operatorname{sh} k_{lm} z + L_{lm}^{(i)} \operatorname{ch} k_{lm} z + H_{lm}^{(i)} k_{lm} z \operatorname{sh} k_{lm} z + \\ &+ G_{lm}^{(i)} k_{lm} z \operatorname{ch} k_{lm} z \quad (i = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где  $A_{lm}^{(1)}, \dots, G_{lm}^{(3)}$  — постоянные интегрирования, которые связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} k_{mn} A_{mn}^{(1)} + k_{mn} (2\gamma_n + 1) D_{mn}^{(1)} + \beta_m B_{mn}^{(2)} + \gamma_n B_{mn}^{(3)} &= 0 \\ \beta_m C_{mn}^{(3)} - \gamma_n C_{mn}^{(2)} = 0, \quad k_{mn} C_{mn}^{(2)} + \beta_m D_{mn}^{(1)} = 0 \\ k_{ln} M_{ln}^{(2)} + k_{ln} (2\gamma_n + 1) F_{ln}^{(2)} + \alpha_l N_{ln}^{(1)} + \gamma_n N_{ln}^{(3)} &= 0 \\ \gamma_n E_{ln}^{(1)} - \alpha_l E_{ln}^{(3)} = 0, \quad \gamma_n F_{ln}^{(2)} + k_{ln} E_{ln}^{(3)} = 0 \\ k_{lm} k_{lm}^{(3)} + k_{lm} (2\gamma_n + 1) G_{lm}^{(3)} + \alpha_l L_{lm}^{(1)} + \beta_m k_{lm}^{(2)} &= 0 \\ k_{lm} L_{lm}^{(3)} + k_{lm} (2\gamma_n + 1) H_{lm}^{(3)} + \alpha_l k_{lm}^{(1)} + \beta_m k_{lm}^{(2)} &= 0 \\ \alpha_l H_{lm}^{(2)} - \beta_m H_{lm}^{(1)} = 0, \quad \alpha_l G_{lm}^{(3)} + k_{lm} H_{lm}^{(1)} = 0 \\ \alpha_l G_{lm}^{(2)} - \beta_m G_{lm}^{(1)} = 0, \quad \beta_m H_{lm}^{(3)} + k_{lm} G_{lm}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \quad (1.4)$$

здесь

$$\begin{aligned} \gamma_n &= \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \quad k_{ln} = \sqrt{\alpha_l^2 + \beta_m^2} \\ k_{mn} &= \sqrt{\beta_m^2 + \gamma_n^2}, \quad k_{lm} = \sqrt{\alpha_l^2 + \gamma_n^2} \end{aligned}$$

Пользуясь обычными формулами и выражениями (1.2) для компонентов перемещения, получим формулы для напряжений, выраженные через функции  $f_{mn}^{(i)}(x)$ ,  $\varphi_{ln}^{(i)}(y)$ ,  $\psi_{lm}^{(i)}(z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Удовлетворив гра-

ничным условиям (2), получим ряд соотношений между коэффициентами интегрирования  $A_{mn}^{(1)}, \dots, G_{lm}^{(3)}$ .

Разрешая эти соотношения вместе с (1.4) относительно неизвестных постоянных, для последних получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 D_{mn}^{(1)} &= \frac{a}{c} \frac{Y_{mn}}{\beta_m k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a}, & F_{ln}^{(2)} &= \frac{b}{c} \frac{Z_{ln}}{z_l k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b} \\
 H_{lm}^{(3)} &= \frac{X_{lm}^{(2)} - X_{lm}^{(1)}}{2z_l \beta_m}, & G_{lm}^{(3)} &= \frac{X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) - X_{lm}^{(2)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1)}{2z_l \beta_m \operatorname{sh} k_{lm} c} \\
 C_{mn}^{(2)} &= -\frac{a}{ck_{mn}^2} \frac{Y_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn} a}, & C_{mn}^{(3)} &= -\frac{a \gamma_{ln}}{c \beta_m k_{mn}^2} \frac{Y_{mn}}{\operatorname{ch} k_{mn} a} \\
 B_{mn}^{(2)} &= \frac{a^2}{ck_{mn}^2} \frac{Y_{mn} \operatorname{sh} k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}, & B_{mn}^{(3)} &= \frac{a^2 \gamma_{ln}}{ck_{mn} \beta_m} \frac{Y_{mn} \operatorname{sh} k_{mn} a}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \\
 A_{mn}^{(1)} &= -\frac{a}{c} \frac{(1 + 2\gamma_l + ak_{mn} \operatorname{th} k_{mn} a) Y_{mn}}{\beta_m k_{mn} \operatorname{ch} k_{mn} a} \\
 L_{lm}^{(3)} &= -(\gamma_l + 1) \frac{X_{lm}^{(2)} - X_{lm}^{(1)}}{2z_l \beta_m} & (1.5) \\
 E_{lm}^{(3)} &= -\frac{b \gamma_{ln}}{c z_l k_{ln}^2} \frac{z_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln} b}, & E_{ln}^{(1)} &= -\frac{b}{ck_{ln}^2} \frac{z_{ln}}{\operatorname{ch} k_{ln} b} \\
 N_{ln}^{(1)} &= \frac{b^2}{ck_{ln}} \frac{z_{ln} \operatorname{sh} k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b}, & N_{ln}^{(3)} &= \frac{b^2 \gamma_{ln}}{c z_l k_{ln}} \frac{z_{ln} \operatorname{sh} k_{ln} b}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b} \\
 M_{ln}^{(2)} &= -\frac{b}{c} \frac{(1 + 2\gamma_l + bk_{ln} \operatorname{th} k_{ln} b) Z_{ln}}{z_l k_{ln} \operatorname{ch} k_{ln} b}, & G_{lm}^{(1)} &= \gamma_l \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\beta_m k_{lm}} \\
 H_{lm}^{(2)} &= \frac{X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) - X_{lm}^{(2)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1)}{2z_l k_{lm} \operatorname{sh} k_{lm} c} \\
 H_{lm}^{(1)} &= \frac{X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) - X_{lm}^{(2)}(\operatorname{ch} k_{lm} c - 1)}{2\beta_m k_{lm} \operatorname{sh} k_{lm} c} \\
 k_{lm}^{(2)} &= -\gamma_l \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2z_l k_{lm}}, & G_{lm}^{(2)} &= \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2z_l k_{lm}} \\
 k_{lm}^{(1)} &= \gamma_l \frac{X_{lm}^{(1)} - X_{lm}^{(2)}}{2\beta_m k_{lm}} \\
 L_{lm}^{(2)} &= \frac{\beta_m}{z_l} L_{lm}^{(1)} = -\frac{1}{2z_l k_{lm} \operatorname{sh} k_{lm} c} \left[ X_{lm}^{(1)}(1 + \operatorname{ch} k_{lm} c) \left( \gamma_l - \frac{ck_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} \right) + \right. \\
 &\quad \left. + X_{lm}^{(2)}(1 - \operatorname{ch} k_{lm} c) \left( \gamma_l + \frac{ck_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} \right) \right] \\
 k_{lm}^{(3)} &= -\frac{1}{2\beta_m z_l \operatorname{sh} k_{lm} c} \left[ X_{lm}^{(1)}(\operatorname{ch} k_{lm} c + 1) \left( \frac{ck_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} + \gamma_l + 1 \right) - \right.
 \end{aligned}$$

$$-X_{lm}^{(2)}(1 - \operatorname{ch} k_{lm} c) \left( \frac{c k_{lm}}{\operatorname{sh} k_{lm} c} - \nu - 1 \right)$$

Входящие в (1.5) неизвестные постоянные  $X_{lm}^{(1)}$ ,  $X_{lm}^{(2)}$ ,  $Y_{mn}$ ,  $Z_{ln}$  должны быть определены из бесконечных систем линейных уравнений

$$e_{lm} X_{lm}^{(1)} = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} a_{lmn} Y_{mn} + \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} b_{lmn} Z_{ln} + q_{lm} \quad (1.6)$$

$$(l = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots)$$

$$f_{lm} X_{lm}^{(2)} = \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} a_{lmn} Y_{mn} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} b_{lmn} Z_{ln} + q_{lm} \quad (1.7)$$

$$(l = 1, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots)$$

$$g_{mn} Y_{mn} = \sum_{l=1}^{\infty} c_{lmn} Z_{ln} + \sum_{l=1}^{\infty} c_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(2)} \quad (1.8)$$

$$(n = 0, 2, \dots; \quad m = 1, 2, \dots)$$

$$g_{mn} Y_{mn} = \sum_{l=1}^{\infty} c_{lmn} Z_{ln} + \sum_{l=1}^{\infty} c_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(2)} \quad (1.9)$$

$$(n = 1, 3, \dots; \quad m = 1, 2, \dots)$$

$$h_{ln} Z_{ln} = \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn} Y_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(1)} \quad (1.10)$$

$$(n = 0, 2, \dots; \quad l = 1, 2, \dots)$$

$$h_{ln} Z_{ln} = \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn} Y_{mn} + \sum_{m=1}^{\infty} d_{lmn}^{(1)} X_{lm}^{(2)} \quad (1.11)$$

$$(n = 1, 3, \dots; \quad l = 1, 2, \dots)$$

где введены обозначения

$$e_{lm} = - \frac{k_{lm}}{\alpha_l \beta_m} \frac{1 - 2\nu}{\nu} \frac{\operatorname{sh} k_{lm} c + k_{lm} c}{\operatorname{ch} k_{lm} c - 1}$$

$$f_{lm} = \frac{k_{lm}}{\alpha_l \beta_m} \frac{1 - 2\nu}{\nu} \frac{\operatorname{sh} k_{lm} c - k_{lm} c}{\operatorname{ch} k_{lm} c + 1}$$

$$g_{mn} = \frac{a}{c} \frac{(3 - 4\nu) \operatorname{th} k_{mn} a - \frac{a k_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}}{k_{mn} \beta_m}$$

$$h_{ln} = \frac{b}{c} \frac{(3 - 4\nu) \operatorname{th} k_{ln} b - \frac{b k_{ln}}{\operatorname{ch}^2 k_{ln} b}}{\alpha_l k_{ln}} \quad (1.12)$$

$$a_{lmn} = \frac{8}{c} \frac{1 - 2\nu}{\nu} \frac{\alpha_l (-1)^{l-1}}{\beta_m (\alpha_l^2 + k_{mn}^2)} \left( \nu - \frac{\nu^2 \beta_n^2}{\alpha_l^2 + k_{mn}^2} \right)$$

$$c_{lmn} = -\frac{4}{c} \frac{\beta_m (-1)^{m+n}}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2}$$

$$b_{lmn} = \frac{8}{c} \frac{1-2\nu}{\nu} \frac{\beta_m (-1)^{m-1}}{\alpha_l (\alpha_l^2 + k_{mn}^2)} \left( \nu - \frac{\gamma_n^2}{\beta_m^2 + k_{lm}^2} \right)$$

$$d_{lmn} = \frac{4}{c} \frac{\alpha_l (-1)^{m+n}}{(\alpha_l^2 + k_{mn}^2)^2}$$

$$c_{lmn}^{(1)} = \frac{4}{c} (-1)^{l+n-1} \frac{\gamma_n^2 - \nu(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)}{\beta_m (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)^2}$$

$$d_{lmn}^{(1)} = \frac{4}{c} (-1)^{m+n-1} \frac{\gamma_n^2 - \nu(k_{lm}^2 + \gamma_n^2)}{\alpha_l (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)^2}$$

Свободный член  $q_{lm}$ , входящий в (1.6) и (1.7), является коэффициентом разложения в ряд Фурье функции  $f(x, y)$ .

$$f(x, y) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{lm} \cos \alpha_l x \cos \beta_m y \quad (0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b) \quad (1.13)$$

Исследуем регулярность полученных бесконечных систем. Из (1.12) для системы (1.6) получим следующую оценку:

$$s_1 = \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \left| \frac{a_{lmn}}{e_{lm}} \right| + \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \left| \frac{b_{lm}}{e_{lm}} \right| = \frac{\operatorname{ch} k_{lm} c - 1}{\operatorname{sh} k_{lm} c + k_{lm} c} \times$$

$$\times \frac{8k_{lm}}{c} \sum_{n=0,2,\dots}^{\infty} \frac{\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} = \frac{\operatorname{ch} k_{lm} c - 1}{\operatorname{sh} k_{lm} c + k_{lm} c} \times$$

$$\times \frac{8k_{lm}}{c} \left[ 2 \sum_{n=2,4,\dots}^{n_{k,0}} \frac{\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} + \frac{\nu}{k_{lm}^2} - \right.$$

$$\left. - \sum_{n=2,4,\dots}^{\infty} \frac{k_{lm}^2 - (1-\nu)(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} \right] = \frac{16k_{lm}}{c} \sum_{n=2,4,\dots}^{n_{k,0}} \frac{\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} +$$

$$+ (1-2\nu) \operatorname{cth} \frac{k_{lm} c}{2} + \frac{12\nu}{k_{lm} c} - \frac{k_{lm} c}{2 \operatorname{sh}^2 \frac{k_{lm} c}{2}} \quad (1.14)$$

Здесь  $n_{k,0}$  — целое число, которое определяется из неравенства

$$\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2 \geq 0$$

$$n_{k,0} \leq \frac{ck_{lm}}{\pi} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} = a_{k,0} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} \quad (1.15)$$

Оценим конечную сумму

$$\frac{16k_{lm}}{c} \sum_{n=2,4,\dots}^{n_{k,0}} \frac{\nu k_{lm}^2 - (1-\nu)\gamma_n^2}{(\gamma_n^2 + k_{lm}^2)^2} \quad (1.16)$$

входящую в (1.14).

Из выражения (1.16) при помощи (1.15) получаем

$$\frac{8a_{k,0}}{\pi} \sum_{n=2,4,\dots}^{n_{k,0}} \frac{\nu a_{k,0}^2 - (1-\nu)n_{k,0}^2}{(n_{k,0}^2 + a_{k,0}^2)} \ll \frac{4}{\pi} \left| \sqrt{\nu(1-\nu) - (1-2\nu)\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}} \right|$$

Следовательно, для сумм коэффициентов бесконечной системы (1.6) получаем оценку

$$s_1 \ll \frac{\operatorname{ch} k_{lm} c - 1}{\operatorname{sh} k_{lm} c - k_{lm} c} \left\{ \frac{4}{\pi} \left| \sqrt{\nu(1-\nu) - (1-2\nu)\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}} \right| + (1-2\nu)\operatorname{cth} \frac{k_{lm} c}{2} + \frac{12\nu}{k_{lm} c} - \frac{k_{lm} c}{2\operatorname{sh}^2 \frac{k_{lm} c}{2}} \right\} = \varphi(k_{lm}, \nu)$$

$$\text{где } \lim_{k_{lm} \rightarrow \infty} \varphi(k_{lm}, \nu) = \frac{4}{\pi} \left| \sqrt{\nu(1-\nu) - (1-2\nu)\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}}} \right| + (1-2\nu) = f(\nu)$$

Расчёты показывают, что

$$f(0) = 1, \quad f(0,5) = \frac{2}{\pi}$$

Для производной  $f(\nu)$  имеем

$$f'(\nu) = 2 \left( \frac{4}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\nu}{1-\nu}} - 1 \right) < 0 \quad (0 < \nu < 0,5)$$

Следовательно, функция  $f(\nu)$  монотонно убывает в промежутке  $(0 < \nu < 0,5)$  и имеет максимальное значение при  $\nu = 0$ . Таким образом, бесконечная система (1.6) при  $(0 < \nu < 0,5)$  оказывается квази-полностью регулярной.

Такая же оценка имеет место для бесконечной системы (1.7).

Для системы (1.8) имеем

$$\begin{aligned} s_2 &= \sum_{l=1}^{\infty} \left| \frac{c_{lmn}}{g_{mn}} \right| + \sum_{l=1}^{\infty} \left| \frac{c_{lmn}^{(1)}}{g_{mn}} \right| \ll \frac{\beta_m k_{mn}}{(3-4\nu)\operatorname{th} k_{mn} a - \frac{ak_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}} \times \\ &\times \frac{4}{a} \left| \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta_m}{(x_l^2 + k_{mn}^2)^2} + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\gamma_n^2 + \nu(k_{lm}^2 + \gamma_n^2)}{\beta_m (k_{lm}^2 + \gamma_n^2)^2} \right| = \\ &= \frac{1}{(3-4\nu)\operatorname{th} k_{mn} a - \frac{ak_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}} \left[ (1+2\nu)\operatorname{th} k_{mn} a - \frac{ak_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a} \right] = \\ &= 1 - 2 \frac{(1-3\nu)\operatorname{th} k_{mn} a}{(3-4\nu)\operatorname{th} k_{mn} a - \frac{ak_{mn}}{\operatorname{ch}^2 k_{mn} a}} < 1 \quad \left( \text{при } \nu < \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

Аналогичные оценки получаются также для бесконечных систем (1.9—1.10—1.11). Таким образом, на основе полученных оценок следует, что бесконечные системы (1.6—1.11) квазивполне регулярны. Поэтому формулы (1.5) позволяют определить все неизвестные постоянные интегрирования.

§ 2. В качестве примера рассмотрены два частных случая задачи об изгибе квадратной плиты со следующими геометрическими параметрами:

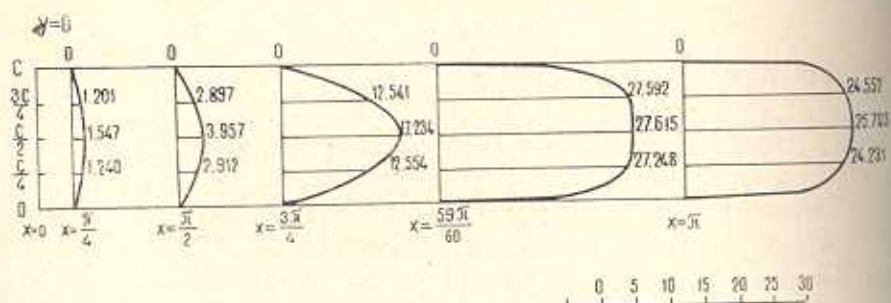
1.  $a = b = 3c = \pi$
2.  $a = b = c = \pi$

Когда плита находится под действием равномерно распределенной нормальной изгибающей нагрузки

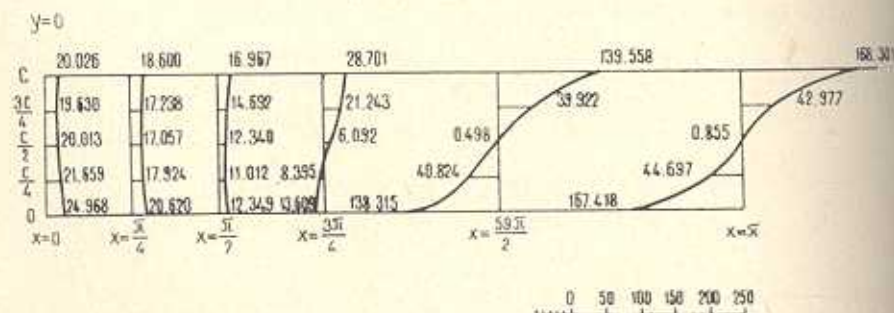
$$\sigma_z(x, y, c) = -p, \quad \tau_{xz}(x, y, c) = \tau_{yz}(x, y, c) = 0$$

$$\tau_{xz}(x, y, 0) = \tau_{yz}(x, y, 0) = \sigma_z(x, y, 0) = 0$$

Для рассмотренных случаев при ( $\nu = 0,25$ ) вычислены значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$  для различных точек плиты. На фигурах (2—5) приводятся эпюры этих напряжений для сечения  $y = 0$ . Значения напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$  для сечений  $y = \text{const} > 0$  приводятся в таблицах (1—6). В эпюрах и таблицах значения напряжений даются в долях  $p$ .



Фиг. 2. Эпюры касательных напряжений  $\tau_{xz}$   
 $a = b = 3c = \pi$



Фиг. 3. Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x$   
 $a = b = 3c = \pi$

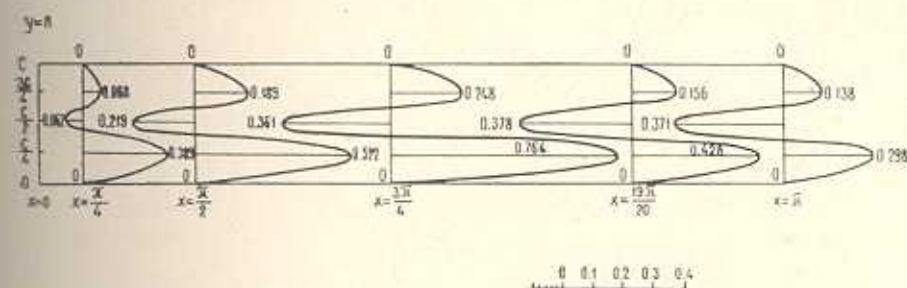
На основе численных значений напряжений  $\sigma_x$  и  $\tau_{xz}$ , приведенных в таблицах (1—6), можно сказать, что в остальных сечениях  $y = \text{const} > 0$



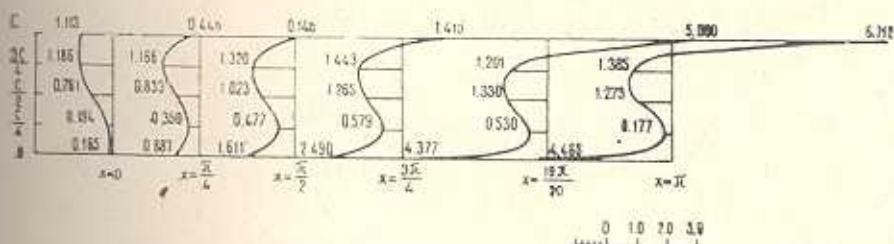
соответствующие эпюры вычисленных напряжений существенно не отличаются от построенных.

Расчеты показывают, что, когда толщина плиты достаточно мала, закон распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  во всех сечениях  $y = \text{const} > 0$  вдоль оси  $z$  близок к параболическому, что согласуется с результатами классической теории изгиба тонких плит.

Рассмотрение первой задачи для тонкой плиты показывает, что при значениях  $x$  из области  $0 < x < \frac{3\pi}{4}$  и при любых  $y$  и  $z$  нормальные напряжения  $\sigma_x$  — растягивающие.



Фиг. 4. Эпюры касательных напряжений  $\tau_{xz}$   
 $a = b = c = \pi$



Фиг. 5. Эпюры нормальных напряжений  $\sigma_x$   
 $a = b = c = \pi$

Вне этой области закон распределения этих напряжений близок к прямолинейному, причем для каждого сечения ( $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ ) существует нулевая точка, выше которой напряжения  $\sigma_x$  растягивающие, ниже — сжимающие.

Построенные эпюры и приведенные в таблицах (1—6) численные значения для напряжений  $\sigma_x$  показывают, что в близких к плоскости закрепления сечениях имеется только незначительное отклонение от линейного закона распределения, и нулевая точка находится около срединной плоскости.

При рассмотрении второй задачи, т. е. когда рассматривается изгиб достаточно толстой плиты, выяснилось, что закон распределения касательных напряжений  $\tau_{xz}$  во всех сечениях  $x = \text{const}$  по высоте плиты имеет сложный колебательный характер, т. е. напряжения несколько раз меняют свой знак.

$$Y = \frac{a}{4} \quad a = b = 3c = \pi$$

$\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{59}{60} a$	$a$	
0	13.041 0	10.292 0	2.104 0	-16.336 0	-128.836 0	-155.609 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{4}$	14.171 0	11.529 0.518	2.910 1.840	-9.922 10.538	-38.150 24.064	-41.610 21.261	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{2}$	13.903 0	11.740 0.731	4.380 2.661	3.945 14.694	-0.647 24.212	-0.886 22.438	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	12.773 0	11.120 0.520	5.636 1.846	17.654 10.539	36.884 24.422	39.882 21.596	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$c$	10.027 0	9.109 0	5.835 0	23.150 0	129.460 0	156.491 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$

Таблица 2

$$Y = \frac{a}{2} \quad a = b = 3c = \pi$$

$\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{59}{60} a$	$a$	
0	7.751 0	6.055 0	2.104 0	-13.709 0	-100.59 0	-121.360 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{4}$	7.372 0	6.342 0.145	2.910 1.067	-8.968 7.700	-29.993 18.070	-32.612 15.889	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{2}$	7.556 0	6.352 0.192	4.379 1.528	1.768 10.700	-0.796 17.953	-0.886 16.575	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	6.836 0	5.971 0.141	5.636 1.069	12.480 7.700	28.432 18.426	30.381 16.223	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$c$	5.748 0	5.229 0	5.834 0	17.094 0	100.966 0	122.269 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$

Таблица 3

$$Y = \frac{3}{4} a; \quad a = b = 3c = \pi$$

$\begin{matrix} x \\ z \end{matrix}$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{59}{60} a$	$a$	
0	6.023 0	4.981 0	2.337 0	-7.494 0	-57.164 0	-68.642 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{4}$	5.230 0	4.369 0.299	2.213 0.413	-5.094 3.160	-17.729 8.627	-19.153 7.383	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{2}$	3.455 0	2.885 0.408	1.894 0.592	0.476 4.376	-0.840 8.130	-0.834 7.317	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	1.543 0	1.257 0.298	1.498 0.418	6.081 3.165	16.061 8.977	17.511 7.711	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$c$	0.549 0	0.425 0	1.273 0	8.592 0	57.415 0	69.582 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$

Таблица 4

$$Y = \frac{a}{4}; \quad a = b = c = \pi$$

$\begin{array}{l} x \\ z \end{array}$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{59}{60} a$	$a$	
0	-0.778 0	-1.214 0	-1.701 0	-2.507 0	-4.221 0	-4.241 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{4}$	-0.300 0	-0.415 0.243	-0.517 0.435	-0.616 0.652	-0.554 0.314	-0.202 0.191	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{2}$	-0.728 0	-0.802 -0.063	-0.994 -0.205	-1.228 -0.339	-1.285 -0.360	-1.221 -0.362	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	-1.064 0	-1.077 0.072	-1.248 0.169	-1.390 0.213	-1.253 0.126	-1.328 0.108	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$c$	-0.588 0	-0.242 0	0.214 0	1.134 0	4.737 0	6.382 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$

Таблица 5

$$Y = \frac{a}{2}; \quad a = b = c = \pi$$

$\begin{array}{l} x \\ z \end{array}$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{19}{20} a$	$a$	
0	-0.821 0	-1.118* 0	-1.587 0	-2.558 0	-3.676 0	-3.521 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{4}$	-0.382 0	-0.454 0.136	-0.450 0.260	-0.666 0.393	-0.595 0.044	-0.272 -0.058	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{2}$	-0.579 0	-0.649 -0.041	-0.841 -0.145	-1.084 -0.254	-1.133 -0.281	-1.075 -0.285	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	-0.769 0	-0.813 0.046	-1.010 0.091	-1.198 0.114	-1.136 0.044	-1.209 0.030	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$c$	-0.400 0	-0.198 0	0.132 0	1.036 0	3.931 0	5.371 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$

Таблица 6

$$Y = \frac{3}{4} a; \quad a = b = c = \pi$$

$\begin{array}{l} x \\ z \end{array}$	0	$\frac{a}{4}$	$\frac{a}{2}$	$\frac{3}{4} a$	$\frac{19}{20} a$	0	
0	-0.423 0	-0.613 0	-0.986 0	-1.597 0	-2.672 0	-2.308 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{4}$	-0.292 0	-0.330 0.029	-0.407 0.058	-0.564 0.071	-0.538 0.022	-0.276 0.033	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{c}{2}$	-0.218 0	-0.271 -0.009	-0.439 -0.050	-0.705 -0.109	-0.813 -0.136	-0.765 -0.139	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$\frac{3c}{4}$	-0.255 0	-0.303 0.007	-0.488 0.018	-0.766 0.013	-0.888 0.258	-0.951 0.034	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$
$c$	-0.370 0	-0.269 0	0.067 0	0.609 0	2.520 0	3.550 0	$\sigma_x$ $\tau_{xz}$

В случае изгиба толстой плиты найденные значения для нормальных напряжений  $\sigma_x$  показывают, что в области  $\left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y < \pi, 0 \leq z \leq \pi\right)$  эти напряжения являются сжимающими. Вне этой области вблизи верхней плоскости плиты напряжения  $\sigma_x$  растягивающие, а в остальной части плиты эти напряжения опять становятся сжимающими.

Численные расчеты рассмотренного примера произведены в Ереванском вычислительном центре Амбаряном С. и Минасяном Л., которым приношу свою благодарность.

Ереванский политехнический  
институт им. К. Маркса

Поступила 11 X 1968

Ս. Մ. ՍԱՀՅԱՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ԱՌԱՋԳԱԿԱՆ ԶՈՒԳԱԼԵՌԱՆԻՍՏԻ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՈՌՈՅԱՆ  
ՄԵԿ ԽՆԳՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո լ մ

Հողվածում տրվում է ուղղանկյուն զուգահեռանիստի առաձգական հավասարակշռության մեկ խառը խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ զուգահեռանիստի էտղմնային նիստերի վրա տրված են տեղափոխման վեկտորի բաղադրիչները, իսկ մյուս երկու նիստերի վրա տրված են լարման վեկտորի բաղադրիչները:

Հաշվումների պարզության համար, ընդունվում է խնդրի եզրային պայմանները սիմետրիկ  $x$  և  $y$  կոորդինատական առանցքների նկատմամբ: Այդ հանգամանքը հնարավորություն է տալիս, խնդրի լուծումը կառուցել զուգահեռանիստի քառորդ մասի համար ( $x, y \geq 0$ ).

Խնդրի լուծումը բերվում է գծային հավասարումների անվերջ սխեմաների հետադուրսությամբ: Տույց է տրվում, որ այդ սխեմաները բվադի-լիոփին բեզուլյար են և ունեն վերելից սահմանափակ զրոյի ձգտող ազատ անդամներ:

Որպես մասնավոր օրինակ, դիտարկված են բառակուսի սալի ծուման խնդրի երկու մասնավոր դեպքերը, երբ սալի երկրաչափական չափերն են

$$1) a = b = 3c = \pi$$

$$2) a = b = c = \pi$$

Հաշված և կառուցված են էպյուրներ  $\sigma_x$  և  $\tau_{xy}$  լարումների համար՝ զուգահեռանիստի տարբեր կտրվածքներում:

S. M. SAHAKIAN

## ON THE PROBLEM OF THE EQUILIBRIUM OF A RECTANGULAR ELASTIC PARALLELEPIPED

## S u m m a r y

The solution of a mixed problem on the elastic equilibrium of a rectangular parallelepiped is given, when on the side-faces of the parallelepiped the components of displacement are given while on the other faces the stress components.

The problem leads to the solution of a regular system of linear algebraic equations.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Баблян А. А., Саакян С. М. О двух задачах о равновесии прямоугольного параллелепипеда со смешанными граничными условиями. Изв. АН Арм. ССР, серия физ.-мат. наук, т. 17, № 6, 1964, стр. 27—46.
2. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближённые методы высшего анализа. Гостехиздат, М.—Л., 1950.