ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 3, 1969 Механика

Д. И. ШЕРМАН

ПО ПОВОДУ ОДНОГО ОСОБОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ*

§ 1. Эффективное рассмотрение отдельных небезынтересных задач теории упругости связано, в свою очередь, с решением в компактной и наглядной форме сингулярного уравнения первого рода

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\rho}^{\rho}\mu(t)\left[\frac{1}{t-t_0}-\lambda\frac{1}{t-\dfrac{\rho^2}{t_0}}\right]dt=f(t_0),\quad -\rho<t_0<\rho \tag{1.1}$$

В нем $t\,(t_0)$ — аффикс точки отрезка $(-\rho,\ \rho)$; $\mu(t))$ — плотность, подлежащая разысканию, и $f(t)$ — задаваемая и непрерывная по Гельдеру функция. Для простоты параметр λ будем считать вещественным и численно не превосходящим единицы. Первое слагаемое ядра уравнения имеет подвижную особенность и, как обычно, содержащий его интеграл понимается в смысле главного значения по Коши; второе же слагаемое ядра имеет лишь фиксированные (неинтегрируемые) особенности в концах $t_0=\pm\rho$. В свое время в статье [1] была предложена методика исследования специальных типов сингулярных уравнений. Использование этой методики позволяет получить решение уравнения (1.1), непрерывное на замкнутом отрезке $(-\rho,\ \rho)$, в такой доступной обозрению форме (при этом была внесена детализация и ряд порой серьезных дополнительных уточнений в кое-какие частности методики; ясно, что необходимость в них подсказывалась самим ходом ее фактической реализации)

$$\mu(t_0)=\left(\frac{\rho-t_0}{-\rho-t_0}\right)^{\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\rho}^{\rho}f(t)\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{-\alpha}\left[\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-\dfrac{\rho^2}{t_0}}\right]dt+$$

$$+\left(\frac{\rho-t_0}{-\rho-t_0}\right)^{-\alpha}\frac{1}{2\pi i}\int_{-\rho}^{\rho}f(t)\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\alpha}\left[\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-\dfrac{\rho^2}{t_0}}\right]dt \tag{1.2}$$

где $\lambda=\cos\theta$ и $\alpha=1-\dfrac{\theta}{\pi}$; кроме того, под фигурирующими в этом

* Работа была доложена на Третьем Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике [2].

равенстве дробно-линейными степенными множителями понимаются предельные значения тех же функций от переменного z, скажем, на верхнем берегу разреза $(-\rho, \rho)$.

Мы достаточно твердо уверимся в достоверности свойства непрерывности, приписываемого плотности $\mu(t_0)$, доставляемой формулой (1.2), подсчитав ее значение хотя бы для $f(t) = (\rho^{-1}t)^n$ при любом целом и положительном n*. Это же утверждение можно установить и при более широких предположениях относительно поведения $f(t)$. При ближайшем анализе выясняется, что плотность $\mu(t)$, даваемая формулой (1.2), в действительности удовлетворяет сингулярному уравнению (1.1) только в том случае, если его свободный член подчинен интегральному соотношению

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\rho}^{\rho}\left[e^{-\pi i\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\alpha}-e^{\pi i\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{-\alpha}\right]\frac{f(t)}{t}\,dt=0 \tag{1.3}$$

Кстати сказать, функция, заключающаяся в нем под знаком интеграла в квадратных скобках, принимает нулевое значение при $t=0$. Заметим, что найденная форма решения (1.2) остается справедливой и для уравнения Карлемана первого рода ($\lambda = 0$).

Наконец, укажем еще нетривиальные (абсолютно интегрируемые) решения, которыми обладает однородное (при нулевом свободном члене) сингулярное уравнение (1.1). Вид их таков:

$$\mu(t) = C_+\Lambda_+(t) + C_-\Lambda_-(t) + D\Omega(t) \tag{1.4}$$

причем C_+, C_- и D — произвольные постоянные и функции

$$\Lambda_{\pm}(t) = (1+\lambda)\,e^{\pm i\pi\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\pm(1-\alpha)} + (1-\lambda)\,e^{\mp i\pi\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\pm\alpha}$$

$$\Omega_{-}(t) = e^{i\pi\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{1-\alpha} + e^{-i\pi\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{-(1-\alpha)} \tag{1.5}$$

---

* Интегралы, входящие в выражение, стоящее справа в (1.2), вычисляются в элементарных функциях для случая $f(t) = \left(\frac{t}{\rho}\right)^n$ (фактически вбирающего не столь уж узкий класс аналитических функций $f(t)$).

Прямой подсчет приводит к формуле (внешне выступающая в ней особенность в точке $t=0$ — кажущаяся)

$$\mu(t) = \sum_{\nu=1}^{n}\left[\left(\frac{t}{\rho}\right)^{n} - \left(\frac{\rho}{t}\right)^{n}\right]\chi_{n,\nu}(t)$$

причем заключающаяся под знаком суммы функция

$$\chi_{n,\nu}(t) = \frac{i}{2\sin\pi\alpha}\left[c_{n-\nu}^{+}\,e^{\pi i\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{-\alpha} - c_{n-\nu}^{-}\,e^{-\pi i\alpha}\left(\frac{\rho-t}{-\rho-t}\right)^{\alpha}\right]$$

где $c_n^{\pm}$ — коэффициенты разложения Тейлора дробно-линейной степенной функции с показателем $\pm\alpha$ в удаленной части области.

§ 2. Предположим, что действию крутящего момента подвержен брус, составленный из двух спаянных вдоль боковых граней полукруглых цилиндров неодинаковых радиусов, которые сделаны из различных однородных материалов (фиг. 1). В этом случае искомые функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$, регулярные соответственно в верхнем и нижнем полукругах S_1 и S_2, должны быть найдены из краевых условий [3,4]

$$2\operatorname{Re}F_k(t) = A_k \text{ на } \gamma_k \, (k=1,2); \; 2\operatorname{Re}F_1(t) = t^2 - R^2 \text{ на } \gamma_0^* \tag{2.1}$$

$$\mu_1 \operatorname{Re} F_1(t) - \mu_2 \operatorname{Re} F_2(t) = \frac{\mu_1 - \mu_2}{2}(t^2 - R^2),$$

$$\operatorname{Im}[F_1(t) - F_2(t)] = 0, \quad -\rho < t < \rho \tag{2.2}$$

Здесь верхняя и нижняя полуокружности обозначены через γ_1 и γ_2, а оба отрезка $(-R, -\rho)$ и (ρ, R) — через γ_0^*; постоянные μ_1 и μ_2 — модули сдвига сред.

Далее назовем δ_k величины

$$\delta_k(t) = F_k(t) + \overline{F_k(t)} \quad (k=1,2), \quad -\rho < t < \rho \tag{2.3}$$

Они же входят в первое из соотношений (2.2). Построим (вовлекая те же $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$) выражения для каждой из функций $F_1(z)$ и $F_2(z)$ в верхнем и нижнем полукруге, затем подставим их во второе условие (2.2), а потом исключим из последнего (в силу упоминавшегося первого условия (2.2)) одну из величин $\delta_1(t)$ и $\delta_2(t)$, например, $\delta_2(t)$. После этого получим для $\delta_1(t)$ следующее сингулярное уравнение:

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\rho}^{\rho} \delta_1(t)\left[\frac{1}{t-t_0} - \lambda\frac{1}{t-\frac{\rho^2}{t_0}} + (1+\lambda)\frac{1}{t-\frac{R^2}{t_0}}\right]dt = f(t_0) + iC \tag{2.4}$$

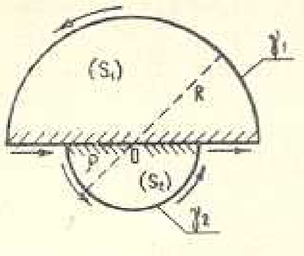
причем параметр $\lambda = -\mu_1(\mu_1+\mu_2)^{-1}$ всегда численно меньше единицы, а задаваемый (с точностью до вещественной постоянной) свободный член описывается формулой

$$f(t_0) = -\frac{1}{\pi i}\int_{-\rho}^{\rho}\left[(1+2\lambda)(t^2-\rho^2) + \lambda(\rho^2 - R^2)\right]\left[\frac{1}{t-t_0} + \right.$$

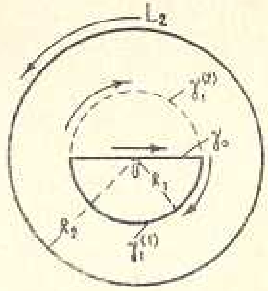
$$\left. + \frac{1}{t-\frac{\rho^2}{t_0}}\right]dt - \frac{(1+\lambda)}{\pi i}\int_{\gamma_0}(t^2 - R^2)\left[\frac{1}{t-t_0} + \frac{1}{t-\frac{R^2}{t_0}}\right]dt \tag{2.5}$$

Ясно, что левая часть основного уравнения (1.1) идентична с характеристической частью особого же уравнения (2.4). Неизлишне подчеркнуть, что оно может быть приведено к вполне регулярной бесконечной системе линейных уравнений.

§ 3. Немаловажна роль той же формулы обращения (1.2) при разборе задачи о кручении круглого бруса, симметрично продольно ослабленного полукруговой полостью (фиг. 2). При этом для функции $F(z)$, разыскиваемой в двусвязной области S, краевые условия на внешней окружности L_2 и на ограничивающих полукруг диаметре γ_0 и полуокружности $\gamma_1^{(1)}$ будут таковы:



Фиг. 1.



Фиг. 2.

$$2\,\mathrm{Re}\,\varphi(t)=C \text{ на } L_2,\quad 2\mathrm{Re}\,\varphi(t)=g(t) \text{ на } \gamma_0 \text{ и } \gamma_1^{(1)} \tag{3.1}$$

где $g(t)=t^2-R_1^2$ или $g(t)=0$, смотря по тому, принадлежит точка t отрезку γ_0 или $\gamma_1^{(1)}$; C — некоторая вещественная постоянная. Пусть $\nu(t)$ — неизвестная, равная удвоенной $\mathrm{Re}\,F(t)$ на полуокружности $\gamma_1^{(2)}$, дополняющей $\gamma_1^{(1)}$ до окружности L_1. С одной стороны, следуя [I], нетрудно выписать значение $F(z)$ в концентрическом кольце, ограниченном окружностями L_1 и L_2, а, с другой стороны, — в полукруге с границами γ_0 и $\gamma_1^{(2)}$. Приравнивая между собой эти значения на дуге $\gamma_1^{(2)}$, придем опять-таки к особому интегральному уравнению

$$\frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_1^{(2)}} \nu(t)\left[\frac{1}{t-t_0}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{t-\dfrac{R_1^2}{t_0}}+K(t,t_0)\right]dt=f(t_0)+iC \tag{3.2}$$

в котором регулярная часть ядра и находящаяся справа известная функция последовательно находятся по формулам

$$K(t,t_0)=\frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{t}+\sum_{n=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{t-\sigma^{n+1}t_0}-\frac{1}{t}\right)+\frac{1}{t-\dfrac{t_0}{\sigma^{n+1}}}\right]\right\}$$

$$f(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}(t^2-R_1^2)\left[\frac{1}{t-t_0}+\frac{1}{t-\dfrac{R_1^2}{t_0}}\right]dt,\quad \sigma=\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2<1 \tag{3.3}$$

Мы видим, что и в данном случае характеристическая часть выведенного уравнения совпадает с левой (1.1) при $\lambda=-\dfrac{1}{2}$. Подобно тому, как в предшествующем случае, уравнение (3.2) можно свести к бесконечной системе линейных уравнений, остающейся вполне регулярной для величин σ, достаточно близких к единице.

В заключение небесполезно отметить, что при сопутствующих затруднениях иного порядка (в целом умеренных и преодолимых) проводится рассмотрение также случая, когда внешней границей области S является кривая более сложного очертания, нежели окружность (как-то эллипс, правильный криволинейный четырехугольник и другие).

Институт проблем механики
АН СССР

Поступила 18 III 1969

Դ. Ի. ՇԵՐՄԱՆ

ՄԵԿ ՀԱՏՈՒԿ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՄԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՆՐԱ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում տրվում է հատուկ տեսքի առաջին սեռի սինգուլյար ինտեգրալ հավասարման շրջումը։ Նրա կորիզը, բացի Կոշիի իմաստով շարժական եզակիությունից ունի չինտեգրվող եզակիություններ հատվածի ծայրերում, որով տարածվում է ինտեգրումը։ Նշվում են համասեռ և բաղադրյալ պրիզմայաձև մարմինների ոլորման մի քանի խնդիրներ, որոնք թույլ են տալիս էֆեկտիվ լուծումներ՝ նշված սինգուլյար հավասարման շրջման օգնությամբ։

D. I. SHERMAN

ON A PARTICULAR SINGULAR INTEGRAL EQUATION AND ITS APPLICATIONS TO SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY

The subject of this work is the study of the singular integral equation

$$\frac{1}{\pi i}\int_{-\rho}^{\rho} \mu(t)\left[\frac{1}{t-t_0} - \lambda\,\frac{1}{t-\dfrac{\rho^2}{t_0}}\right] dt = f(t_0), \quad -\rho < t_0 < \rho$$

Here $\mu(t)$ is the unknown density, $f(t)$ — is a given Haldercontinuous function, λ is a real parameter which is less than unity according to the premises.

The solution of this equation is presented in a closed and understandable form and is continuous over the closed interval $(-\rho, \rho)$. The solution proves to be valid in the case when the absolute term of the equation satisfies an integral relation given in the text of the paper. (This fact is not surprising since everywhere continuous solution of a singular equation is being considered).

In conclusion two problems concerning torsion of a uniform and a composite bar of certain geometry are studied. Each of the problems is reduced to a singular integral equation the characteristic part of which is, in principle, identical to the left-hand side of the equation under discussion.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шерман Д. И.* Приложения теории функций в механике сплошной среды. Тр. международного симпозиума. Тбилиси, 17—23 сент. 1963.
2. *Шерман Д. И.* Третий Всесоюзный съезд по теоретической и прикладной механике. Аннотации докладов, 1968.
3. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. 5, 1966.
4. *Шерман Д. И.* Кручение эллиптического цилиндра, армированного круговым стержнем. Инж. сб., т. X, 1951.