ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

Б. Л. ПЕЛЕХ

# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НЕСИММЕТРИЧНОГО ИЗГИБА ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫХ КРУГЛЫХ ПЛАСТИН

В работе на базе одного варианта обобщенной прикладной теории изгиба трансверсально-изотропных пластин, учитывающей деформации поперечных сдвигов [1, 2], рассмотрена задача о несимметричном изгибе круглой сплошной пластинки нагрузкой, изменяющейся по линейному закону. Полученные результаты сравниваются с соответствующими результатами классической теории [3].

§ 1. *Исходные соотношения.* Задача изгиба трансверсально-изотропных пластинок сводится к интегрированию уравнений [1, 2]

$$\begin{gathered} D\Delta\Delta w = q - \varepsilon\Delta q \\ \Delta\varphi - k^2\varphi = 0 \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $w$, $\varphi$ — функции прогибов и углов поворота, $q$ — интенсивность внешней нагрузки, $\varepsilon = \dfrac{2h^2}{5(1-\nu)}\left(\dfrac{2\sigma}{\sigma'} - \nu'\dfrac{E}{E'}\right)$, $k^2 = \dfrac{5}{2}\dfrac{\sigma}{\sigma'}h^{-2}$, $2h$ — толщина пластинки.

При этом перерезывающие силы, изгибающие и крутящие моменты выражаются через функции $w$ и $\varphi$ следующим образом (в полярных координатах $r$, $\theta$):

$$\begin{gathered} N_r = -D\left(\frac{\partial}{\partial r}\Delta w + \frac{\varepsilon}{D}\frac{\partial q}{\partial r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \\ N_\theta = -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\Delta w + \frac{\varepsilon}{Dr}\frac{\partial q}{\partial\theta}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial r} \end{gathered} \tag{1.2}$$

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\right]\left(w + \varepsilon\Delta w + \frac{\varepsilon^2}{D}q\right) + \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$$

$$M_\theta = -D\left(\nu\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(w + \varepsilon\Delta w + \frac{\varepsilon^2}{D}q\right) - \frac{2}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)$$

$$H_{r\theta} = -D(1-\nu)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(w + \varepsilon\Delta w + \frac{\varepsilon^2}{D}q\right)\right] + \varphi - \frac{2}{k^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$$

В случае опертого контура возможны два варианта граничных условий [2]

$$w = 0, \qquad M_r = 0, \qquad N_\theta = 0 \tag{1.3}$$

либо

$$w = 0, \qquad M_r = 0, \qquad H_{r\theta} = 0 \tag{1.4}$$

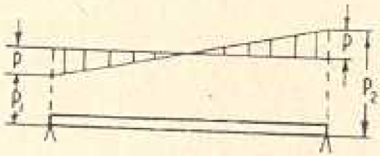
которые могут быть названы условиями шарнирно- и свободно-опертого края соответственно.

§ 1. *Постановка и решение задачи.* Рассмотрим круглую пластинку под действием нагрузки, изменяющейся по линейному закону (фиг. 1). Исследование будем вести на базе уравнений (1.1)—(1.4). Решение указанной задачи можно получить наложением решений двух задач изгиба круглой пластины под действием:

а) равномерно-распределенной нагрузки интенсивности

$$q = p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2);$$

б) нагрузки, изменяющейся линейно вдоль диаметра пластины от $-p$ до $+p$.




Фиг. 1.

Решение задачи а) получено С. А. Амбарцумяном [1, 2]. Остается решить задачу б). Исследуем поэтому действие на пластинку неравномерной нагрузки, изображенной на фиг. 1. В этом случае интенсивность нормальной нагрузки $q$ представляется так [3]:

$$q = \frac{pr}{a}\cos\theta \tag{2.1}$$

Решения уравнений (1.1) разыскиваем в виде

$$\begin{gathered} w = w_1 + w_0 = w_1 + \sum_{m=1}^{\infty}[W_m(r)\cos m\theta + \widetilde{W}_m(r)\sin m\theta] \\ \varphi = \varphi_0 = \sum_{m=1}^{\infty}[\Phi_m(r)\sin m\theta + \overline{\Phi}_m(r)\cos m\theta] \end{gathered} \tag{2.2}$$

где $w_1$ — частное решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right) = \frac{q}{D} - \varepsilon\frac{\Delta q}{D} \tag{2.3}$$

которое легко разыскивается

$$w_1 = \frac{pr^5}{192\,aD}\cos\theta \tag{2.4}$$

а $w_0$, $\varphi_0$ — общие решения однородных уравнений (1.1), которые в данном случае можно представить в форме

$$w_0 = A_1 r + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + D_1 r \ln r$$
$$\varphi_0 = E_1 J_1 (kr) + F_1 K_1 (kr) \tag{2.5}$$

Вводя безразмерную координату $\rho$ по формуле

$$\rho = \frac{r}{a} \quad (\rho \leqslant 1) \tag{2.6}$$

окончательные искомые функции $w$, $\varphi$ запишем в виде

$$w = \frac{pa^4}{192\,D} (\rho^5 + A\rho + B\rho^3 + C\rho^{-1} + D\rho \ln \rho) \cos \theta$$
$$\varphi = \frac{pa^4}{192} [EJ_1 (t\rho) + FK_1 (t\rho)] \sin \theta \tag{2.7}$$

где $t = ka$.

Постоянные в (2.7) определяются из граничных условий на внешнем и внутреннем контурах кольцевой пластинки.

Если пластинка сплошная, то прогибы и моменты в центре пластинки должны быть конечными и в (2.7) надо положить $C = D = F = 0$ (условия „в центре").

В этом случае

$$w = \frac{pa^4}{192\,D} (\rho^5 + A\rho + B\rho^3) \cos \theta$$
$$\varphi = \frac{pa^6}{192} EJ_1 (t\rho) \sin \theta \tag{2.8}$$

§ 3. *Изгиб свободно-опертой пластины линейно-изменяющейся нагрузкой.* В предположении, что край сплошной круглой пластинки свободно оперт, постоянные в (2.8) определяем из условий (1.4) при $\rho = 1$. Эта процедура приводит к трем алгебраическим уравнениям относительно $A$, $B$ и $E$:

$$1 + A + B = 0$$
$$2(5 + \nu) + 24\,\varepsilon_0 (3 + \nu) + (3 + \nu) B - \frac{1}{2} E \varepsilon_0 (1 - \nu) [t J_1'(t) - J_1 (t)] = 0$$
$$2 + 24\,\varepsilon_0 + B - \frac{E\varepsilon_0}{4} [t^2 J_1 (t) - 2 (t J_1' (t) - J_1 (t))] = 0 \tag{3.1}$$

отсюда

$$A=\frac{7+\nu}{3+\nu}+24\varepsilon_0+\frac{8(1-\nu)}{3+\nu}\frac{L_1(t)}{L(t)}$$

$$B=-\left[\frac{2(5+\nu)}{3+\nu}+24\varepsilon_0+\frac{8(1-\nu)}{3+\nu}\frac{L_1(t)}{L(t)}\right] \qquad E=-\frac{16}{\varepsilon_0 L(t)} \tag{3.2}$$

где

$$L(t)=(3+\nu)t^2J_1(t)-8L_1(t), \quad L_1(t)=tJ_1'(t)-J_1(t), \quad \varepsilon_0=\frac{\varepsilon}{a^2} \tag{3.3}$$

Таким образом, прогиб пластинки $w$ и функция $\varphi$ оказываются равными

$$w=\frac{pa^4\rho(1-\rho^2)}{192D}\left[\left(\frac{7+\nu}{3+\nu}-\rho^2\right)+24\varepsilon_0+\frac{1-\nu}{3+\nu}\frac{8L_1(t)}{L(t)}\right]\cos\theta \tag{3.4}$$

$$\varphi=-\frac{pa^4}{12\varepsilon_0}\frac{J_1(t\rho)}{L(t)}\sin\theta \tag{3.5}$$

По известным функциям $w$, $\varphi$ находим изгибающие моменты и перерезывающие силы

$$M_\rho=\frac{pa^2}{48}\left\{\rho(1-\rho^2)(5+\nu)-\frac{4(1-\nu)}{\rho L(t)}\left[\rho^2L_1(t)-L_1(t\rho)\right]\right\}\cos\theta$$

$$M_\theta=\frac{pa^2\rho}{48(3+\nu)}\left\{(5+\nu)(1+3\nu)-(1+5\nu)(3+\nu)\rho^2+\right.$$

$$\left.+\frac{4(1-\nu)}{\rho^2L(t)}\left[\rho^2(1+3\nu)L_1(t)-(3+\nu)L_1(t\rho)\right]\right\}\cos\theta$$

$$N_\rho=\frac{pa}{24(3+\nu)}\left\{2(5+\nu)-9(3+\nu)\rho^2-\right.$$

$$\left.-\frac{1-\nu}{L(t)}\left[t^2(3+\nu)J_1(t\rho)-8L_1(t)\right]\right\}\cos\theta$$

$$N_\theta=-\frac{pa}{24(3+\nu)}\left\{\rho\left[2(5+\nu)-3\rho^2(3+\nu)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu}{L(t)}\left[t^3(3+\nu)J_1'(t\rho)+8\rho L_1(t)\right]\right\}\sin\theta \tag{3.6}$$

Перейдем к обсуждению результатов. Во всех внутренних точках пластины, не принадлежащих границе ($\rho<1$), справедливо следующее: при неограниченном увеличении параметра $\frac{a}{h}$ до бесконечности из полученных выражений для усилий и моментов (3.6) следуют соответствующие зависимости теории Кирхгофа [3].

Действительно, используя ассимптотические представления для функций Бесселя, выводим, что

$$\lim_{a/h\to\infty} M_\rho(\rho, \theta) = M_\rho^{(k)} = \frac{pa^2}{48}\rho(1-\rho^2)(5+\nu) \quad \text{и т. д.,} \tag{3.7}$$

где индексом $(k)$ обозначены величины, соответствующие классической теории [3].

Несколько по-иному обстоит дело на граничном контуре плиты. При $\rho = 1$ из (3.6) для перерезывающих усилий получаем

$$N_\rho = -\frac{pa}{4}\cos\theta \tag{3.8}$$

$$N_\theta = -\frac{pa}{12}\,\frac{tJ_0(t)}{\varepsilon_0 L(t)}\sin\theta \tag{3.9}$$

При этом

$$4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{pa}{4}\cos\theta\, a^2\cos\theta d\theta = \frac{\pi a^3 p}{4} \tag{3.10}$$

что, как и должно быть, уравновешивает момент внешней нагрузки относительно диаметра пластинки.

Исследуя выражение (3.9), приходим к выводу, что перерезывающие усилия $N_\theta$, действующие в площадках, перпендикулярных к граничному контуру, имеют порядок $h^{-1}$, т. е. на единицу выше порядка усилий, определяемых классической теорией [3].

Соответствующие касательные срезывающие напряжения $\tau_{\theta z}$ при этом порядка $h^{-2}$, т. е. порядка главных изгибных напряжений $\sigma_\rho$, $\sigma_\theta$, $\tau_{\rho\theta}$.

Качественно совпадающий с отмеченным результат получен на базе уравнений теории типа Тимошенко в работах [4, 5] для прямолинейного свободно-опертого края и свободной круговой полости; для свободной полости этот же эффект замечен в работах [6, 7], выполненных на базе уравнений теории упругости.

Львовский политехнический
институт

Поступила 10 VII 1968.

Բ. Լ. Պելեխ

## ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ-ԻԶՈՏՐՈՊ ԿԼՈՐ ՍԱԼԵՐԻ ՈՉ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԾՌՄԱՆ ՄԻ ԽՆԴՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

*Ս. Ա. Համբարձումյանի սալերի ծռման ընդհանրացված տեսության հիման վրա, դիտարկված է՝ գծային օրենքով փոփոխվող բեռի ազդեցության տակ, տրանսվերսալ-իզոտրոպ կլոր սալի ոչ-սիմետրիկ ծռման խնդիրը։*

*Ստացված լուծումների ուսումնասիրության ժամանակ, ի հայտ են բերվել մի շարք քանակական և որակական շեղումներ Կիրխհոֆի կլասիկ տեսության համապատասխան արդյունքներից։*

*Մասնավորապես, ցույց է տրված, որ ազատ հենված եզրին ուղղահայաց հարթակներում, կտրող ուժերի կարգը մեկով բարձր է Կիրխհոֆի կլասիկ տեսությամբ որոշվող համապատասխան կտրող ուժերից։*

B. L. PELEKH

## ON THE PROBLEM OF ASYMMETRICAL BENDING OF TRANSVERSAL-ISOTROPIC ROUND PLATES

Summary

In this paper the problem of bending of transversal-isotropic round plates with a linear load is considered on the base the specified theory of bending of plates [1, 2]. The results are compared with the classical theory.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных пластин. Изд. Наука, М., 1967.
3. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, 1963.
4. *Пелех Б. Л.* К определению коэффициентов концентрации при изгибе плит с отверстиями. Прикл. мех., т. I, вып. 7, 1965.
5. *Шереметьев М. П., Пелех Б. Л., Дячина О. П.* Исследование влияния деформаций сдвига на изгиб квадратной плиты сосредоточенной силой. Прикл. мех., т. IV, вып. 4, 1968.
6. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, т. XXVIII, вып. 3, 1964.
7. *Колос А. В.* Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ, т. XXVIII, вып. 3, 1964.