ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

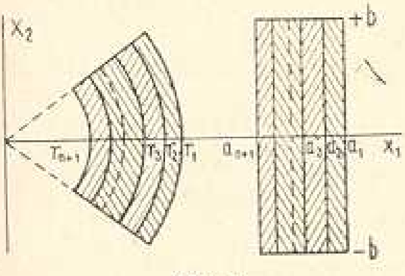
ЗАДАЧА БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ ИЗГИБА СОСТАВНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА ИЗ НЕСЖИМАЕМЫХ МАТЕРИАЛОВ

Задача больших упругих деформаций для цилиндрического изгиба однородного изотропного и несжимаемого параллелепипеда с помощью функции энергии деформации общего вида исследована в работе Ривлина [1, 2]. В работе [3] эта же задача была решена для случая, когда функция энергии деформации материала определяется выражением Муней-Ривлина.

В настоящей работе эта задача рассматривается для параллелепипеда, составленного из нескольких параллелепипедов из различных упругих изотропных и несжимаемых материалов.

1. Пусть границы и поверхности контакта недеформированного параллелепипеда, составленного из различных однородных, изотропных, несжимаемых и упругих материалов, в системе прямоугольных декартовых координат (x_1, x_2, x_3) определяются плоскостями (фиг. 1)

$$\begin{gathered} x_1 = a_1, \quad x_2 = a_2, \ldots, \quad x_1 = a_{n+1} \\ x_2 = \pm b, \quad x_3 = \pm c \end{gathered} \tag{1.1}$$



Фиг. 1.

Пусть параллелепипед деформируется симметрично относительно оси x_1, так что

1) каждая плоскость, первоначально нормальная к оси x_1, становится в деформированном состоянии частью цилиндра с осью x_3;

2) плоскости, первоначально нормальные к оси x_2, в деформированном состоянии параллелепипеда проходят через ось x_3;

3) в направлении оси x_3 происходит равномерное растяжение с коэффициентом растяжения λ.

Для определения деформированного состояния тела выберем систему цилиндрических полярных координат (r, θ, y_3).

Используя условия несжимаемости, получаем соотношения [2]

$$x_1 = \frac{1}{2} Ar^2 + B, \quad x_2 = \frac{\lambda\theta}{A}, \quad x_3 = \frac{y_3}{\lambda} \tag{1.2}$$

где A и B — постоянные.

Обозначая через $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$ радиусы граничных цилиндрических поверхностей деформированного составного параллелепипеда, на основании (1.2) для A и B будем иметь выражения

$$\begin{aligned} A &= \frac{2(a_1 - a_{k+1})}{r_1^2 - r_{k+1}^2} = \frac{2(a_1 - x_1)}{r_1^2 - r^2} = \frac{2(x_1 - a_{n+1})}{r^2 - r_{n+1}^2} \\ B &= \frac{a_{k+1} r_1^2 - a_1 r_{k+1}^2}{r_1^2 - r_{k+1}^2} = \frac{x_1 r_1^2 - a_1 r^2}{r_1^2 - r^2} = \frac{a_{n+1} r^2 - x_1 r_{n+1}^2}{r^2 - r_{n+1}^2} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Контрвариантные компоненты тензора напряжения будут [2]

$$\begin{gathered} \tau_{(k)}^{11} = L_{(k)}(r) + H_k \\ r^2 \tau_{(k)}^{22} = \tau_{(k)}^{11} + \left(\frac{A^2 r^2}{\lambda^2} - \frac{1}{A^2 r^2} \right) (\Phi_{(k)} + \lambda^2 \Psi_{(k)}) = \tau_{(k)}^{11} + r \frac{dW_{(k)}}{dr} \\ \tau_{(k)}^{33} = \tau_{(k)}^{11} + \left(\lambda^2 - \frac{1}{A^2 r^2} \right) \left(\Phi_{(k)} + \frac{A^2 r^2}{\lambda^2} \Psi_{(k)} \right) \\ \tau_{(k)}^{23} = \tau_{(k)}^{31} = \tau_{(k)}^{12} = 0 \\ r_k \geqslant r \geqslant r_{k+1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \end{gathered} \tag{1.4}$$

где H_k — постоянные,

$$L_{(k)}(r) = \int_{r_k}^{r} \left(\frac{A^2 r}{\lambda^2} - \frac{1}{A^2 r^3} \right) (\Phi_{(k)} - \lambda^2 \Psi_{(k)}) \, dr = W_{(k)}(r) - W_{(k)}(r_k) \tag{1.5}$$

$$\Phi_{(k)} = 2 \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1}, \qquad \Psi_{(k)} = 2 \frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2} \tag{1.6}$$

$W_{(k)}$ — функция энергии деформации; I_1 и I_2 — первый и второй инварианты деформации, определяемые уравнениями

$$I_1 = \frac{1}{A^2 r^2} + \frac{A^2 r^2}{\lambda^2} + \lambda^2, \quad I_2 = A^2 r^2 + \frac{\lambda^2}{A^2 r^2} + \frac{1}{\lambda^2} \tag{1.7}$$

На основании (1.4) для τ^{11} на граничных цилиндрических поверхностях деформированного тела имеем

$$\begin{array}{ll} \tau_{(1)}^{11} \big|_{r=r_1} = H_1 & \tau_{(1)}^{11} \big|_{r=r_2} = L_{(1)}(r_2) + H_1 \\ \tau_{(2)}^{11} \big|_{r=r_2} = H_2 & \tau_{(2)}^{11} \big|_{r=r_3} = L_{(2)}(r_3) + H_2 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \tau_{(n)}^{11} \big|_{r=r_n} = H_n & \tau_{(n)}^{11} \big|_{r=r_{n+1}} = L_{(n)}(r_{n+1}) + H_n \end{array} \tag{1.8}$$

Из условия сцепления

$$\tau_{(k)}^{11}\Big|_{r=r_{k+1}} = \tau_{(k+1)}^{11}\Big|_{r=r_{k+1}} \tag{1.9}$$

и (1.8) следует

$$\begin{gathered} H_1 = \tau_{(1)}^{11}\Big|_{r=r_1} = R_1 \\ H_{k+1} = H_k + L_{(k)}(r_{k+1}) = H_k + W_{(k)}(r_{k+1}) - W_{(k)}(r_k) \\ \tau_{(n)}^{11}\Big|_{r=r_{n+1}} = R_2 = H_n + L_{(n)}(r_{n+1}) = H_n + W_{(n)}(r_{n+1}) - W_{(n)}(r_n) \\ (k = 1, 2, \ldots, n-1) \end{gathered} \tag{1.10}$$

где R_1 и R_2 — нормальные напряжения на внешней и внутренней цилиндрических поверхностях деформированного тела.

На основании (1.10) и (1.5) получаем соотношение

$$R_1 - R_2 + \sum_{k=1}^{n} L_{(k)}(r_{k+1}) = 0 \tag{1.11}$$

или

$$R_1 - R_2 + \sum_{k=1}^{n} [W_{(k)}(r_{k+1}) - W_{(k)}(r_k)] = 0 \tag{1.12}$$

На каждой из граней $\theta = \pm\theta_0$ действует результирующая нормальная сила

$$F = 2\lambda c \sum_{k=1}^{n} \int_{r_{k+1}}^{r_k} r^2 \tau_{(k)}^{22} dr \tag{1.13}$$

Так как согласно (1.4) и (1.5)

$$r^2 \tau_{(k)}^{22} = W_{(k)}(r) - W_{(k)}(r_k) + H_k + r\,\frac{dW_{(k)}(r)}{dr} =$$

$$= \frac{d}{dr} r\,[W_{(k)}(r) - W_{(k)}(r_k) + H_k] = \frac{d}{dr} r\,[L_{(k)}(r) + H_k] = \frac{d}{dr}(r\tau_{(k)}^{11}) \tag{1.14}$$

выражение (1.13), если принять во внимание условия сцепления (1.9), приводится к виду

$$F = 2\lambda c \sum_{k=1}^{n} [r\tau_{(k)}^{11}]_{r_{k+1}}^{r_k} = 2\lambda c\,(r_1 R_1 - r_{n+1} R_2) \tag{1.15}$$

Отсюда следует, что если внешняя и внутренняя цилиндрические поверхности свободны от напряжений, или $r_1 R_1 = r_{n+1} R_2$, то $F = 0$.

Результирующий момент, действующий на каждую из граней $\theta = \pm\theta_0$, равен

$$M=2\lambda c\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r^3\tau^{22}_{(k)}dr=2\lambda c\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r\frac{d}{dr}\left(r\tau^{11}_{(k)}\right)dr=$$

$$=2\lambda c\left(r_1^2R_1-r_{n+1}^2R_2\right)+2\lambda c\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} r\tau^{11}_{(k)}dr \tag{1.16}$$

Если $R_1=R_2=0$ или $r_1^2R_1=r_{n+1}^2R_2$, то

$$M=2\lambda c\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{r_k}^{r_{k+1}} r\tau^{11}_{(k)}dr \tag{1.17}$$

Результирующая сила, действующая на поверхностях $y_3=\pm\lambda c$, будет

$$N=2\theta_0\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{r_{k+1}}^{r_k} r\tau^{33}_{(k)}dr \tag{1.18}$$

Для полного решения задачи необходимы конкретные граничные условия, например:

а) заданы радиусы r_1 и r_{n+1} (или один из них и θ_0), коэффициент растяжения λ и напряжение R_1 (или R_2).

Тогда для определения деформированного состояния из (1.2) и (1.3) получаем

$$r=\sqrt{\frac{\varkappa_1r_1^2-\varkappa_1r_{k+1}^2-a_{k+1}r_1^2+a_1r_{k+1}^2}{a_1-a_{k+1}}} \tag{1.19}$$

$$\theta=\frac{2\varkappa_2\left(a_1-a_{k+1}\right)}{\lambda\left(r_1^2-r_{k+1}^2\right)} \tag{1.20}$$

Постоянные H_k и другое нормальное напряжение R_2 (или R_1) определяются из (1.10). Напряженное состояние определяется уравнениями (1.4), (1.15), (1.16) и (1.18);

б) заданы нормальные напряжения R_1 и R_2, коэффициент растяжения λ и θ_0.

Тогда можно с помощью (1.19) и (1.20) все радиусы r_k выразить, например, через r_1, после чего легко найти остальные радиусы и напряженное состояние;

в) заданы нормальные напряжения R_1 и R_2, коэффициент растяжения λ и один из радиусов r_k, например, r_1.

В этом случае можно с помощью (1.20) все остальные радиусы выразить через θ_0 и решить уравнение (1.12) относительно θ_0;

г) заданы нормальные напряжения R_1 и R_2, результирующий момент M и λ.

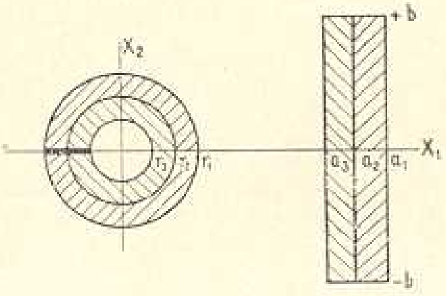
Тогда для определения деформированного состояния можно с помощью (1.20) все радиусы выразить через r_1 и θ_0, а потом, подставляя в (1.16) и (1.12), получить в общем случае два трансцендентных уравнения для определения r_1 и θ_0. Напряженное состояние определяется соотношениями (1.4), (1.15), (1.16) и (1.18).

2. Рассмотрим следующий численный пример. Пусть параллелепипед, составленный из двух упругих материалов, для которых функции энергии деформации имеют выражения

$$\begin{aligned} W_{(1)} &= (I_1 - 3) + 0.14\,(I_2 - 3) \\ W_{(2)} &= 2\,(I_1 - 3) + 0.28\,(I_2 - 3) \end{aligned} \tag{2.1}$$

в системе прямоугольных декартовых координат (x_1, x_2, x_3) недеформированного состояния определяется плоскостями (фиг. 2)

$$\begin{gathered} x_1 = a_1 = 25\,см, \quad x_1 = a_2 = 22\,см, \quad x_1 = a_3 = 20\,см \\ x_2 = \pm b = \pm 10, \quad x_3 = \pm c = \pm 10\,см \end{gathered} \tag{2.2}$$



Фиг. 2.

Пусть параллелепипед изгибается в круглую цилиндрическую трубу, внешние цилиндрические поверхности которой свободны от напряжений, причем по направлению x_3 эта труба не растягивается.

$$R_1 = R_2 = 0, \quad \lambda = 1, \quad \theta_0 = \pi \tag{2.3}$$

Из (1.20) получаем

$$\theta_0 = \frac{2b\,(a_1 - a_2)}{r_1^2 - r_2^2} = \frac{2b\,(a_1 - a_3)}{r_1^2 - r_3^2} \tag{2.4}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} r_2^2 &= r_1^2 - 19.09855 \\ r_3^2 &= r_1^2 - 31.83091 \end{aligned} \tag{2.5}$$

На основании (1.7)

$$I_1 = I_2 = \frac{1}{A^2 r^2} + A^2 r^2 + 1 \tag{2.6}$$

где A определяется из (1.2),

$$A = \frac{\lambda \theta_0}{b} = 0.1\,\pi \tag{2.7}$$

Функции энергии деформации первого и второго слоев упрощаются

$$W_{(1)}(r) = 1.14\,(I_1 - 3) = 11.55056\,\frac{1}{r^2} + 0.11251\,r^2 - 2.28 \tag{2.8}$$

$$W_{(2)}(r) = 2.28\,(I_1 - 3) = 23.10112\,\frac{1}{r^2} + 0.22502\,r^2 - 4.56$$

Из (1.12) находим

$$W_{(1)}(r_2) - W_{(1)}(r_1) + W_{(2)}(r_3) - W_{(2)}(r_2) = 0 \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) и (2.5) в (2.9), после простых преобразований получаем

$$r_1^6 - 50.9295\,r_1^4 + 505.2654\,r_1^2 + 1400.4540 = 0 \tag{2.10}$$

Отсюда

$$r_1 = 5.9715\,см, \quad r_2 = 4.0694\,см, \quad r_3 = 1.9564\,см$$

$W_{(1)}(r_1) = 2.056, \quad W_{(1)}(r_2) = 0.281, \quad W_{(2)}(r_2) = 0.561, \quad W_{(2)}(r_3) = 2.337$

На основании (1.10) получаем

$$H_1 = R_1 = 0, \quad H_2 = W_{(1)}(r_2) - W_{(1)}(r_1) = -1.775$$

Компоненты контрвариантного тензора напряжений будут

$$\tau_{(1)}^{11} = 11.55056\,\frac{1}{r^2} + 0.1125\,r^2 - 4.336$$

$$r^2\tau_{(1)}^{22} = -11.55056\,\frac{1}{r^2} + 0.3375\,r^2 - 4.336$$

$$\tau_{(1)}^{33} = 5.18438\,\frac{1}{r^2} + 0.2005\,r^2 - 2.616$$

$$\tau_{(2)}^{11} = 23.10112\,\frac{1}{r^2} + 0.2250\,r^2 - 6.896$$

$$r^2\tau_{(2)}^{22} = -23.10112\,\frac{1}{r^2} + 0.6750\,r^2 - 6.896$$

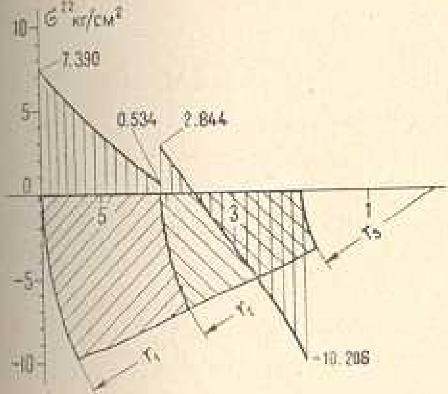
$$\tau_{(2)}^{33} = 10.36876\,\frac{1}{r^2} + 0.4010\,r^2 - 3.456$$

На фиг. 3 показан график распределения нормальных нагрузок $\sigma^{22} = r^2\tau^{22}$, действующих на каждую из плоскостей $\theta = \pm\pi$. Результирующий момент этих нагрузок определяется из (1.17)

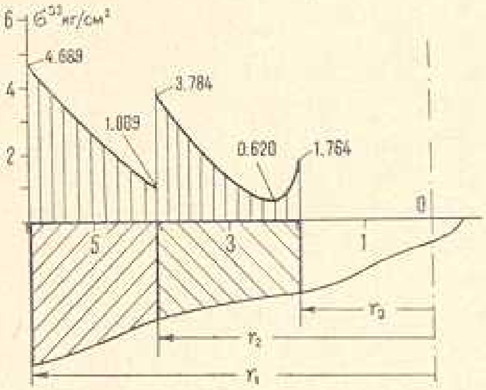
$$M = 4.26\ кгм$$

График распределения нормальных нагрузок на торцевых плоскостях $y_3 = \pm 10$ *см* изображен на фиг. 4. Результирующая сила этих нагрузок определяется из (1.18)

$$N = 254.14 \text{ кг}$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за руководство работой и ценные советы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IV 1968

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԱՆՍԵՂՄԵԼԻ ՆՅՈՒԹԵՐԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ԶՈՒԳԱՀԵՌԱՆԻՍՏԻ ԾՌՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսության հիման վրա դիտարկվում է անսեղմելի նյութերից պատրաստված բազմաշերտ զուգահեռանիստի շրջանային ծռման խնդիրը, երբ դեֆորմացիաների էներգիայի ֆունկցիան ունի ընդհանուր տեսք։

Մասնավորապես, թվային օրինակի տեսքով, ուսումնասիրվում է՝ Մունի-Ռիվլինի նյութերից պատրաստված, երկշերտ ուղղանկյուն զուգահեռանիստի ծռման խնդիրը։ Ընդունվում է, որ զուգահեռանիստը ծռվում է մինչև կլոր գլանային խողովակ դառնալը, որի արտաքին գլանային մակերևույթները ազատ են լարումներից։

Աշխատանքում օգտագործվում է համասեռ զուգահեռանիստի ծռման համար Ռիվլինի կողմից արված լուծումները [1, 2]։

R. E. MKRTCHIAN

THE PROBLEM OF LARGE ELASTIC DEFORMATIONS FOR FLEXURE OF A COMPOSITE INCOMPRESSIBLE CUBOID

Summary

The solution of the problem of large elastic deformations for flexure of a composite incompressible cuboid is considered, when the strain-energy function has a general form.

In particular, the numerical solution of the problem of flexure of a cuboid composed of two layers of Mooney-Rivlin's materials, when the cuboid after deformation becomes a cylindrical tube, is considered in detail.

R. S. Rivlin's solutions [1, 2] for a homogeneous cuboid are used.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rivlin R. S.* Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, VI. Futher Results in the Theory of Torsion, Shear and Flexure. Philos. Trans Roy. Soc., A, 242, 1949, 173—195.
2. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity. Clarendon Press, Oxford, 1954.
3. *Rivlin R. S.* Large Elastic Deformations of Isotropic Materials, V. The Problem of Flexure. Proc. Roy. Soc., A, 195, 1949, 463.