

О. М. САПОНДЖЯН

## ПРИНЦИП СЕН-ВЕНАНА ДЛЯ СМЕЩЕНИЙ

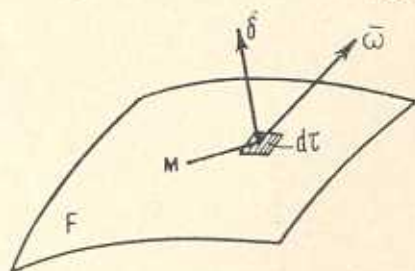
Известный принцип Сен-Венана смягчает граничные условия в случае заданной внешней нагрузки на небольшой части поверхности упругого твердого тела и, тем самым, дает возможность нахождения приближенных решений задач теории упругости.

В настоящей работе сделана попытка сформулировать для случая малых деформаций новый принцип, смягчающий граничные условия в случае заданных на небольшой части поверхности упругого тела смещений.

Ввиду аналогичности формулировки нового принципа и принципа Сен-Венана, мы назвали его принципом Сен-Венана для смещений.

### § 1. Основные уравнения

Небольшую часть поверхности упругого твердого тела, на которой заданы смещения, обозначим через  $F$ . Выделим вокруг произвольной точки  $M$  поверхности  $F$  элемент площади  $d\tau$  (фиг. 1).



Фиг. 1.

Имея в виду случай малых деформаций, деформированное состояние элемента  $d\tau$  будем характеризовать: линейным смещением  $\bar{\delta}$  элемента  $d\tau$  и угловым смещением  $\bar{\omega}$  того же элемента относительно оси, проходящей через точку  $M$ .

Векторы  $\bar{\omega}$ , зависящие от координат поверхности  $F$ , вполне определяются векторами  $\bar{\delta}$  (зависящими от тех же координат), однако, для элемента  $d\tau$  векторы  $\bar{\delta}$  и  $\bar{\omega}$  можно рассматривать независимо друг от друга.

Отметим далее, что для элемента  $d\tau$  вектор  $\bar{\delta}$  является свободным вектором, а  $\bar{\omega}$  — скользящим. Учитывая это, перенесем указанные

векторы в произвольно выбранное начало координат  $O$ . Вследствие этого, влияния смещений  $\bar{\delta}$  и  $\bar{\omega}$  на элемент  $d\tau$  заменяются влияниями линейного смещения  $\bar{\delta}_0 = \bar{\delta}$ , углового смещения  $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}$  и дополнительного линейного смещения  $\bar{r} \times \bar{\omega}$ , где  $\bar{r}$  — радиус-вектор точки  $M$  относительно точки  $O$ , а знак  $\times$  обозначает векторное умножение.

Обозначим через  $\bar{\Delta}$ ,  $\bar{Q}$  и  $\bar{\Delta}_\omega$  средние значения совокупности соответственно следующих величин  $\bar{\delta}_0 = \bar{\delta}$ ,  $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}$  и  $\bar{r} \times \bar{\omega}$ , т. е.

$$\bar{\Delta} = \frac{1}{F} \int_F \bar{\delta} d\tau \quad (1.1)$$

$$\bar{Q} = \frac{1}{F} \int_F \bar{\omega} d\tau \quad (1.2)$$

$$\bar{\Delta}_\omega = \frac{1}{F} \int_F (\bar{r} \times \bar{\omega}) d\tau \quad (1.3)$$

Вектор  $\bar{\Delta}$  будем называть главным вектором линейных смещений, вектор  $\bar{Q}$  — главным вектором угловых смещений, а  $\bar{\Delta}_\omega$  — главным моментом угловых смещений относительно начала координат.

Сравнивая выражения (1.1)–(1.3) с выражениями главного вектора и главного момента внешней нагрузки, замечаем, что величина  $\frac{\bar{\omega}}{F}$  аналогична внешнему напряжению, а величина  $\frac{\bar{\delta}}{F}$  — интенсивности распределенных моментов.

Придадим теперь физический смысл векторам  $\bar{\Delta}$ ,  $\bar{Q}$  и  $\bar{\Delta}_\omega$ . Для этого, считая поверхность  $F$  абсолютно твердой, определим влияние на эту поверхность смещений  $\bar{\delta}$  и  $\bar{\omega}$  элемента  $d\tau$ . Затем, пользуясь законом наложения, просуммируем влияния  $\bar{\delta}$  и  $\bar{\omega}$  всех элементов поверхности  $F$  на ту же поверхность.

Влияние линейного смещения  $\bar{\delta}$  легко определить, если использовать закон количества движения при следующих условиях.

1. Начальные условия: смещения и скорости точек поверхности  $F$ , а также скорость и угловое смещение элемента  $d\tau$  равны нулю, а линейное смещение его равно  $\bar{\delta}$ .

2. Конечные условия: поверхность  $F$  и элемент  $d\tau$  имеют одинаковое смещение, которое обозначим через  $d\bar{\Delta}$ .

Полагая, что движение системы  $F$  и  $d\tau$  происходит благодаря внутренним силам, возникающим между  $F$  и  $d\tau$ , принимая кроме того, что поверхность  $F$  однородная, из указанного закона количества движения находим, что линейное смещение  $\bar{\delta}$  элемента  $d\tau$  сообщает абсолютно твердой поверхности  $F$  поступательное смещение

$$d\bar{\Delta} = \frac{\bar{\omega} d\tau}{F} \quad (1.4)$$

Учтем теперь влияние углового смещения  $\bar{\omega}$  элемента  $d\tau$  на абсолютно твердую поверхность  $F$ . Полагаем, что это смещение вызывает бесконечно малое угловое смещение  $d\bar{\Omega}$  поверхности  $F$  относительно оси, проходящей через точку  $M$ .

Перенесем угловое смещение  $d\bar{\Omega}$  в начало координат. Вследствие этого указанное смещение заменится поступательным смещением, равным

$$\bar{r} \times d\bar{\Omega} \quad (1.5)$$

и угловым смещением  $d\bar{\Omega}_0 = d\bar{\Omega}$  относительно оси, проходящей через точку  $O$ . Перенесем в начало координат также угловое смещение  $\bar{\omega}$  элемента  $d\tau$ . Тогда это смещение, как было указано выше, будет вызывать линейное смещение элемента  $d\tau$ , равное  $\bar{r} \times \bar{\omega}$ , которое, согласно (1.4), сообщает поступательное смещение поверхности  $F$ , равное

$$\frac{1}{F} (\bar{r} \times \bar{\omega}) d\tau \quad (1.6)$$

Приравнивая поступательные смещения (1.5) и (1.6), будем иметь

$$\bar{r} \times \left( d\bar{\Omega} - \frac{\bar{\omega} d\tau}{F} \right) = 0 \quad (1.7)$$

Откуда, ввиду произвольности вектора  $\bar{r}$ , получим

$$d\bar{\Omega} = \frac{\bar{\omega} d\tau}{F} \quad (1.8)$$

Таким образом, величины  $\frac{\bar{\omega} d\tau}{F}$  и  $\frac{\bar{\omega} d\tau}{F}$  определяют влияние смещений элемента  $d\tau$  на абсолютно твердую поверхность  $F$ . При этом первая из них является поступательным смещением указанной поверхности, а вторая — угловым смещением относительно оси, проходящей через точку  $M$ .

Учитывая, что величина (1.4) является свободным вектором, а (1.8) — скользящим, и суммируя влияния смещений всех элементов поверхности  $F$  на эту поверхность, приходим к формулам (1.1)–(1.3). При этом вектор  $\bar{\Delta}$  будет представлять собой поступательное смещение абсолютно твердой поверхности  $F$ , вектор  $\bar{\Omega}$  — угловое смещение указанной поверхности, а вектор  $\bar{\Delta}_0$  — дополнительное поступательное смещение той же поверхности.

Применим формулы (1.1)–(1.3) для определения главных векторов и главного момента жестких смещений поверхности  $F$ .

Общий вид указанных смещений такой

$$\begin{aligned}\bar{\delta} &= \bar{\delta}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} \\ \bar{\delta}_0 &= \text{const}, \quad \bar{\omega} = \text{const}\end{aligned}\quad (1.9)$$

Согласно (1.9) поверхность  $F$  совершает поступательное движение с линейным смещением  $\bar{\delta}_0$  и вращательное движение вокруг оси, проходящей через начало координат с угловым смещением  $\bar{\omega}$ .

Внося (1.9) в (1.1)–(1.3), будем иметь

$$\begin{aligned}\bar{\Delta} &= \bar{\delta}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_c \\ \bar{\Omega} &= \bar{\omega} \\ \bar{\Delta}_\omega &= -\bar{\omega} \times \bar{r}_c\end{aligned}\quad (1.10)$$

где  $\bar{r}_c$  — радиус-вектор центра тяжести поверхности  $F$  относительно начала координат.

Из (1.10) получим

$$\begin{aligned}\bar{\Delta} + \bar{\Delta}_\omega &= \bar{\delta}_0 \\ \bar{\Omega} &= \bar{\omega}\end{aligned}\quad (1.11)$$

Эта система смещений совпадает с системой (1.9).

Таким образом, главные векторы и главный момент жестких смещений оказывают на поверхность  $F$  то же самое влияние, что и указанные смещения, при этом влияния величин  $\bar{\Delta}$  и  $\bar{\Delta}_\omega$  на поверхности  $F$  можно заменить влиянием величины  $\bar{\Delta} + \bar{\Delta}_\omega$ .

Очевидно, что влияние нежестких смещений на деформированную поверхность  $F$  не равносильно влиянию главных векторов и главного момента этих смещений на абсолютно твердую поверхность  $F$ . Однако, согласно принятому выше правилу суммирования смещений, системы смещений, имеющие одинаковые главные векторы линейных смещений  $\bar{\Delta}$ , одинаковые главные векторы угловых смещений  $\bar{\Omega}$  и одинаковые главные моменты угловых смещений  $\bar{\Delta}_\omega$ , оказывают одинаковые влияния на абсолютно твердую поверхность  $F$ . Такие системы смещений будем называть „кинематически эквивалентными“ системами смещений.

Принцип Сен-Венана для смещений (принцип упругой равнозначности „кинематически эквивалентных“ систем смещений) сформулируем так: *при замене заданной на небольшой части поверхности упругого тела системы смещений „кинематически эквивалентной“ ей другой системой, изменение деформированного состояния тела в точках, удаленных от этой части поверхности на расстояния, которые можно считать большими по сравнению с линейными размерами той же части, пренебрежимо мало.*

Эта формулировка совершенно аналогична формулировке известного принципа Сен-Венана.

Отметим, что, если поверхность  $F$  не мала по сравнению с поверхностью упругого тела, следует разбить поверхность  $F$  на несколько частей и применить сформулированный принцип по отношению к каждой из указанных частей в отдельности.

Применим сформулированный принцип для случая, когда линейные и угловые смещения во всех точках поверхности  $F$  равны нулю, т. е. для случая заземления тела по поверхности  $F$ . В этом случае должно быть  $\bar{\Delta} = \bar{\Omega} = \bar{\Delta}_m = 0$  и, следовательно, согласно (1.1)–(1.3), условия заземления будут выражаться равенствами

$$\int_F \bar{\delta} d\tau = 0, \quad \int_F \bar{\omega} d\tau = 0, \quad \int_F (\bar{r} \times \bar{\omega}) d\tau = 0 \quad (1.12)$$

Для применения нового принципа надо иметь связи между компонентами векторов  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\delta}$ . Эти связи принимают простой вид, когда поверхность  $F$  отнесена к криволинейным координатным линиям  $\alpha$  и  $\beta$ , которые являются линиями кривизны этой поверхности. На фиг. 2 оси  $M\xi$  и  $M\eta$  направлены по касательным, соответственно к линиям  $\beta = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ . Ось  $M\zeta$  направлена по внешней нормали поверхности. Координатная система  $M\xi\eta\zeta$  — правая.

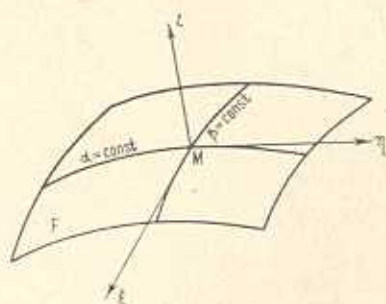


Рис. 2.

В рассматриваемой системе координат имеют место следующие соотношения (см., например, [1]):

$$\begin{aligned} \omega_z &= \frac{1}{B} \frac{\partial \delta_z}{\partial \beta} + \frac{\delta_\eta}{R_2} \\ \omega_\eta &= -\frac{1}{A} \frac{\partial \delta_z}{\partial \alpha} - \frac{\delta_\xi}{R_1} \\ \omega_\xi &= \frac{1}{2AB} \left[ \frac{\partial}{\partial \alpha} (B\delta_\eta) - \frac{\partial}{\partial \beta} (A\delta_\xi) \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

где  $R_1$  и  $R_2$  — главные радиусы кривизны, соответственно линий  $\beta = \text{const}$  и  $\alpha = \text{const}$ ;  $A$  и  $B$  — коэффициенты первой квадратичной формы.

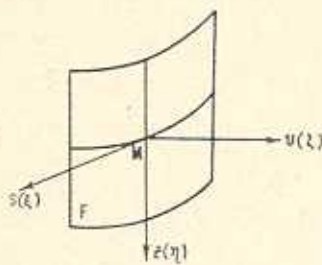
Пользуясь формулами (1.13), можно установить связи между компонентами  $\bar{\omega}$  и  $\bar{\delta}$  относительно любой неподвижной координатной системы.

Рассмотрим несколько частных случаев применения выражений (1.13).

1. *Поверхность  $F$  является частью цилиндрической поверхности* (фиг. 3). В этом случае имеем:  $R_1 = R$ ,  $R_2 = \infty$ ,  $A = R$ ,  $B = 1$ , где  $R$  — радиус кривизны цилиндра.

Из (1.13) находим

$$\begin{aligned} \omega_s &= \frac{\partial \delta_s}{\partial z} \\ \omega_z &= -\frac{\partial \delta_s}{\partial s} - \frac{\delta_s}{R} \\ \omega_v &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\partial \delta_s}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.14)$$



Фиг. 3.

где  $w$  — смещение по направлению оси  $z$ .

2. *Случай плоской деформации.* Из (1.14) будем иметь для случая плоской деформации, происходящей в плоскости  $vs$

$$\omega_v = \omega_s = 0, \quad \omega_z = -\frac{\partial \delta_s}{\partial s} - \frac{\delta_s}{R} \quad (1.15)$$

3. *Случай тонкой плиты.* Учитывая известные соотношения

$$\delta_s = -z \frac{\partial w}{\partial v}, \quad \delta_v = -z \frac{\partial w}{\partial s}$$

из (1.14) получим

$$\begin{aligned} \omega_s &= -\frac{\partial w}{\partial v} \\ \omega_v &= \frac{\partial w}{\partial s} \end{aligned} \quad (1.16)$$

$$\omega_z = z \left[ \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{\partial w}{\partial v} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial v} \right]$$

Легко заметить, что в выражениях главного вектора (1.2) и главного момента (1.3) члены, содержащие последнее выражение (1.16), будут исчезать, поэтому условно можно принять, что для тонкой плиты  $\omega_z = 0$ .

В заключение приведем условия защемления прямолинейного края в случаях плоской деформации и изгиба тонкой плиты.

1. *Случай плоской деформации.* Согласно (1.15) для прямолинейного края (фиг. 4) имеем

$$\omega_x = \omega_y = 0, \quad \omega_z = -\frac{\partial u}{\partial y} \quad (1.17)$$

С учетом (1.17) из условий заземления (1.12) получим

$$\begin{aligned} \int_A^B u(0, y) dy = 0, & \quad \int_A^B v(0, y) dy = 0 \\ \int_A^B \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=0} dy = 0, & \quad \int_A^B y \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x=0} dy = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Из третьего условия (1.18) вытекает

$$u(B) - u(A) = 0 \quad (1.19)$$

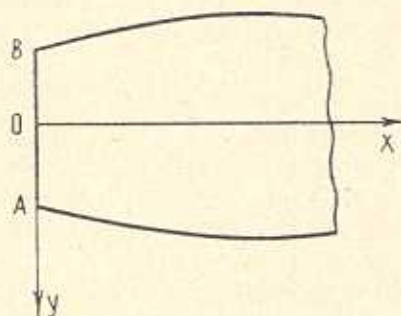
Применяя интегрирование по частям, из четвертого условия (1.18) получим

$$y(B)u(B) - y(A)u(A) - \int_A^B u(0, y) dy = 0 \quad (1.20)$$

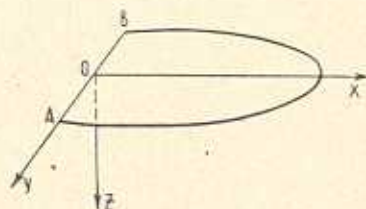
Учитывая (1.19) и (1.20), условия (1.18) представим в окончательном виде

$$\begin{aligned} u(A) = 0, \quad u(B) = 0 \\ \int_A^B u(0, y) dy = 0, \quad \int_0^B v(0, y) dy = 0 \end{aligned} \quad (1.21)$$

Можно показать, что эти условия применимы и в случае обобщенного плоского напряженного состояния.



Фиг. 4.



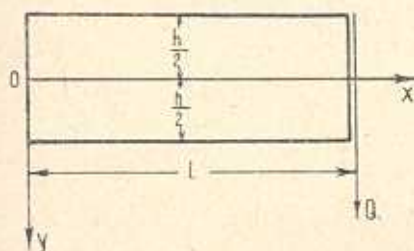
Фиг. 5.

2. *Случай изгиба тонкой плиты.* Применяя формулы (1.16), аналогично предыдущему случаю, из (1.12) находим следующие условия заземления для прямолинейного края  $AB$  тонкой плиты (фиг. 5):

$$\begin{aligned}
 w(A) = 0, \quad w(B) = 0 \\
 \int_A^B w(0, y) dy = 0, \quad \int_A^B \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} dy = 0
 \end{aligned}
 \tag{1.22}$$

## § 2. Примеры

1. *Изгиб консоли.* Рассмотрим задачу плоского напряженного состояния консольной балки с прямоугольным поперечным сечением, заделанную левым концом и нагруженную грузом  $Q$ , распределенным по правому концевому сечению (фиг. 6).



Фиг. 6.

Эта задача решена в напряжениях в предположении, что условия на продольных краях  $y = \pm \frac{h}{2}$  удовлетворяются точно, а на торцевом крае  $x = l$  — по принципу Сен-Венана (см., например, [2]).

Для смещений найдены следующие выражения:

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{Q}{EJ} \left( -lxy + \frac{x^2 y}{2} - \frac{2 + \nu}{6} y^3 + Ay + B \right) \\
 v &= \frac{Q}{EJ} \left( \frac{\nu l y^2}{2} - \frac{\nu x y^2}{2} + \frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{1 + \nu}{4} h^2 x - Ax + C \right)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

где  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $J = \frac{h^3}{12}$ .

Постоянные  $A$ ,  $B$  и  $C$ , являющиеся параметрами жестких смещений, определяются из условия зацебления в точке  $x = y = 0$ .

Это дает

$$A = B = C = 0$$

Внеся эти значения в (2.1), находим окончательные выражения для смещений. В частности, для максимального прогиба имеем

$$v(l, 0) = \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{3Ql}{2Gh}
 \tag{2.2}$$



Применим теперь условия (1.21), которые перепишем так:

$$u\left(0, \frac{h}{2}\right) = 0, \quad u\left(0, -\frac{h}{2}\right) = 0$$

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} u(0, y) dy = 0, \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} v(0, y) dy = 0$$

С учетом (2.1) первое и второе условия дают

$$A = \frac{2 + \mu}{24} h^2, \quad B = 0$$

а из третьего и четвертого условий получим соответственно

$$B = 0, \quad C = -\frac{\mu h^2}{24}$$

Внося найденные значения постоянных в выражение для  $v$ , определим максимальный прогиб

$$v(l, 0) = \frac{Ql^3}{3EJ} + \frac{Ql}{Gh} \quad (2.3)$$

Сопоставляя результаты (2.2) и (2.3), заметим, что первый больше второго, что и следовало заранее ожидать.

Например, для случая  $\frac{l}{h} = 5$ ,  $\mu = 0.3$  из (2.2) и (2.3) получим соответственно

$$v(l, 0) = 519.5 \frac{Q}{E}, \quad v(l, 0) = 513 \frac{Q}{E}$$

Поскольку применением принципа Сен-Венана для перемещений максимальный прогиб получается увеличенным, то истинный максимальный прогиб должен быть меньше полученного.

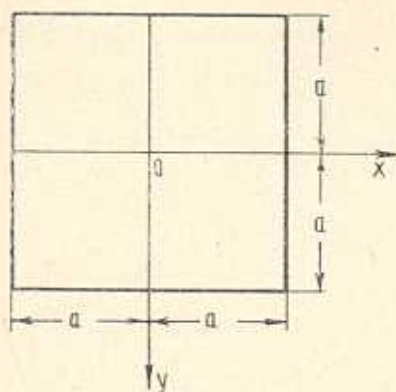
Заметим, что плоская задача для консоли рассматривалась также П. О. Галфаявом [3]. В этой работе для максимального прогиба при  $\frac{l}{h} = 5$  получено числовое значение, удовлетворяющее неравенству

$$517.59 \frac{Q}{E} \leq v(l, 0) \leq 517.65 \frac{Q}{E}$$

На наш взгляд этот результат требует проверки.

2. Изгиб ~~в~~ *растущей* по контуру квадратной плиты под действием равномерно распределенной нагрузки. Обозначим через  $2a$  сторону квадрата (фиг. 7), и уравнение упругой поверхности представим в виде

$$w = \frac{P}{64D} (x^2 + y^2)^2 + C_0 + C_2(x^2 + y^2) + C_4(x^4 - 6x^2y^2 + y^4) + \\ + C_6(x^6 - 5x^4y^2 - 5x^2y^4 + y^6) + C_8(x^8 - 28x^6y^2 + \\ + 70x^4y^4 - 28x^2y^6 + y^8) \quad (2.4)$$



Фиг. 7.

Легко проверить, что выражение (2.4) удовлетворяет дифференциальному уравнению упругой поверхности плиты и симметрично относительно осей симметрии квадрата.

Потребуем, чтобы прогиб (2.4) удовлетворял условиям защемления (1.22) на каждой половине стороны квадрата, т. е.,

$$w(a, 0) = 0, \quad w(a, a) = 0$$

$$\int_0^a w(a, y) dy = 0 \quad (2.5)$$

$$\int_0^a \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a} dy = 0$$

Новый принцип не гарантирует достаточно точного определения максимального отрицательного изгибающего момента, возникающего в точке  $(a, 0)$ . Для достижения этой цели потребуем, чтобы прогиб (2.4) удовлетворял также следующему дополнительному условию:

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=a, y=0} = 0 \quad (2.6)$$

Подставляя (2.4) в (2.5) и (2.6), определим постоянные  $C_{2k}$ :

$$C_0 = 1.29625609 \lambda$$

$$a^2 C_2 = -2.25569308 \lambda$$

$$a^4 C_4 = -0.36309089 \lambda$$

$$a^6 C_6 = 0.30823665 \lambda$$

$$a^8 C_8 = 0.01429123 \lambda$$

где

$$\lambda = \frac{pa^4}{64D}$$

Из (2.4) находим значение максимального прогиба

$$w(0, 0) = C_0 = 0.02025 \frac{pa^4}{D}$$

точное значение которого равно  $0.02016 \frac{pa^4}{D}$ .

Погрешность составляет  $0.4\%$ .

Изгибающий момент в центре плиты определяется формулой

$$M_x(0, 0) = M_y(0, 0) = M(0, 0) = -2(1 + \mu) C_2 D$$

При  $\mu = 0.3$  имеем

$$M(0, 0) = 0.0916 pa^2$$

что меньше точного значения момента, равного  $0.0924 pa^2$  на  $0.9\%$ .

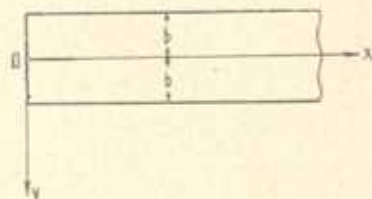
Из (2.4) находим значение максимального отрицательного изгибающего момента при  $\mu = 0.3$

$$M_x(a, 0) = -(0.205921 - 0.000578 \mu) pa^2 = -0.2057 pa^2$$

что по абсолютному значению меньше точного значения момента, равного  $-0.2068 pa^2$ , на  $0.5\%$ .

3. Изгиб полубесконечной полосы, свободно опертой по двум параллельным краям, под действием вдоль торцевого края системы смещений, „кинематически эквивалентной“ нулю.

Обозначим ширину полосы через  $2b$  и расположим оси координат  $x$  и  $y$  так, как показано на фиг. 8. По краям  $y = \pm b$  плита оперта. Она изгибается под действием заданных вдоль края  $x = 0$  смещений, удовлетворяющих условиям защемления (1.22).



Фиг. 8.

Согласно новому принципу, деформации и внутренние силы, возникающие под действием указанных смещений, должны быстро затухать при удалении от края  $x = 0$ . Покажем, что это действительно так.

Решение дифференциального уравнения упругой поверхности плиты представим в виде

$$w = \sum_1^{\infty} (A_{2k-1} + B_{2k-1} x) e^{-\frac{\pi(2k-1)}{2b} x} \cos \frac{\pi(2k-1)}{2b} y \quad (2.7)$$

Непосредственно видно, что (2.7) удовлетворяет условиям свободного опирания на краях  $y = \pm b$ . Потребуем, чтобы выражение (2.7) удовлетворяло на крае  $x = 0$  условиям (1.22), которые перепишем так

$$\begin{aligned} w(0, b) = 0, \quad w(0, -b) = 0 \\ \int_{-b}^{+b} w(0, y) dy = 0, \quad \int_{-b}^{+b} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} dy = 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Согласно (2.7), первые два из этих условий удовлетворяются тождественно, а остальные условия дают

$$\begin{aligned} \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} A_{2k-1} = 0 \\ \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \left[ \frac{\pi}{2b} (2k-1) A_{2k-1} - B_{2k-1} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Распоряжаясь постоянными  $A_{2k-1}$  и  $B_{2k-1}$ , мы получим различные „кинематически эквивалентные нулю“ системы смещений, в отдельности удовлетворяющие условиям (2.8).

Принимая, в частности,  $A_5 = A_7 = \dots = 0$ ,  $B_3 = B_5 = \dots = 0$ , из (2.9) находим

$$A_3 = 3A_1, \quad B_1 = -\frac{\pi}{b} A_1$$

Тогда выражение (2.7) примет следующий вид:

$$w = A_1 \left[ \left( 1 - \frac{\pi}{b} x \right) e^{-\frac{\pi}{2b} x} \cos \frac{\pi}{2b} y + 3e^{-\frac{3\pi}{2b} x} \cos \frac{3\pi}{2b} y \right] \quad (2.10)$$

Построив эпюры для расчетных величин плиты при  $y = \text{const}$ ,  $x \geq 0$ , мы убеждаемся в том, что при удалении от края  $x = 0$  указанные величины быстро затухают. На фиг. 9 приведены такие эпюры для величин  $w(x, 0)$  и  $M_x(x, 0)$ .

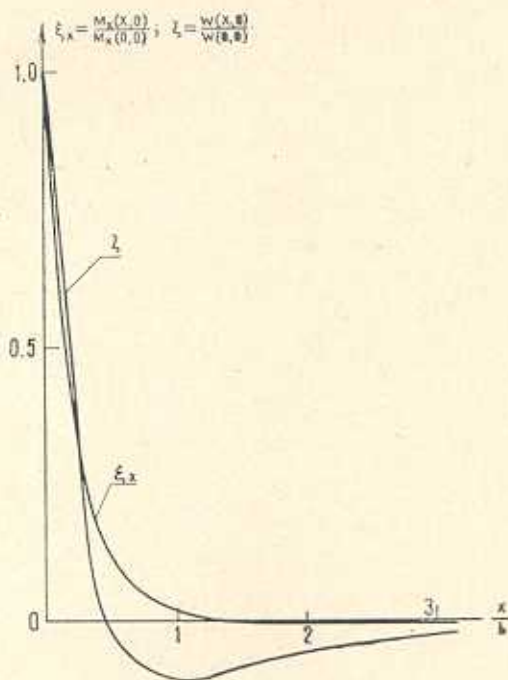
4. Изгиб равномерно нагруженной полубесконечной полосы, свободно опертой по двум параллельным краям и заделанной по торцевому краю (фиг. 8).

Решение дифференциального уравнения упругой поверхности плиты примем в виде

$$w = \frac{P}{24D} (y^4 - 6b^2y^2 + 5b^4) + \sum_{k=1}^2 (A_{2k-1} + B_{2k-1}x) e^{-\frac{\pi(2k-1)x}{2b}} \cos \frac{\pi(2k-1)y}{2b} \quad (2.11)$$

где  $p = \text{const}$  — интенсивность внешней нагрузки.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что (2.11) удовлетворяет условиям свободного опирания на краях  $y = \pm b$ .



Фиг. 9.

Потребуем, чтобы выражение (2.11) удовлетворяло условиям заделки (1.22) на каждой половине торцевого края  $x = 0$ , т. е.

$$w(0, 0) = 0, \quad w(0, b) = 0 \quad (2.12)$$

$$\int_0^b w(0, y) dy = 0, \quad \int_0^b \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=0} dy = 0$$

Для достижения хорошей точности определения максимального отрицательного изгибающего момента, примем также дополнительное условие

$$\left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x=y=0} = 0 \quad (2.13)$$

Второе из условий (2.12) удовлетворяется тождественно. Остальные же условия (2.12) и условие (2.13) дают соответственно

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 &= -\frac{5pb^4}{24D} \\ -A_1 + \frac{A_3}{3} &= \frac{\pi pb^4}{15D} \\ -B_1 + \frac{B_3}{3} &= \frac{\pi}{2b} (A_3 - A_1) \\ B_1 + B_3 &= \frac{\pi}{2b} (A_1 + 3A_3) \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\begin{aligned} A_1 &= -0.20916297 \frac{pb^4}{D} \\ A_3 &= 0.00082963 \frac{pb^4}{D} \\ B_1 &= -0.32855242 \frac{pb^3}{D} \\ B_3 &= 0.00390955 \frac{pb^3}{D} \end{aligned}$$

Внеся эти значения в (2.11), находим приближенное решение рассматриваемой задачи.

В частности, для максимального отрицательного изгибающего момента имеем

$$M_x(0, 0) = -0.497666 pb^2 + 0.002334 \nu pb^2$$

Точное значение этого момента равно  $-0.5 pb^2$ . Максимальная погрешность получается при  $\nu = 0.5$  и равна  $0.7\%$ .

В заключении настоящего параграфа отметим, что с помощью нового принципа можно получить достаточно точные решения для ряда сложных задач плоской теории упругости и изгиба тонких плит, например, для задачи об изгибе круглой плиты с круговыми отверстиями, когда на внешней окружности заданы как угодно однородные условия, а по внутренним окружностям плита заделана.

Օ. Մ. ՍԱՊՈՆՋԻԱՆ

## ՍԵՆ-ՎԵՆԱՆԻ ՍԿՂԲՈՒՆԵՐԸ ՏԵՂԱՓՈՆՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՀՍՄԱՐ

## Ա մ փ ո ւ փ ո ւ լ մ

Սեն-Վենանի հայանի սկզբունքը մեղմացնում է մակերևութային պայմանները, երբ առաձգական պինդ մարմնի մակերևութի ոչ մեծ մասի վրա արված են լինում արտաքին լարումները և գրանով իսկ հնարավորություն է ստեղծում գտնելու առաձգականության անսուխյան խնդիրների մոտավոր լուծումներ:

Ներկա աշխատանքում փորձ է արվում ձևակերպել նոր սկզբունք, որը մեղմացնում է մակերևութային պայմանները այն դեպքում, երբ մարմնի մակերևութի ոչ մեծ մասի վրա արված են լինում անդափոխություններ:

Այդ նոր սկզբունքը մենք անվանել ենք՝ Սեն-Վենանի սկզբունքը անդափոխությունների համար:

Օ. Մ. SAPONJIAN

## SAINT-VENANT'S PRINCIPLE FOR DISPLACEMENTS

## S u m m a r y

The well known Saint-Venant's principle softens the boundary conditions if external forces are given on the small part of the surface of the elastic body. Thus making it possible to find some approximate solution of the problem of elasticity.

In the present paper we have tried to formulate a new principle softening the boundary conditions in such a case when displacements are given on the small part of the surface of the body.

This principle has been called Saint-Venant's principle for displacement.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольдсвейзер А. Л. Теория упругих тонких оболочек. М., 1953, стр. 41, 53.
2. Филоненко-Бородич М. М. Теория упругости. М., 1947, стр. 130.
3. Галфаян П. О. Решение одной смешанной задачи теории упругости для прямоугольника. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, № 1, 1964, стр. 39-60.