ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 2, 1969 Механика

Н. Х. АРУТЮНЯН, Б. Л. АБРАМЯН

НЕКОТОРЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА И УПРУГОГО СЛОЯ С ВЕРТИКАЛЬНЫМ ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе исследуется осесимметричная деформация упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием, когда на верхней части поверхности отверстия отсутствуют радиальное перемещение и касательное напряжение, а на нижней части отсутствуют как касательное, так и нормальное напряжения. На плоской поверхности полупространства действует осесимметричная нагрузка*.

Решение этой задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода.

В частном случае, когда на всей поверхности отверстия отсутствуют нормальное и касательное напряжения (§ 2), полученное интегральное уравнение Фредгольма упрощается. Для этого случая, как и в работе [1], исследован вопрос о разрешимости интегрального уравнения и показано, что его решение может быть построено методом последовательных приближений. В другом частном случае, когда на всей поверхности отверстия отсутствуют радиальное перемещение и касательное напряжение (§ 3), решение задачи получается в замкнутом виде. В § 4 приводится решение для соответствующей задачи в случае упругого слоя, также в замкнутом виде.

Отметим, что задаче определения поля напряжений вблизи вертикальной цилиндрической выработки в однородном упругом пространстве, находящемся под действием собственного веса или осесимметричной нагрузки, посвящены работы С. Г. Лехницкого [2], Г. С. Шапиро [3], М. Матчинского [4].

Вопрос о концентрации напряжений около цилиндрического отверстия в полубесконечном теле, вызванной плоским полем напряжений, параллельным граничной плоскости, рассматривался в работе Юнгдала и Стернберга [5].

Взаимодействие жесткой втулки с поверхностью бесконечной цилиндрической шахты в упругом пространстве при отсутствии силы трения исследовалось в работе В. М. Александрова и А. В. Белоконя [6].

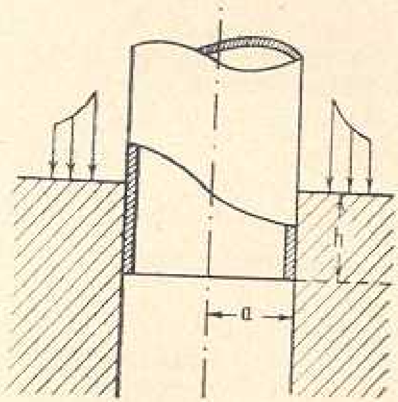
Несколько задач для полупространства с круглым цилиндрическим отверстием при смешанных граничных условиях на плоской поверхности рассматривалось в работах [7—9]. Смешанная задача для

* Работа доложена на XII Международном конгрессе в Станфорде (США) в августе месяце 1968 г.

пространства с круглым цилиндрическим отверстием была решена в работе [10].

§ 1. Осесимметричная деформация упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием при смешанных граничных условиях на поверхности отверстия

Для решения задачи направляем ось z по оси цилиндрического отверстия (фиг. 1).



Фиг. 1.

Бигармоническую функцию А. Лява ищем в виде

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \lambda [A(\lambda) + \lambda z B(\lambda)] e^{-\lambda z} W_0(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+ \int_0^\infty [C(\beta) K_0(\beta r) + \beta r D(\beta) K_1(\beta r)] \cos \beta z d\beta \qquad (a \leqslant r < \infty, \quad 0 \leqslant z < \infty) \tag{1.1}$$

где $W_n(\lambda r)$ определяется соотношением

$$W_n(\lambda r) = J_n(\lambda r) Y_1(\lambda a) - Y_n(\lambda r) J_1(\lambda a) \tag{1.2}$$

$J_n(x)$ и $Y_n(x)$ — функции Бесселя от действительного аргумента соответственно первого и второго рода [11], $K_n(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента второго рода.

Заметим, что

$$W_1(\lambda a) = 0 \quad \text{и} \quad W_0(\lambda a) = -\frac{2}{\pi a \lambda} \tag{1.3}$$

Граничные условия для этой задачи имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) &= f_1(r) \\ \tau_{rz}(r, 0) &= f_2(r) \end{aligned}\right\} \quad (a < r < \infty) \tag{1.4}$$

$$\tau_{rz}(a, z) = 0 \qquad (0 < z < \infty)$$
$$u_r(a, z) = 0 \qquad (0 < z < h) \tag{1.4}$$
$$\sigma_r(a, z) = 0 \qquad (h < z < \infty)$$

Следовательно, полупространство деформируется под действием осесимметричной нагрузки, приложенной на плоской границе полупространства с отверстием, при отсутствии радиальных перемещений на верхней части поверхности отверстия, нормальных напряжений на нижней части поверхности отверстия и касательных напряжений на всей поверхности отверстия.

Вычисляя с помощью выражения (1.1) по обычным формулам перемещение u_r и напряжения, будем иметь

$$u_r(r, z) = -\frac{1}{2G}\int_0^\infty \lambda^3 e^{-\lambda z}[A(\lambda) - B(\lambda) + \lambda z B(\lambda)]\, W_1(\lambda r)\, d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2G}\int_0^\infty \beta^2 [C(\beta) K_1(\beta r) + \beta r D(\beta) K_0(\beta r)] \sin \beta z d\beta \tag{1.5}$$

$$\sigma_z(r, z) = \int_0^\infty \lambda^4 e^{-\lambda z}[A(\lambda) + (1-2\nu) B(\lambda) + \lambda z B(\lambda)]\, W_0(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\int_0^\infty \beta^3 \{[2(2-\nu) D(\beta) - C(\beta)]\, K_0(\beta r) - D(\beta)\beta r K_1(\beta r)\} \sin \beta z d\beta \tag{1.6}$$

$$\sigma_r(r, z) = \int_0^\infty \lambda^4 e^{-\lambda z}[(1+2\nu) B(\lambda) - A(\lambda) - \lambda z B(\lambda)]\, W_0(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\frac{1}{r}\int_0^\infty \lambda^3 e^{-\lambda z}[A(\lambda) - B(\lambda) + \lambda z B(\lambda)]\, W_1(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\int_0^\infty \beta^3 \Big\{[(2\nu - 1) D(\beta) + C(\beta)]\, K_0(\beta r) + C(\beta)\frac{K_1(\beta r)}{\beta r} +$$

$$+ D(\beta)\beta r K_1(\beta r)\Big\} \sin \beta z d\beta \tag{1.7}$$

$$\tau_{rz}(r, z) = \int_0^\infty \lambda^4 e^{-\lambda z}[A(\lambda) - 2\nu B(\lambda) + \lambda z B(\lambda)]\, W_1(\lambda r)\, d\lambda +$$

$$+\int_0^\infty \beta^3 \{[2(1-\nu)D(\beta) - C(\beta)]K_1(\beta r) - D(\beta)\beta r K_0(\beta r)\}\cos\beta z d\beta \quad (1.8)$$

Пользуясь теперь преобразованиями Вебера-Орра [11, 15]

$$\varphi(r) = \int_0^\infty \lambda\psi(\lambda)\, W_i(\lambda r)\, d\lambda$$

$$\psi(\lambda)[J_1^2(a\lambda) + Y_1^2(a\lambda)] = \int_a^\infty r\varphi(r)\, W_i(\lambda r)\, dr \qquad (i=0,\ 1) \quad (1.9)$$

где $W_i(\lambda r)$ определяется соотношением (1.2), и удовлетворив условиям (1.4), находим

$$C(\beta)K_1(\beta a) = D(\beta)[2(1-\nu)K_1(\beta a) - \beta a K_0(\beta a)] \quad (1.10)$$

$$A(\lambda) = 2\nu\varphi_1(\lambda) + (1-2\nu)\varphi_2(\lambda) - (1-2\nu)\varphi(\lambda) \quad (1.11)$$

$$B(\lambda) = \varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda) + \varphi(\lambda) \quad (1.12)$$

где введены обозначения

$$\varphi_{i+1}(\lambda) = \frac{1}{\lambda^3[J_1^2(a\lambda) + Y_1^2(a\lambda)]}\int_a^\infty r W_i(\lambda r) f_{i+1}(r)\, dr \qquad (i=0,\ 1) \quad (1.13)$$

а функция $\varphi(\lambda)$ зависит от неизвестного коэффициента $D(\beta)$ и определяется соотношением

$$\varphi(\lambda) = \frac{4}{\pi\lambda^3[J_1^2(a\lambda) + Y_1^2(a\lambda)]}\int_0^\infty \frac{\beta^3 D(\beta) K_1(\beta a)\, d\beta}{(\lambda^2+\beta^2)^2} \quad (1.14)$$

Для определения функции $D(\beta)$ получаем следующие парные интегральные уравнения с тригонометрическим ядром:

$$\int_0^\infty \frac{D^*(\beta)}{\beta}\sin\beta z d\beta = 0 \qquad (0 < z < h)$$

$$\int_0^\infty D^*(\beta)\sin\beta z d\beta = \psi(z) + f(z) \qquad (h < z < \infty) \quad (1.15)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\beta^3 D(\beta) K_1(\beta a) = D^*(\beta) \quad (1.16)$$

$$\psi(z)=\int_0^\infty D^*(\beta)\,\Omega(\beta a)\sin\beta z\,d\beta+\frac{2}{\pi a}\int_0^\infty \lambda^3 e^{-\lambda z}(2-\lambda z)\,\varphi(\lambda)\,d\lambda \tag{1.17}$$

$$f(z)=\frac{2}{\pi a}\int_0^\infty \lambda^3 e^{-\lambda z}\left[(1-\lambda z)\,\varphi_1(\lambda)-(2-\lambda z)\,\varphi_2(\lambda)\right]d\lambda \tag{1.18}$$

$$\Omega(t)=1-t\left[1-\frac{K_0^2(t)}{K_1^2(t)}\right]-\frac{2(1-\nu)}{t} \tag{1.19}$$

Решение парных уравнений (1.15) можно представить в виде [16]

$$D^*(\alpha)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_h^\infty tJ_0(t\alpha)\,dt\int_t^\infty \frac{\psi(z)+f(z)}{(z^2-t^2)^{1/2}}\,dz \tag{1.20}$$

Подставив в это соотношение значения (1.17) и (1.18), приведем уравнение (1.20) относительно $D^*(\alpha)$ к виду

$$D^*(\alpha)=\int_0^\infty D^*(\beta)\,K(\alpha,\beta)\,d\beta+F(\alpha) \tag{1.21}$$

где

$$F(\alpha)=\frac{2\alpha}{\pi}\int_h^\infty tJ_0(t\alpha)\,dt\int_t^\infty \frac{f(z)\,dz}{(z^2-t^2)^{1/2}}=$$

$$=\frac{4\alpha}{a\pi^2}\int_0^\infty \lambda^3 d\lambda\left\{\left[\varphi_1(\lambda)-2\varphi_2(\lambda)\right]\int_h^\infty tJ_0(t\alpha)\,K_0(t\lambda)\,dt-\right.$$

$$\left.-\lambda\left[\varphi_1(\lambda)-\varphi_2(\lambda)\right]\int_h^\infty t^2J_0(t\alpha)\,K_1(t\lambda)\,dt\right\} \tag{1.22}$$

$$K(\alpha,\beta)=\frac{2\alpha}{\pi}\left\{\frac{\pi}{2}\,\Omega(\beta a)\int_h^\infty tJ_0(t\alpha)\,J_0(t\beta)\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{8\beta^2}{a\pi^2}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+\beta^2)^2\left[J_1^2(a\lambda)+Y_1^2(a\lambda)\right]}\int_h^\infty\left[2K_0(t\lambda)-\lambda tK_1(\lambda t)\right]tJ_0(t\alpha)\,dt\right\} \tag{1.23}$$

Здесь были использованы значения интегралов

$$\int_t^\infty \frac{\sin\beta z}{(z^2-t^2)^{1/2}}\,dz=\frac{\pi}{2}\,J_0(\beta t) \tag{1.24}$$

$$\int_t^\infty \frac{e^{-\lambda z}\,dz}{(z^2-t^2)^{1/2}} = K_0(\lambda t), \qquad \int_t^\infty \frac{ze^{-\lambda z}\,dz}{(z^2-t^2)^{1/2}} = tK_1(\lambda t) \tag{1.25}$$

Ниже будут рассмотрены два предельных случая для интегрального уравнения (1.21).

§ 2. Осесимметричная деформация упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием при отсутствии напряжений на поверхности отверстия

В частном случае предыдущей задачи, когда $h = 0$, то есть когда на поверхности отверстия отсутствуют нормальное и касательное напряжения, в интегральном уравнении (1.21) функция $F(\alpha)$ и ядро $K(\alpha, \beta)$ принимают вид

$$F(\alpha) = \frac{4\alpha}{a\pi^2}\int_0^\infty \frac{\lambda^3 d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\left[(\alpha^2-\lambda^2)\varphi_1(\lambda) - 2\alpha^2\varphi_2(\lambda)\right] \tag{2.1}$$

$$K(\alpha, \beta) = \frac{32\alpha^3\beta^2}{a\pi^3}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{[J_1^2(a\lambda) + Y_1^2(a\lambda)](\lambda^2+\beta^2)^2(\lambda^2+\alpha^2)^2} \tag{2.2}$$

Эти выражения получаются из (1.22) и (1.23) путем предельного перехода $h \to 0$ с использованием значений интегралов

$$\int_0^\infty tK_0(t\lambda)\,J_0(t\alpha)\,dt = \frac{1}{\lambda^2+\alpha^2}, \qquad \int_0^\infty t^2K_1(t\lambda)\,J_0(t\alpha)\,dt = \frac{2\lambda}{(\lambda^2+\alpha^2)^2} \tag{2.3}$$

$$\int_0^\infty tJ_0(t\alpha)\,J_0(t\beta)\,dt = 0 \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0) \tag{2.4}$$

Значение последнего интеграла легко можно получить из второго экспоненциального интеграла Вебера [12, 17], а именно

$$\int_0^\infty e^{-t^2x^2}xJ_p(\alpha x)\,J_p(\beta x)\,dx = \frac{1}{2t^2}\exp\left(-\frac{\alpha^2+\beta^2}{4t^2}\right)I_p\left(\frac{\alpha\beta}{2t^2}\right) \tag{2.5}$$

$$\operatorname{Re}(p) > -1, \quad |\arg t| < \frac{\pi}{4}, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0$$

предельным переходом при $p = 0$ и $t \to 0$.

Докажем, что в рассматриваемом случае, т. е. когда $h \to 0$, и, следовательно, в интегральном уравнении (1.21) функция $F(\alpha)$ определяется выражением (2.1), а ядро $K(\alpha, \beta)$ — выражением (2.2), решение интегрального уравнения (1.21) может быть построено методом последовательных приближений.

Пользуясь оценкой [12, 13] при $z>0$

$$0 \leqslant \frac{1}{z[J_1^2(z)+Y_1^2(z)]} < \frac{\pi}{2} \tag{2.6}$$

из (2.2) получим

$$\int_0^\infty |K(\alpha,\beta)|\,d\beta = \frac{32\,\alpha^3}{a\pi^3}\int_0^\infty \beta^2 d\beta \int_0^\infty \frac{d\lambda}{[J_1^2(a\lambda)+Y_1^2(a\lambda)](\lambda^2+\beta^2)^2(\lambda^2+\alpha^2)^2} <$$

$$< \frac{16\,\alpha^3}{\pi^2}\int_0^\infty \beta^2 d\beta \int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2+\beta^2)^2(\lambda^2+\alpha^2)^2} =$$

$$= \frac{16\,\alpha^3}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\alpha^2+\lambda^2)^2}\int_0^\infty \frac{\beta^2 d\beta}{(\lambda^2+\beta^2)^2} =$$

$$= \frac{16\,a^3}{\pi^2}\int_0^\infty \frac{\lambda d\lambda}{(\lambda^2+\alpha^2)^2}\,\frac{\pi}{4\lambda} = \frac{4\alpha^3}{\pi}\int_0^\infty \frac{d\lambda}{(\lambda^2+\alpha^2)^2} = 1$$

Следовательно,

$$\int_0^\infty |K(\alpha,\beta)|\,d\beta < 1 \tag{2.7}$$

Легко видеть, что при ограниченных и интегрируемых функциях $f_1(r)$ и $f_2(r)$ известная функция $F(\alpha)$ (2.1) также ограничена, и, следовательно, решение интегрального уравнения (1.21) может быть построено методом последовательных приближений [14].

§ 3. Осесимметричная деформация упругого полупространства с вертикальным цилиндрическим отверстием при отсутствии на поверхности отверстия радиального перемещения и касательного напряжения

В другом частном случае, когда $h\to\infty$, то есть когда на поверхности отверстия отсутствуют радиальное перемещение и касательное напряжение, интегральное уравнение (1.21) задачи отпадает, так как согласно формулам (1.22) и (1.23) $F(\alpha)$ и $K(\alpha,\beta)$ тождественно равны нулю. Таким образом, для этой частной задачи получаем замкнутое решение. В самом деле, на основании формул (1.21), (1.16) и (1.10) имеем

$$D^*(\beta) = D(\beta) = C(\beta) = 0 \tag{3.1}$$

и, следовательно, бигармоническая функция А. Лява согласно (1.1) примет вид

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \lambda [A(\lambda) + B(\lambda) \lambda z] e^{-\lambda z} W_0(\lambda r) d\lambda \tag{3.2}$$

где неизвестные функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ определяются формулами

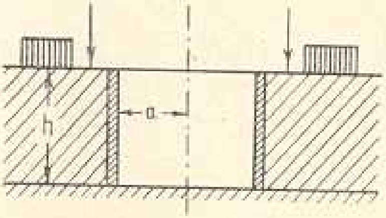
$$\begin{aligned} A(\lambda) &= 2\nu\varphi_1(\lambda) + (1 - 2\nu)\varphi_2(\lambda) \\ B(\lambda) &= \varphi_1(\lambda) - \varphi_2(\lambda) \end{aligned} \tag{3.3}$$

причем $\varphi_1(\lambda)$ и $\varphi_2(\lambda)$ имеют значения (1.13).

Напряжения и перемещения для этой задачи при помощи функции (3.2) могут быть вычислены по обычным формулам.

§ 4. Осесимметричная деформация упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием

Пусть упругий слой конечной толщины с вертикальным цилиндрическим отверстием жестко сцеплен с жестким основанием (фиг. 2).



Фиг. 2.

Полагаем, что на поверхности отверстия отсутствуют радиальное перемещение и касательное напряжение.

Граничные условия этой задачи имеют вид

$$\left.\begin{aligned} \sigma_z(r, 0) &= f_1(r) \\ \tau_{rz}(r, 0) &= f_2(r) \end{aligned}\right\} \quad (a < r < \infty) \tag{4.1}$$

$$u_r(a, z) = \tau_{rz}(a, z) = 0 \quad (0 < z < h) \tag{4.2}$$

$$u_r(r, h) = u_z(r, h) = 0 \quad (a \leqslant r < \infty) \tag{4.3}$$

Эта задача решается аналогичным образом, и для нее получается замкнутое решение.

Бигармоническую функцию А. Лява берем здесь в виде

$$\Phi(r, z) = \int_0^\infty \lambda [A(\lambda) \operatorname{sh} \lambda z + B(\lambda) \operatorname{ch} \lambda z + C(\lambda) \lambda z \operatorname{sh} \lambda z + D(\lambda) \lambda z \operatorname{ch} \lambda z] W_0(\lambda r) d\lambda \tag{4.4}$$

Удовлетворив граничным условиям (4.1)—(4.3), получим

$$A(\lambda) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\varphi_1(\lambda)[2\nu(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h + (\lambda h)^2 + 2(1-2\nu)^2] + \\ + \varphi_2(\lambda)(1-2\nu)[(3-4\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h + \lambda h]\} \tag{4.5}$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\varphi_2(\lambda)[(1-2\nu) + (\lambda h)^2 + (1-2\nu)(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h] + \\ + \varphi_1(\lambda)2\nu[(3-4\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h - \lambda h]\} \tag{4.6}$$

$$C(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\varphi_1(\lambda)[\lambda h - (3-4\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h] + \\ + \varphi_2(\lambda)[(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h - (1-2\nu)]\} \tag{4.7}$$

$$D(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\{\varphi_1(\lambda)[(3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h - (1-2\nu)] - \\ - \varphi_2(\lambda)[(3-4\nu)\operatorname{sh}\lambda h\operatorname{ch}\lambda h + \lambda h]\} \tag{4.8}$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta(\lambda) = (1-2\nu)^2 + (\lambda h)^2 + (3-4\nu)\operatorname{ch}^2\lambda h \tag{4.9}$$

Решение другой задачи об определении напряженного состояния в упругом слое с вертикальным цилиндрическим отверстием, лежащем на жестком основании без сцепления, при условии (4.1) и (4.2) может быть построено аналогичным образом.

Напряжения и перемещения для полупространства и упругого слоя с вертикальным цилиндрическим отверстием с рассмотренными выше граничными условиями могут быть определены по обычным формулам с помощью бигармонической функции А. Лява (1.1), (3.2) или (4.4).

В заключение отметим, что решения всех этих задач можно использовать при определении нормального давления на крепление стенок вертикальных цилиндрических выработок.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 XI 1968

Ն. Խ. ՀԱՐՈՒԹՅՈՒՆՅԱՆ, Բ. Լ. ԱԲՐԱՀԱՄՅԱՆ

ՈՒՂՂԱՀԱՅԱՑ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԱՆՑՔԵՐ ՈՒՆԵՑՈՂ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՇԵՐՏԻ ՀԱՄԱՐ ՄԻ ՔԱՆԻ ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Աշխատանքում դիտարկվում են առանցքասիմետրիկ բեռի ազդեցության տակ ուղղաձիգ գլանային անցքեր ունեցող առաձգական կիսատա-

րածության և շերտի դեֆորմացիայի վերաբերյալ կոնտակտային խնդիրներ, երբ անցքի մակերևույթի վրա տրված են խառը եզրային պայմաններ։

Օգտվելով Վեբերի ինտեգրալ ձևափոխություններից, առաջին խնդրի լուծումը բերվում է եռանկյունաչափական կորիզով «զույգ» ինտեգրալ հավասարումների։ Այս հավասարումների լուծումը բերվում է երկրորդ սեռի Ֆրեդհոլմի մեկ ինտեգրալ հավասարման։

Մասնավոր դեպքում, մի կոնտակտային խնդրի համար, երբ գլանային անցքի ամբողջ մակերևույթի վրա բացակայում են շառավիղային տեղափոխությունը և շոշափող լարումը, ստացված է փակ լուծում։

Փակ լուծում է տրվում նաև, առաձգական շերտի համապատասխան մասնակի խնդրի համար։

N. KH. ARUTYUNYAN, B. L. ABRAMYAN

SOME AXISYMMETRIC CONTACT PROBLEMS FOR A HALF-SPACE AND AN ELASTIC LAYER WITH A VERTICAL CYLINDRICAL CAVITY

Summary

In the paper the contact problems on deformation of an elastic semispace and a layer with a vertical cylindrical cavity under the effect of an axisymmetrical loading under mixed boundary value conditions on the cavity surface are considered.

Making use of the integral transformations of Weber, the solution of the first problem is reduced to the „dual" integral equations with a trigonometric kernel. The solution of these equations is reduced to one integral equation of Fredholm of the second kind.

In a particular case, for the contact problem, when all the surface of the cylindrical cavity is free from radial displacement and tangential stress, the solution is obtained in a closed form.

There is given a closed solution of a corresponding particular problem for an elastic layer.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арутюнян Н. Х., Абрамян Б. Л.* О некоторых контактных задачах для составного полупространства. ПММ, т. 31, в. 6, 1967, 1001—1008.
2. *Лехницкий С. Г.* Определение напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки круглого сечения. Изв. АН СССР, ОТН, № 7, 1938, 69—76.
3. *Шапиро Г. С.* К вопросу об определении напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки. Изв. АН СССР, ОТН, № 5, 1941, 105—109.
4. *Matczinski M.* A case of the axisymmetric stress concentration. Bull. Acad. Polon. Sci., Ser. Techn., vol. 9, No. 3, 1961, 163—168.

5. *Youngdahl C. K., Sternberg E.* Three-dimensional stress concentration around a cylindrical hole in a semi-infinite elastic body. Прикл. механика (Русский перевод Trans. of ASME, Ser. E), т. 33, No. 4, 1966, 149—160.
6. *Александров В. М., Белоконь А. В.* Асимптотическое решение одного класса интегральных уравнений и его применение к контактным задачам для цилиндрических упругих тел. ПММ, т. 31, в. 4, 1967, 704—710.
7. *Srivastav R. P.* An axisymmetric mixed boundary value problem for a half-space with a cylindrical cavity. Journ. Math. and Mech., vol. 13, No. 3, 1964, 385—394.
8. *Prem Narain.* A note on an asymmetric mixed boundary value problem for a half space with a cylindrical cavity. Proc. Glasgow Math. Assoc., vol. 7, No. 1, 1965, 45—47.
9. *Rusia K. C.* On certain asymmetric mixed boundary value problem for a half space with a cylindrical cavity. Journ. Sci. and Engng. Res., vol. 10, No. 1, 1966, 159—166.
10. *Srivastav R. P., Narain Prem.* Stress distribution due to pressurized exterior crack in an infinite isotropic elastic medium with coaxial cylindrical cavity. Internat. Journ. Engng. Sci., vol. 4, No. 6, 1966, 689—697.
11. *Бейтман Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, т. II. Функции Бесселя, М., 1966.
12. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
13. *Magnus W., Oberhettinger F.* Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1948.
14. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., Наука, 1965.
15. *Титчмарш Е.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка. Иноиздат, М., т. 1, 1960.
16. *Tranter C. J.* A note on dual equations with trigonometrical kernels. Proc. Edinb. Math. Soc., vol. 13 (Ser. 2), Part 3, 1963, 267—268.
17. *Ватсон Г. Н.* Теория бесселевых функций, ч. I, М., Иноиздат, 1949.