

И. Е. ПРОКОПОВИЧ, В. В. РЕКША

О НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОМ СОСТОЯНИИ  
ТЕЛА, ОБЛАДАЮЩЕГО ПОЛЗУЧЕСТЬЮ И  
УСИЛЕННОГО СВЯЗЯМИ

Широкое развитие применения цифровых автоматических машин открыло новые возможности для более полного и всестороннего учета факторов, определяющих работу конструкций.

Многочисленные экспериментальные и теоретические исследования [1], [2], [3], [4], [5], [7] подтвердили возможность применения линейной теории ползучести для описания напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций в стадии эксплуатации. Эти обстоятельства позволяют более широко рассматривать задачу о влиянии ползучести и усадки на напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций.

В настоящей статье, применительно к предварительно напряженным конструкциям, работающим без трещин, изложена достаточно общая постановка такой задачи, указаны пути ее решения и приведены результаты численного примера. Как обычно, предполагается, что решение соответствующей упруго-мгновенной задачи получено ранее.

1. Известно, что влияние линейной ползучести на напряженно-деформированное состояние однородных и изотропных тел при условии

$$\nu^*(t, \tau) = \nu(\tau) = \nu = \text{const} \quad (1.1)$$

определяется такими равенствами и уравнениями [2], [5]:

а) при напряженном состоянии, вызванном внешними нагрузками

$$\sigma_j^*(t) = \sigma_j(t)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_j^*(t) &= \frac{1}{E(t)} \left\{ \sigma_j(t)(1+\nu) - \nu S(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t [\sigma_j(\tau)(1+\nu) - \right. \\ &\quad \left. - \nu S(\tau)] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\gamma_{j\eta}^*(t) = \gamma_{j\eta}(t), \quad \gamma_{j\eta}^*(t) = \frac{2(1+\nu)}{E(t)} \left[ \gamma_{j\eta}(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t \gamma_{j\eta}(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right]$$

$$S(t) = \sigma_x(t) + \sigma_y(t) + \sigma_z(t), \quad (j = x, y, z; \quad \eta = x, y, z)$$

б) при напряженном состоянии, вызванном вынужденными деформациями

$$\begin{aligned} \sigma_j^*(t) &= E(t) \int_{\tau_1}^t \varepsilon_j^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \sigma_j(t), \quad \varepsilon_j^*(t) = \varepsilon_j(t) \\ \gamma_{j\eta}^*(t) &= E(t) \int_{\tau_1}^t \gamma_{j\eta}^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau = \gamma_{j\eta}(t), \quad \gamma_{j\eta}^*(t) = \gamma_{j\eta}(t) \\ (j &= x, y, z; \quad \eta = x, y, z) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где

$E(t)$  — модуль упруго-мгновенных деформаций бетона;  
 $\delta(t, \tau)$  — полная относительная деформация при простом сжатии или растяжении в момент  $t$ , вызванная единичным напряжением, действующим с момента времени, соответствующего возрасту бетона  $\tau$ .

$$\delta(t, \tau) = \frac{1}{E(\tau)} + C(t, \tau) \quad (1.4)$$

где

$\frac{1}{E(\tau)}$  — упруго-мгновенная деформация бетона;

$C(t, \tau)$  — деформация ползучести к моменту времени  $t$  (мера ползучести).

Как обычно, знаком \* отмечены напряжения и деформации, определяемые с учетом ползучести и старения; без звездочки — напряжения и деформации упруго-мгновенной задачи.

Из (1.2) и соотношения, например,  $\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x}$  следует

$$\begin{aligned} u^*(t) &= \frac{1}{E(t)} \int_{\tau_1}^t \left\{ \sigma_x(t)(1+\nu) - \nu S(t) - E(t) \int_{\tau_1}^t [\sigma_x(\tau)(1+\nu) - \right. \\ &\quad \left. - \nu S(\tau)] \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right\} dx \end{aligned} \quad (1.5)$$

Если напряжения в теле вызваны нагрузкой  $P(t)$ , все компоненты которой изменяются во времени по одному и тому же закону, то можно ввести обозначение

$$\int [\sigma_x(t)(1+\nu) - \nu S(t)] dx = n'_{0x} P(t) \frac{L_x}{F_x} \quad (1.6)$$

где  $L_x$  — длина тела в направлении оси  $x$ ;  $F_x$  — площадь произвольного поперечного сечения с нормалью  $x$ ;  $n'_{0x} = n'_{0x}(x, y)$  — функция, связанная с геометрией и условиями закрепления тела.

Следовательно,

$$u^*(t) = \frac{n_{0x} L_x}{F_x E(t)} \left| P(t) - E(t) \int_0^t P(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right| \quad (1.7)$$

По аналогичным формулам определяются перемещения  $v^*(t)$  и  $w^*(t)$ , разница заключается только в постоянном во времени коэффициенте, стоящем перед квадратными скобками. А если это так, то перемещение в произвольном направлении  $j$  может быть определено формулой

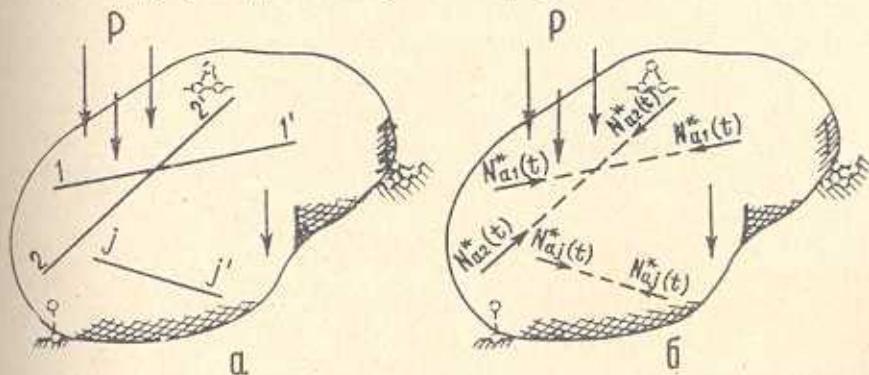
$$u_j^*(t) = \frac{u_{0j} L_j}{F_j E(t)} \left| P(t) - E(t) \int_0^t P(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \right| \quad (1.8)$$

Формула (1.8) и неинтегральные равенства (1.3) приводят к следующим правилам определения перемещений однородного и изотропного тела, обладающего ползучестью [3]:

а) при напряженном состоянии, вызванном внешними силами, изменяющимися во времени по одному и тому же закону, развитие перемещения в любом направлении во времени аналогично развитию перемещений при простых видах деформаций—сжатии или растяжении, чистом сдвиге;

б) при напряженном состоянии, вызванном вынужденными деформациями, ползучесть не влияет на перемещения.

Эти правила, совместно с (1.2), позволяют построить достаточно общий и наглядный метод определения, в стадии эксплуатации, напряжений и перемещений в предварительно напряженных железобетонных конструкциях, работающих без трещин.



Фиг. 1. Тело произвольной формы, усиленное упругими связями  
а) заданная система; б) основная система метода сил.

2. Поставим задачу определения влияния ползучести и старения на напряженно-деформированное состояние однородного изотропного тела (элемента, конструкции) произвольной формы, армированного  $j$  упругими связями (фиг. 1 а). Тело может быть свободно или прикреп-

лено к основанию абсолютно жесткими связями. Упругие связи расположены в идеально гладких каналах, прикреплены к телу у его поверхности и способны воспринимать растягивающие и сжимающие усилия.

Напряженное состояние системы (тело—упругие связи) создается как внешними нагрузками  $P(t)$  и вынужденными деформациями тела  $u_{0j}(t)$  (усадка, температура и т. д.), так и предварительным напряжением упругих связей, представляемых через вынужденные деформации  $u_{nj}(t)$ .

При решении задач по методу сил лишие неизвестные—усилия в упругих связях  $N_{a1}^*(t), N_{a2}^*(t), \dots, N_{aj}^*(t)$ , определяются из условия совместности перемещения связей и тела в точках  $1-1'$ ,  $2-2'$ , ...,  $j-j'$

$$u_1^*(t) = u_{a1}^*(t), \quad u_2^*(t) = u_{a2}^*(t), \dots, u_j^*(t) = u_{aj}^*(t) \quad (2.1)$$

Учитывая сформулированные ранее положения и принцип наложения, перемещение (фиг. 1 б) в момент времени  $t$  точки  $j$  тела относительно точки  $j'$  в направлении силы  $N_{aj}(t) - u_j^*(t)$  может быть представлено в виде суммы

$$\begin{aligned} u_j^* = & \frac{1}{E} [\delta_{11}(1-EK) N_{a1}^* + \delta_{12}(1-EK) N_{a2}^* + \dots \\ & \dots + \delta_{jj}(1-EK) N_{aj}^* + \delta_{jp}(1-EK) P(t)] + u_{0j} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Соответствующее перемещение  $j$ -й упругой связи

$$u_{aj}^* = -\frac{N_{aj} L_j}{F_j E_j} + u_{0j} \quad (2.3)$$

В этих формулах  $\delta_{jk}$ —постоянные коэффициенты, определяемые при решении упруго-мгновенной задачи и равные увеличенным в  $E(t)$  взаимным сближениям точек  $j$  и  $j'$  при действии сил  $N_{ak}=1$  [см. (1.5) и (1.8)];  $u_{0j}$ —взаимное сближение точек тела  $j$  и  $j'$  вследствие вынужденных деформаций;  $u_{nj}$ —взаимное сближение концов арматуры при предварительном напряжении;  $L_j$ ,  $F_j$ , и  $E_j$ —длина, площадь поперечного сечения и модуль упругости  $j$ -ой упругой связи;

$$(1-EK) N_{aj}^* = N_{aj}^*(t) - E(t) \int_{-l}^t N_{aj}^*(\tau) \frac{\partial \delta(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.4)$$

Представив перемещения тела и упругих связей по формулам (2.2) и (2.3), приведем условия совместности перемещений (2.1) к системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода, позволяющих разыскать усилия в связях  $N_{a1}^*(t), N_{a2}^*(t), \dots, N_{aj}^*(t)$

$$\begin{aligned} [\delta_{11} + \delta_{12}(1-EK)] N_{a1}^* + \delta_{12}(1-EK) N_{a2}^* + \dots + \delta_{1j}(1-EK) N_{aj}^* = \\ = -\delta_{1p}(1-EK) P(t) + E(u_{01} - u_{0j}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{21}(1-EK)N_{a1}^* + [\delta_{22} + \delta_{23}(1-EK)]N_{a2}^* + \cdots + \delta_{2j}(1-EK)N_{aj}^* &= \\ = -\delta_{2p}(1-EK)P(t) + E(u_{n2} - u_{02}) & \\ \dots & \\ \delta_{j1}(1-EK)N_{a1}^* + \delta_{j2}(1-EK)N_{a2}^* + \dots + [\delta_j + \delta_{jj}(1-EK)]N_{aj}^* &= \\ = -\delta_{jp}(1-EK)P(t) + E(u_{nj} - u_{0j}) & \end{aligned} \quad (2.5)$$

где

$$\hat{v}_j = \frac{L_j}{F_j m_j(t)}, \quad m_j(t) = \frac{E_j}{E(t)}, \quad \hat{v}_{jk} = \frac{n_{0jk} L_j}{F_j}, \quad E = E(t)$$

Нетрудно показать, что вычисление интегрального оператора (2.4) для какого-либо фиксированного момента времени  $t_k$  можно заменить вычислением соответствующего вектора. Для такой замены разобьем интервал интегрирования  $t_1 - t_k$  на  $n$  отрезков. Для моментов времени  $t_1, t_2, \dots, t_n$  будем последовательно записывать значения интегральных частей, входящих в оператор (2.4), в виде сумм, представляемых в сокращенном виде так:

$$\int_{z_1}^{t_1} = \int_{z_1}^{t_1} + \int_{t_1}^{t_2} + \dots + \int_{t_{n-1}}^{t_n}$$

После подстановки в эти суммы подинтегральных значений, интегрирования по частям и применения обобщенной теоремы о среднем, получим [9]

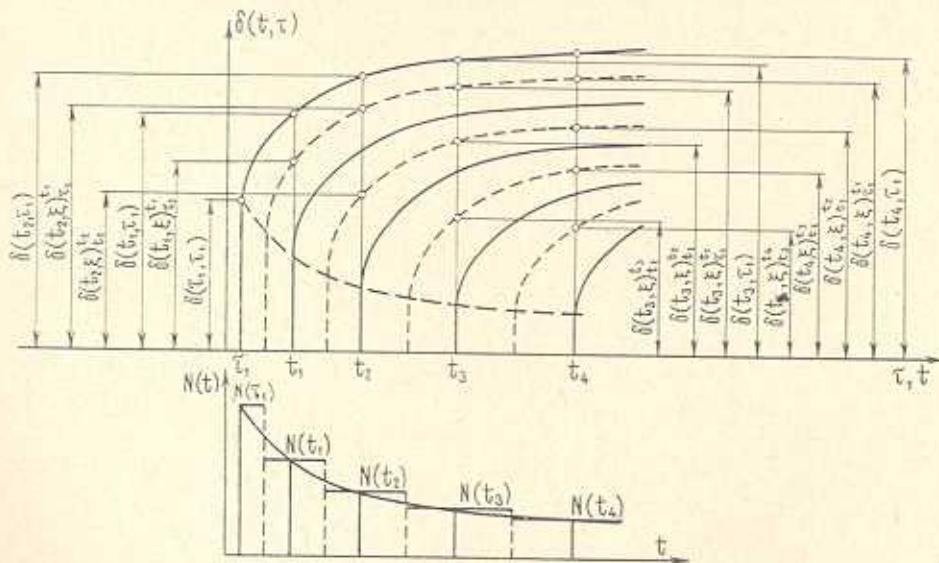
$$E(t_1) \int_{\tau_1}^{t_1} N_i^*(\tau) \frac{\partial \hat{v}(t_1, \tau)}{\partial \tau} d\tau = N_i^*(t_1) - E(t_1) |N_i^*(\tau_1) \hat{v}(t_1, \tau_1) + [N_i^*(t_1) - N_i^*(\tau_1)] \hat{v}(t_1, \tau)|$$

$$E(t_2) \int_{\tau_1}^{t_2} N_i^*(\tau) \frac{\partial \hat{v}(t_2, \tau)}{\partial \tau} d\tau = N_i^*(t_2) - E(t_2) |N_i^*(\tau_1) \hat{v}(t_2, \tau_1) + [N_i^*(t_2) - N_i^*(\tau_1)] \hat{v}(t_2, \tau)| \quad (2.7)$$

$$E(t_n) \int_{\tau_1}^{t_n} N_i^*(\tau) \frac{\partial \delta(t_n, \tau)}{\partial \tau} d\tau = N_i^*(t_n) - E(t_n) [N_i^*(\tau_1) \delta(t_n, \tau_1) + \\ + [N_i^*(t_1) - N_i^*(\tau_1)] \delta(t_n, \tau)_{\tau_1}^{t_1} + [N_i^*(t_2) - N_i^*(t_1)] \delta(t_n, \tau)_{t_1}^{t_2} + \dots \\ \dots + [N_i^*(t_n) - N_i^*(t_{n-1})] \delta(t_n, \tau)_{t_{n-1}}^{t_n}]$$

Через  $\delta(t_n, \tau)_{\tau_1}^{t_k}$  (см. фиг. 2) обозначена величина полной относительной деформации, средняя в смысле удовлетворения равенства

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \frac{d N(\tau)}{d \tau} \delta(t_n, \tau) d\tau = [N_i(t_k) - N_i(t_{k-1})] \delta(t_n, \tau)_{t_{k-1}}^{t_k} \quad (2.8)$$



Фиг. 2. Типичные кривые деформаций бетона, вызванные постоянными нагрузками, приложенными в возрасте  $\tau_1, t_1, t_2, \dots$ . Обозначения, принятые в матричном способе представления интегрального оператора.

Зависимости (2.7) позволяют вычислять векторы операторов (2.4) по следующим формулам, включающим значение  $N_i^*$ , при  $t = \tau_1$

$$(1 - EK) N_i^*(\tau_1) = N_i^*(\tau_1) \\ (1 - EK) N_i^*(t_1) = E(t_1) [\delta(t_1, \tau_1) - \delta(t_1, \tau)_{\tau_1}^{t_1}] N_i^*(\tau_1) + \\ + E(t_1) \delta(t_1, \tau)_{\tau_1}^{t_1} N_i^*(t_1) \\ (1 - EK) N_i^*(t_2) = E(t_2) [\delta(t_2, \tau_1) - \delta(t_2, \tau)_{\tau_1}^{t_2}] N_i^*(\tau_1) + \\ + E(t_2) [\delta(t_2, \tau)_{\tau_1}^{t_2} - \delta(t_2, \tau)_{\tau_1}^{t_2}] N_i^*(t_1) + E(t_2) \delta(t_2, \tau)_{\tau_1}^{t_2} N_i^*(t_2) \quad (2.9)$$

$$(1 - EK) N_i^*(t_n) = E(t_n) [\delta(t_n, \tau_1) - \delta(t_n, \tilde{\tau})_{\tau_1}^{t_n}] N_i^*(\tau_1) + \\ + E(t_n) [\delta(t_n, \tilde{\tau})_{\tau_1}^{t_n} - \delta(t_n, \tilde{\tau})_{\tau_2}^{t_n}] N_i^*(t_2) + \dots + E(t_n) \delta(t_n, \tilde{\tau})_{\tau_{n-1}}^{t_n} N_i^*(t_n)$$

Из этих формул нетрудно заметить, что вектор операторов (2.4) может быть вычислен как произведение треугольной матрицы на вектор. Иными словами, формулы (2.9) сокращенно представляются так:

$$(1 - EK) N_i^* = \| \Delta \delta \| \cdot \| N_i^* \| \quad (2.10)$$

где через  $\| \Delta \delta \|$  и  $\| N_i^* \|$  обозначена треугольная матрица характеристик деформативности тела и вектор искомых усилий в наложенных связях, т. е.

$$\| \Delta \delta \| = \begin{vmatrix} 1 & & & & & \\ \Delta_{10} & \Delta_{11} & & & & \\ \Delta_{20} & \Delta_{21} & \Delta_{22} & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ \Delta_{n0} & \Delta_{n1} & \Delta_{n2} & \cdots & \Delta_{nn} & \end{vmatrix}, \quad \| N_i^* \| = \begin{vmatrix} N_i^*(\tau_1) \\ N_i^*(t_1) \\ N_i^*(t_2) \\ \vdots \\ N_i^*(t_n) \end{vmatrix} \quad (2.11)$$

Элементы этой матрицы, согласно (2.9), подсчитываются по формулам

$$\Delta_{i0} = E(t_i) [\delta(t_i, \tau_1) - \delta(t_i, \tilde{\tau})_{\tau_1}^{t_i}], \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\Delta_{ik} = E(t_i) [\delta(t_i, \tilde{\tau})_{\tau_{k-1}}^{t_k} - \delta(t_i, \tilde{\tau})_{\tau_k}^{t_{k+1}}] \quad (2.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad k = 1, 2, \dots, n; \quad t_0 = \tau_1$$

$$\Delta_{kk} = E(t_i) \delta(t_i, \tilde{\tau})_{\tau_{k-1}}^{t_k}, \quad i = k$$

С помощью (2.6) система интегральных уравнений (2.5) может быть представлена в виде ряда систем, последовательное решение которых позволяет разыскать величины неизвестных усилий  $N_1^*, N_2^*, \dots, N_n^*$  в моменты времени  $\tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$ . Такие системы можно записать путем замены в системе интегральных уравнений (2.5) операторов и функций, зависящих от  $t$  (известных и неизвестных) векторами, представляющими соответствующие значения в моменты времени  $\tau_1, t_1, t_2, \dots, t_n$ . А если при этом вместо оператора  $(1 - EK) N_i^*$  подставить матричное произведение (2.10), то придем к такой системе матричных уравнений:

$$\|\delta_1\| \cdot \|N_{a1}^*\| + \delta_{11} \|\Delta \delta\| \cdot \|N_{a1}^*\| + \delta_{12} \|\Delta \delta\| \cdot \|N_{a2}^*\| + \dots + \delta_{1j} \|\Delta \delta\| \cdot \|N_{aj}^*\| = \\ = -\delta_{1p} \|\Delta \delta\| \cdot \|P\| + \|E\| \cdot \|u_n\| - u_{01}$$

$$\delta_{11} \|\Delta\delta\| \cdot \|N_{a1}^*\| + \delta_{21} \|\Delta\delta\| \cdot \|N_{a2}^*\| + \delta_{31} \|\Delta\delta\| \cdot \|N_{a3}^*\| + \dots + \delta_{jj} \|\Delta\delta\| \cdot \|N_{aj}^*\| = \\ = - \delta_{2j} \|\Delta\delta\| \cdot \|P\| + \|E\| \cdot \|u_{nj} - u_{0j}\| \quad (2.13)$$

$$\delta_{j1} \|\Delta\delta\| \cdot \|N_{a1}^*\| + \delta_{j2} \|\Delta\delta\| \cdot \|N_{a2}^*\| + \dots + \delta_j \|\Delta\delta\| \cdot \|N_{aj}^*\| + \delta_{jj} \|\Delta\delta\| \cdot \|N_{jj}^*\| = \\ = - \delta_{j1} \|\Delta\delta\| \cdot \|P\| + \|E\| \cdot \|u_{nj} - u_{0j}\|$$

где, кроме принятых в (2.11) и (2.12), введены обозначения

$$\|E\| = \|E(\tau_1), E(t_1), E(t_2), \dots, E(t_n)\|, \|u_{nj} - u_{0j}\| = \begin{vmatrix} u_{nj}(\tau_1) - u_{0j}(\tau_1) \\ u_{nj}(t_1) - u_{0j}(t_1) \\ \dots \\ u_{nj}(t_n) - u_{0j}(t_n) \end{vmatrix} \quad (2.14)$$

Следовательно, представление вектора оператора  $(1 - EK) N_t^*$  в виде матричного произведения (2.10) позволяет свести решение системы интегральных уравнений (2.5) к решению системы матричных уравнений (2.13). Благодаря треугольной форме матрицы  $\|\Delta\delta\|$  решение системы матричных уравнений заключается в последовательном решении систем алгебраических уравнений.

Заметим также, что система матричных уравнений (2.13) получена из системы интегральных уравнений (2.5) вполне строго, и решение этой системы дает истинные значения величин неизвестных.

Однако, при выполнении практических расчетов заранее неизвестны величины  $\delta(t_n, \tilde{\tau})_{t_{k-1}}^{t_k}$ , средние в смысле удовлетворения равенства (2.8), и приходится принимать приближенные значения этих величин. В подобных случаях обычно принимают

$$\delta(t_n, \tilde{\tau})_{t_{k-1}}^{t_k} = \delta\left(t_n, \frac{t_k + t_{k-1}}{2}\right) \quad (2.15)$$

Такая матричная форма решения естественна при выполнении расчетов с помощью цифровых электронных машин и удобна для программирования.\* Из второго вектора (2.14) видно, что построенное решение позволяет учесть влияние как предварительного напряжения, вводимого в различные моменты времени, так и вынужденных деформаций рассматриваемого тела.

После определения усилий в упругих связях напряжения в теле подсчитываются по формулам

$$\sigma_x^*(t) = \sigma_{xc}^*(t) + \sigma_{x1} N_{a1}^*(t) + \sigma_{x2} N_{a2}^*(t) + \dots + \sigma_{xj} N_{aj}^*(t) \quad (2.16)$$

$$\tau_{xy}^*(t) = \tau_{xyc}^*(t) + \tau_{xy1} N_{a1}^*(t) + \tau_{xy2} N_{a2}^*(t) + \dots + \tau_{xyj} N_{aj}^*(t)$$

\* Другой, как нам представляется, менее удачный путь записи уравнений линейной теории ползучести в алгебраической и матричной форме указан в работах [10], [11].

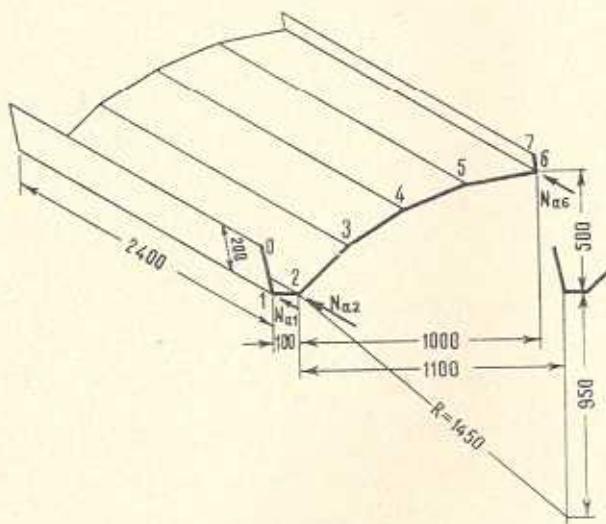
где через  $\sigma_{xc}^*(t)$  и  $\tau_{xyc}^*(t)$  обозначены напряжения в теле, не имеющем упругих связей, вызванные внешними силами и вынужденными деформациями;  $\sigma_{x1}, \sigma_{x2}, \dots, \sigma_{xj}, \tau_{xy1}, \tau_{xy2}, \dots, \tau_{xyj}$  — напряжения от сил  $N_{x1} = 1, N_{x2} = 1, \dots, N_{xj} = 1$  (фиг. 1, б).

Определение перемещений точек тела производится по формуле (2.2) с подстановкой в нее векторов операторов по формуле (2.10).

В случае расчета конструкций типа ферм, арок, оболочек и т. д., т. е. тогда, когда неизвестными являются внутренние усилия, формулы (2.16) переписываются относительно внутренних усилий.

Принятая схема соединения упругих связей (арматура) с телом (бетон) соответствует напряженному состоянию, формирующемуся при натяжении упругих связей „на бетон“, в интервале времени между натяжением и инъектированием каналов. После инъектирования, в результате совместных перемещений арматуры и бетона, между ними возникают касательные напряжения. Известно, что эти касательные напряжения концентрируются у концов арматурных стержней. Поэтому расчет, выполненный исходя из условий (2.1), в силу принципа Сен-Венана, дает в зонах, удаленных от точек 1, 1', 2, 2', ..., j, j', картину напряженного состояния, близкую к действительности, даже и в этом случае.

Кроме того, изложенную схему решения можно распространить и на случай контакта между телом и упругими связями по всей длине последних.



Фиг. 3. Конструкция и геометрические размеры расчетываемой складки.

3. Покажем применение предложенной схемы расчета на примере железобетонной складки (фиг. 3) пролетом 24 м, загруженной равномерно распределенной вертикальной нагрузкой, интенсивность кото-

рой равна: а) на участке первой и седьмой граней складки —  $900 \text{ кг}/\text{м}^2$ ; б) на участке второй грани —  $1050 \text{ кг}/\text{м}^2$ ; в) на участке третьей грани —  $500 \text{ кг}/\text{см}^2$ ; на участке четвертой и шестой грани —  $400 \text{ кг}/\text{м}^2$ , на участке пятой грани —  $350 \text{ кг}/\text{м}^2$ .

Толщины граней: первой, второй, седьмой — 0,3 м, третьей — 0,1 м, четвертой и пятой — 0,06 м, шестой — 0,08 м.

В многоволновом покрытии, расчетным элементом которого является рассматриваемая складка, грани 0—1 и 6—7 соседних складок лежат в одной плоскости; изгибные перемещения в этой плоскости приняты равными нулю.

Предполагается, что оболочка выполнена из бетона, исследованного в Одесском инженерно-строительном институте И. И. Тимофеевым.

Модуль упруго-мгновенных деформаций бетона аппроксимирован формулой [2]

$$E(\zeta) = 3.45 \cdot 10^5 (1 - 0.484 e^{-0.04\zeta}) \quad (3.1)$$

Мера ползучести  $C(t, \tau)$ , входящая в формулу (1.4), при определении  $\delta(t, \tau)$  аппроксимирована зависимостью [12]

$$C(t, z) = \left\{ \left( 1 + \frac{204}{z} \right) \left| 0.3 \left( 1 - e^{-0.06(t-z)} \right) + 0.5 \left( 1 - e^{-0.04(t-z)} \right) \right| + 2.7 (e^{-0.002z} - e^{-0.002t}) \right\} 10^{-6} \quad (3.2)$$

Вычисленные по формулам (1.4), (3.1) и (3.2) значения полных относительных деформаций  $\delta(t, z)$  для бетона в возрасте 28, 32, 40, 60, 90, 150, 300, 600, 1000 суток представлены в виде матрицы

Предварительно напряженная арматура состоит из 3-х пучков

- 1) в ребре 1—арматурная прядь,  $F_{\text{а1}} = 1.1 \text{ см}^2$ ,  $E_{\text{а1}} = 1800000 \text{ кН/см}^2$   
 2) в ребре 2—трос,  $F_{\text{а2}} = 15.8 \text{ см}^2$ ;  $E_{\text{а2}} = 1600000 \text{ кН/см}^2$   
 3) в ребре 6—трос,  $F_{\text{а6}} = 10.5 \text{ см}^2$ ;  $E_{\text{а6}} = 1600000 \text{ кН/см}^2$

Принято, что приложение внешней нагрузки и введение предварительного напряжения осуществляется в один и тот же момент времени при  $\tau_1 = 28$  суток. Усилия предварительного обжатия равны  $N_{\alpha 1}(28) = 10$  т,  $N_{\alpha 2}(28) = 150$  т,  $N_{\alpha 6}(28) = 100$  т.

Расчет рассматриваемой конструкции в упругой стадии, приуроченный к моменту времени  $\tau_1 = 28$  суток, выполнен при участии И. Н. Слезингера на основании разработанного им метода расчета оболочек и складок [6].

При этом рассматривалось действие как внешней нагрузки, так и сосредоточенных сил  $N_{a1} = 1$ ,  $N_{a2} = 1$ ,  $N_{a6} = 1$ , приложенных к торцам складки в местах анкеровки пучков предварительно напряженной арматуры. Значения продольных напряжений в среднем поперечном сечении складки  $\sigma \left( \frac{L}{2} \right)$  приведены в табл. 1.

Таблица 1

№ № ребер	от внешней нагрузки	$\sigma(L/2) \text{ кг/см}^2$			Суммарные напряжения	
		от усилий предварительного натяжения				
		$N_{a1}=10 \text{ m}$	$N_{a2}=150 \text{ m}$	$N_{a6}=100 \text{ m}$		
1	13.09	-1.39	-13.80	-0.92	-3.06	
2	27.69	-0.92	-28.51	-0.06	-1.80	
3	-57.49	-0.21	3.23	4.98	-49.49	
4	-66.07	0.34	0.03	7.56	-58.14	
5	-30.99	0.28	-5.54	-6.60	-42.85	
6	43.44	-0.10	-0.10	-44.51	-1.27	

Продольные перемещения в сантиметрах точек  $j = 1, 2, 6$ , расположенных на одном из торцов складки, относительно соответствующих точек  $j' = 1', 2', 6'$ , расположенных на другом торце, в момент приложения внешних нагрузок и единичных сосредоточенных сил  $N_{a1}$ ,  $N_{a2}$ ,  $N_{a6}$  записаны в виде векторов

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{1}{E(28)} \begin{vmatrix} -20008 \\ -42310 \\ -66378 \end{vmatrix}, \quad u_1 = \frac{1}{E(28)} \begin{vmatrix} 0.21256 \\ 0.14057 \\ 0.014705 \end{vmatrix} \\ u_2 &= \frac{1}{E(28)} \begin{vmatrix} 0.14057 \\ 0.29042 \\ 0.000994 \end{vmatrix}, \quad u_6 = \frac{1}{E(28)} \begin{vmatrix} 0.014705 \\ 0.000994 \\ 0.68006 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Поскольку рассматриваемая складка является телом, усиленным тремя упругими связями, задача заключается в определении величин усилий в этих связях в последовательно возрастающие моменты. Вектора  $\|N_{a1}^*\|$ ,  $\|N_{a2}^*\|$  и  $\|N_{a6}^*\|$ , представляющие изменения усилий, определяются путем записи и решения системы матричных уравнений (2.13), причем  $j = 1, 2, 6$ .

С учетом всего сказанного, система матричных уравнений для данного случая имеет вид

$$\begin{aligned} &\|\delta_1\| \cdot \|\Delta\delta\|^{-1} \cdot \|N_{a1}^*\| + \delta_{11} \|N_{a1}^*\| + \delta_{12} \|N_{a2}^*\| + \delta_{16} \|N_{a6}^*\| = \\ &= -\delta_{1p} \|P\| + u_{p1} \|\Delta\delta\|^{-1} \cdot \|E\| \\ &\delta_{21} \|N_{a1}^*\| + \|\delta_2\| \cdot \|\Delta\delta\|^{-1} \cdot \|N_{a2}^*\| + \delta_{22} \|N_{a2}^*\| + \delta_{26} \|N_{a6}^*\| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\delta_{2\rho} \|P\| + u_{n2} \|\Delta\delta\|^{-1} \cdot \|E\| \\
 \delta_{61} \|N_{a1}^*\| + \delta_{62} \|N_{a2}^*\| + |\delta_6| \cdot \|\Delta\delta\|^{-1} \cdot \|N_{a6}^*\| + \delta_{66} \|N_{a6}^*\| = \\
 &= -\delta_{3\rho} \|P\| + u_{n6} \|\Delta\delta\|^{-1} \cdot \|E\|
 \end{aligned} \tag{3.5}$$

Через  $\|\Delta\delta\|^{-1}$  обозначена матрица, обратная матрице  $\|\Delta\delta\|$ .

Величины  $\delta_j$ , являющиеся элементами вектора  $\|\delta_j\|$  и входящие в систему (3.5), вычисляются по формулам (2.5). Например, для  $\tau_1 = 28$  сут.

$$\begin{aligned}
 \delta_1(28) &= \frac{24 \cdot 10^3}{1.1 \cdot 6.17} = 354 \text{ 1/cm}, \quad \delta_2(28) = \frac{24 \cdot 10^3}{15.8 \cdot 5.48} = 277 \text{ 1/cm} \\
 \delta_6(28) &= \frac{24 \cdot 10^3}{10.5 \cdot 5.48} = 417 \text{ 1/cm}, \quad m_1(28) = \frac{1.8 \cdot 10^6}{2.92 \cdot 10^5} = 6.17 \\
 m_2(28) &= m_6(28) = \frac{1.6 \cdot 10^6}{2.92 \cdot 10^5} = 5.48
 \end{aligned}$$

Коэффициенты  $\delta_{jk}$ , в силу определения, представлены вторым, третьим и четвертым векторами (3.4), а произведения  $\delta_{j\rho} P$  — первым вектором (3.4). Величины  $u_{n1}$ ,  $u_{n2}$ , и  $u_{n6}$ , т. е. взаимные сближения концов арматуры, происходящие при доведении усилий предварительного напряжения до  $N_{a1}(\tau_1) = 10$  м,  $N_{a2}(\tau_1) = 150$  м,  $N_{a6}(\tau_1) = 100$  м, подсчитываются для системы уравнений, выделаемой из (3.5) для момента времени  $t = \tau_1$ :

$$u_{n1} = 12.372 \text{ см}, u_{n2} = 14.2499 \text{ см}, u_{n6} = 14.2923 \text{ см}.$$

Построенная согласно формулам (2.11) и (2.12) матрица  $\|\Delta\delta\|$  для бетона, характеризующегося кривыми (3.1) и (3.2), имеет вид

$\ \Delta\delta\  =$	1.000										
	0.200	1.185									
	0.172	0.488	1.281								
	0.157	0.413	0.758	1.541							
	0.154	0.374	0.579	0.735	1.542						
	0.146	0.368	0.526	0.481	0.522	1.601					
	0.146	0.365	0.525	0.461	0.374	0.379	1.590				
	0.145	0.365	0.525	0.461	0.372	0.368	0.334	1.459			
	0.144	0.367	0.524	0.461	0.371	0.362	0.340	0.245	1.407		

Элементы матрицы подсчитаны для возраста бетона, равного 28, 32, 40, 60, 90, 150, 300, 600 и 1000 дней. Порядок матрицы выбран на основе дополнительного анализа. Этот анализ показал, что для получения величин внутренних усилий при  $t = 1000$  дней с точностью, обычно принимаемой при выполнении практических расчетов, достаточно использовать матрицы седьмого-восьмого порядка. Разумеется, величины внутренних усилий в интервале  $\tau_1 < t < 1000$  дней вычисляются с меньшей степенью точности.

Соответствующая матрица  $\|\Delta\delta\|^{-1}$  представлена ниже:

$$\|\Delta\delta\|^{-1} =$$

	1.000										
-	-0.1688	0.851									
-	-0.0702	-0.3237	0.781								
-	-0.0224	-0.0688	-0.384	0.649							
-	-0.0219	-0.0521	-0.1110	-0.309	0.649						
-	-0.0155	-0.0517	-0.1051	-0.0943	-0.2110	0.625					
-	-0.0147	-0.0437	-0.0954	-0.0933	-0.1022	-0.1479	0.629				
-	-0.0120	-0.0381	-0.0813	-0.0875	-0.0845	-0.1239	-0.1440	0.686			
-	-0.0095	-0.0345	-0.0714	-0.0690	-0.0773	-0.1034	-0.1268	-0.1194	0.711		

В табл. 2 приведены подсчитанные с помощью решения матричного уравнения (3.5) величины внутренних усилий  $N_{a1}^*(t)$ ,  $N_{a2}^*(t)$  и  $N_{ab}^*(t)$ , вызванные как усилиями предварительного напряжения, так и внешней нагрузкой. Данные таблицы показывают, что уменьшение усилий предварительного напряжения вследствие ползучести незначительно, менее 4% от первоначальной величины. Суммарные усилия в пучках арматуры, вследствие увеличения усилий от внешней нагрузки, во времени сохраняются практически постоянными. В рассмотренном примере связано все это как с малым коэффициентом армирования, так и с выбором величин усилий предварительного напряжения, чтобы при  $\tau_1$  суммарное нормальное напряжение в бетоне у пучков арматуры было невелико (см. табл. 1)

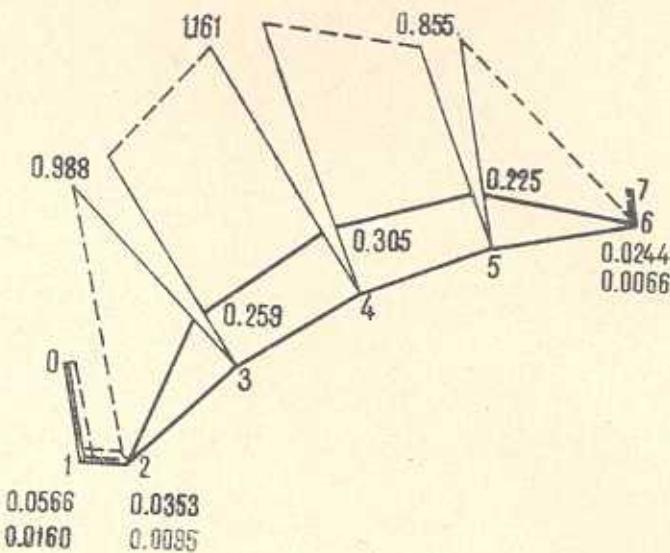
Таблица 2

Возраст в сутках	$N_{a1}^* k_1$			$N_{a2}^* k_1$			$N_{ab}^* k_1$		
	от нагрузки	от предварительного напряжения	суммарное	от нагрузки	от предварительного напряжения	суммарное	от нагрузки	от предварительного напряжения	суммарное
28	56	9944	10000	1510	148490	150000	1566	98434	100000
32	77	9918	9995	2073	147889	149962	2146	97837	99983
40	107	9881	9988	2893	147015	149908	2988	96970	99958
60	147	9831	9978	3982	145853	149835	4103	95834	99937
90	169	9804	9973	4577	145220	149797	4707	95200	99907
150	180	9790	9970	4874	144901	149775	5008	94891	99899
300	189	9779	9968	5119	144640	149759	5257	94635	99892
600	200	9765	9965	5431	144309	149740	5573	94309	99882
1000	208	9754	9962	5654	144071	149725	5800	94076	99876

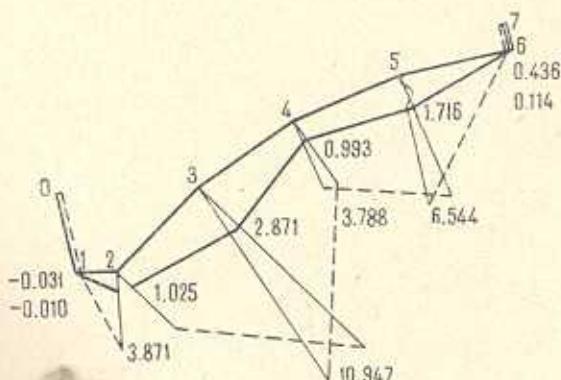
В табл. 3 показаны как величины нормальных напряжений в среднем поперечном сечении оболочки, подсчитанные по первой формуле (2.16), так и изгибающие моменты, определенные аналогичным образом.

Таблица 3

№ точек поперечного сечения	$\tau(L/2)$ кг/см		$M(L/2)$ кг	
	28 суток	1000 суток	28 дней	1000 суток
1	- 3.06	- 3.03	-	-
2	- 1.80	- 1.74	- 517.3	- 518.9
3	- 49.49	- 49.50	- 294.7	- 294.9
4	- 58.14	- 58.15	202.2	202.3
5	- 42.85	- 42.83	- 217.1	- 217.0
6	- 1.27	- 1.21	-	-



Фиг. 4. Продольные перемещения торца складки в с м  
— в возрасте 28 дней, - - в возрасте 1000 дней.



Фиг. 5. Вертикальные перемещения ребер складки посередине пролета в с м, — в возрасте 28 дней,  
- - в возрасте 1000 дней.

Продольные перемещения представлены на фиг. 4, вертикальные перемещения — на фиг. 5. Продольные перемещения подсчитывались по формуле (2.2) с учетом (2.10). Вертикальные перемещения определялись аналогичным образом.

Одесский инженерно-строительный  
институт

Поступила 10 IV 1968

Б. В. ПРОКОПОВИЧ Т. В. РЕКСЧА

ИМЕНЕМ АНДРЕЯ БРУСИЛОВА  
ИМЕНИ АЛЕКСАНДРА НЕФЕДОВА  
ИМЕНИ АЛЕКСАНДРА СОЛОДОВСКОГО

Учебно-исследовательский институт

Задача определения гидравлических и термических напряжений в прямом и обратном направлениях решена методом конечных элементов. Для решения задачи предложен метод, позволяющий учесть нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями. Методика решения задачи основана на использовании метода конечных элементов и метода конечных разностей.

Задача определения гидравлических и термических напряжений в прямом и обратном направлениях решена методом конечных элементов. Для решения задачи предложен метод, позволяющий учесть нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями. Методика решения задачи основана на использовании метода конечных элементов и метода конечных разностей.

Задача определения гидравлических и термических напряжений в прямом и обратном направлениях решена методом конечных элементов. Для решения задачи предложен метод, позволяющий учесть нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями. Методика решения задачи основана на использовании метода конечных элементов и метода конечных разностей.

I. E. PROKOPOVICH, V. V. REKSCHA

## ON THE STRESS-DEFORMED STATE OF THE BODY, POSSESSING CREEP AND FORCED WITH BRACINGS

### Summary

The present article gives a rather general method of the definition of the stress-deformed state of a body, possessing creep and forced with rectilinear elastic bracing, taken arbitrary. The solution of the fundamental equations is given in a matrix form, suitable for the realisation of the analysis on an electronic digital computer. The use of the method is illustrated by analysis of a prismatical shell forced with three prestressed steel bundles.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Александровский С. В. Расчет бетонных и железобетонных конструкций на температурные и влажностные воздействия (с учетом ползучести). Стройиздат. М., 1966.
2. Артюнян Н. Х. Некоторые вопросы теории ползучести. Гостехиздат, 1952.
3. Васильев П. И. Некоторые вопросы ползучести бетона. Автореферат диссертации на соискание ученой степени доктора техн. наук. АПИЛ., 1963.
4. Гвоздев А. А., Александровский С. В., Багрий Э. Я. Ползучесть бетона при напряжениях, изменяющихся во времени. „Бетон и железобетон”, №7, 1965.
5. Прокопович И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояния сооружений. Госстройиздат, 1963.
6. Прокопович И. Е., Слезинер И. Н., Штейнберг М. В. Расчет тонких упругих цилиндрических оболочек и призматических складок. Изд. „Будельник”, К., 1967.
7. Улицкий И. И., Чжан-Чжун-Яо, Голышев А. Б. Расчет железобетонных конструкций с учетом длительных процессов. Госстройиздат УССР, 1960.
8. Улицкий И. И. Определение величины деформаций ползучести и усадки бетона. Госстройиздат УССР, 1963.
9. Швецов А. В. Приближенный способ определения собственных напряжений в бетоне с учетом переменности его деформативных свойств. „Гидротехническое строительство”, №8, 1952.
10. Маслов Н. Г. Термическое напряженное состояние бетонных массивов при учете ползучести бетона. Изв. ВНИИГ, т. 28, 1940.
11. Ильин К. Н. Поперечный изгиб произвольно армированного стержня с учетом ползучести. Тезисы докладов научной конференции Одесского инженерно-строительного ин-та по работам 1964 г. Одесса, 1965.
12. Яшин А. В. Ползучесть бетона в раннем возрасте. Сб. „Исследование свойств бетона и железобетонных конструкций”. Тр. НИИЖБ АС и А ССР, вып. 4, Госстройиздат, 1959.