

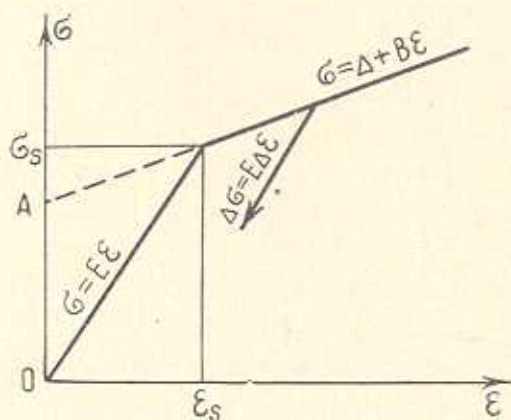
Բ. Մ. ԿԻՐԱԿՕՅԱՆ

ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ
 ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ СИЛЫ

Рассматривается задача об упруго-пластическом изгибе балки под действием сосредоточенной силы, когда последняя односторонне и медленно движется от одного конца балки к другому. Выяснено изменение упруго-пластических областей балки во время движения силы. В рамках соотношений теории малых упруго-пластических деформаций линейно упрочняющегося материала [1] получены дифференциальные уравнения задачи, которые легко интегрируемы в квадратурах. Приведен численный пример.

1. Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения длиной l с единичной шириной и высотой $2h$, свободно лежащую на двух опорах. Поместим начало прямоугольных декартовых координат в центре одного из опорных сечений и направим ось абсцисс x вдоль оси балки, а ось ординат y — вертикально вниз.

В качестве физических соотношений будем принимать уравнения теории малых упруго-пластических деформаций линейно упрочняющегося материала [1], которые в случае одноосного напряженного состояния примут вид (фиг. 1)



Фиг. 1.

$$\begin{aligned} \sigma &= E\varepsilon \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_s \\ \sigma &= A + B\varepsilon \quad \varepsilon \geq \varepsilon_s \quad (\text{при нагружении}) \\ d\sigma &= E d\varepsilon \quad d\varepsilon < 0 \quad (\text{при разгрузке}) \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь σ — напряжение, ε — деформация, E — модуль Юнга, ε_s — предел

упругих деформаций, $B < E$ и $A = (E - B) \varepsilon_s$ — характеристики материала за пределом упругости.

Пусть балка свободна от начальных напряжений и деформаций и подвергается воздействию статически приложенной в сечении с абсциссой x сосредоточенной силы P , вызывающей в сечении η изгибающие моменты

$$M(x, \eta) = \begin{cases} \frac{P(l-x)}{l} \eta & 0 \leq \eta \leq x \\ \frac{P(l-\eta)}{l} x & x < \eta \leq l \end{cases} \quad (1.2)$$

Очевидно, что максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{J} h = \frac{3M_{\max}}{2h^2} \quad (1.3)$$

возникает в крайних волокнах $y = h$ срединного сечения пролета балки, когда сила действует в этом же сечении $x = \eta = l/2$. Имея в виду это обстоятельство, с помощью (1.2) и (1.3) для наибольшего значения силы P , которая всегда, при любых x и η , в балке вызывает только упругие деформации, получим

$$P_s = \frac{8Eh^2\varepsilon_s}{3l} \quad (1.4)$$

В случае $P = P_0 > P_s$ существует промежуток

$$x_0 < x < l - x_0 \quad (1.5)$$

симметричный относительно середины пролета балки $x = l/2$, приложение силы в пределах которого в некоторой части балки вызывает упруго-пластические деформации. Для x_0 , учитывая (1.2)–(1.3) и имея в виду при этом, что максимальное значение изгибающего момента в любом сечении получается, когда сила действует в этом сечении, находим

$$x_0 = \frac{l}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{l^2 - \frac{8Elh^2\varepsilon_s}{3P_0}} > 0 \quad (1.6)$$

В случае, когда сила P_0 действует в любом сечении остальных частей балки $0 \leq x \leq x_0$ и $l - x_0 < x \leq l$, нигде не образуются упруго-пластические деформации, и балка изгибается упруго.

В случае же, когда сила P_0 действует в некотором сечении промежутка (1.5), вокруг загруженного сечения x образуется область упруго-пластических деформаций $\eta_0 \leq \eta \leq \eta'_0$. Для границ этой области с учетом (1.2) и (1.3) получим

$$\eta_0 = \frac{2Elh^2\varepsilon_s}{3P_0(l-x)} < x, \quad \eta'_0 = l - \frac{2Elh^2\varepsilon_s}{3P_0x} > x \quad (1.7)$$

Составляя выражение момента внутренних напряжений и приравнявая его изгибающему моменту, для упруго-пластически изгибаемой части балки получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{d^2w}{d\eta^2}\right)^3 + \frac{3(M - Ah^2)}{2Bh^3} \left(\frac{d^2w}{d\eta^2}\right)^2 + \frac{A\varepsilon_0^2}{2Bh^3} = 0 \quad (1.8)$$

$$(x_0 < x < l - x_0, \quad \eta_0 \leq \eta < \eta'_0)$$

Это уравнение представляет собой однозначную зависимость между положительным изгибающим моментом и отрицательной кривизной оси балки. Ее можно получить элементарно, задаваясь значением $d^2w/d\eta^2$ и вычисляя из (1.8) M . Решение уравнения (1.8), которое в дальнейшем будем считать известным, с учетом (1.2) можно представить в виде

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = \Phi(M) = \begin{cases} F(x, \eta) & \eta_0 \leq \eta \leq x \\ F(\eta, x) & x \leq \eta \leq \eta'_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

Тогда решение задачи упруго-пластического изгиба балки сводится к интегрированию дифференциальных уравнений

$$(x_0 < x < l - x_0)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-x)}{2Eh^3} \eta \quad 0 \leq \eta < \eta_0$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = F(x, \eta) \quad \eta_0 \leq \eta \leq x$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = F(\eta, x) \quad x \leq \eta \leq \eta'_0$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-\eta)}{2Eh^3} x \quad \eta'_0 \leq \eta \leq l$$
(1.10)

с граничными условиями свободного опирания краев и условий непрерывности балки в сечениях $\eta = \eta_0$, $\eta = x$ и $\eta = \eta'_0$.

Рассмотрим следующий специальный случай изгиба балки. Пусть сосредоточенная сила P , приложенная в опорном сечении $x = 0$, медленно двигается по балке к ее другой опоре $x = l$. При этом движение силы будем считать однонаправленным и настолько медленным, чтобы возможно было влиянием сил инерции пренебречь. Для отличия от обычного, рассматриваемый случай назовем случаем движущейся силы.

Очевидно, что если $P < P_s$, то обычный случай и случай движущейся силы ничем не отличаются друг от друга и в обоих случаях балка будет изгибаться упруго, получая одинаковые прогибы.

Такая же картина получится и в случае $P = P_0 > P_s$, пока сила не дойдет до сечения $x = x_0$.

Рассмотрим случай, когда сила P_0 , переходя сечение x_0 , доходит до некоторого сечения x промежутка (1.5).

Так как максимальное значение изгибающего момента в любом сечении η получается в случае, когда сила действует в этом же сечении

$$M_{\max} = M(\eta, \eta) = \frac{P(l - \eta)}{l} \eta \quad (1.11)$$

то участки балки $0 \leq \eta \leq x_0$ и $\eta'_0 \leq \eta \leq l$ будут испытывать упругий изгиб, описываемый первым и последним дифференциальными уравнениями (1.10).

Из выражений изгибающих моментов (1.2) легко заметить, что при движении силы в сторону возрастания абсцисс x в сечениях $0 \leq \eta < x$ происходит процесс разгрузки, а в остальных сечениях $x < \eta \leq l$ — процесс нагружения.

Любое сечение участка балки $x < \eta \leq \eta'_0$ всегда испытывает нагружение, в силу чего изгиб этого участка не отличается от обычного и описывается третьим из дифференциальных уравнений (1.10).

Рассмотрим участок балки $x_0 < \eta < x$. Каждое сечение этого участка η испытывает упруго-пластическое деформирование нагружения включительно до момента, когда сила доходит до него. Поэтому для кривизны оси балки в некотором сечении η в момент ее загрузки ($x = \eta$) согласно (1.9) имеем

$$\left. \frac{d^2 w}{d\eta^2} \right|_{x=\eta} = F(\eta, \eta) \quad (1.12)$$

При дальнейшем движении силы ($x > \eta$) в сечении балки η происходит разгрузка изгибающего момента

$$\Delta M = M(\eta, \eta) - M(\eta, x) = \frac{P_0(x - \eta)}{l} \eta \quad (1.13)$$

Но разгрузка является упругим процессом, в силу чего убывание изгибающего момента (1.13) будет сопровождаться убыванием значения кривизны оси балки

$$\Delta \left(\frac{d^2 w}{d\eta^2} \right) = - \frac{\Delta M}{EJ} = - \frac{3P_0(x - \eta)}{2Eh^3 l} \eta \quad (1.14)$$

Следовательно, для участка балки $x_0 < \eta < x$ с учетом (1.12)–(1.14) получим следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} = \left. \frac{d^2 w}{d\eta^2} \right|_{x=\eta} - \Delta \left(\frac{d^2 w}{d\eta^2} \right) = F(\eta, \eta) + \frac{3P_0(x - \eta)}{2Eh^3 l} \eta \quad (1.15)$$

Таким образом, дифференциальные уравнения упруго-пластического

изгиба балки под действием движущейся силы P_0 при $x_0 < x < l - x_0$ примут вид

$$\begin{aligned}
 & (x_0 < x < l - x_0) \\
 & \frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-x)}{2Eh^3l} \eta \quad 0 \leq \eta \leq \eta_0 \\
 & \frac{d^2 w}{d\eta^2} = F(\eta, \eta) + \frac{3P_0(x-\eta)}{2Eh^3l} \eta \quad x_0 \leq \eta \leq x \\
 & \frac{d^2 w}{d\eta^2} = F(\eta, x) \quad x \leq \eta \leq \eta_0 \\
 & \frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-\eta)}{2Eh^3l} x \quad \eta_0 \leq \eta \leq l
 \end{aligned} \tag{1.16}$$

В качестве граничных условий следует брать условия свободного опирания краев $\eta = 0$, $\eta = l$ и неразрывности балки в сечениях $\eta = x_0$, $\eta = x$, $\eta = \eta_0$.

Рассмотрим теперь случай, когда $x > l - x_0$, т. е. когда сила P_0 уже вышла из участка (1.5). Тогда очевидно, что участки балки $0 \leq \eta \leq x_0$ и $l - x_0 \leq \eta \leq l$ будут испытывать упругий изгиб, а участок $x_0 \leq \eta \leq l - x_0$ — деформирование упругой разгрузки. Следовательно, решение задачи в данном случае сводится к интегрированию дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
 & (l - x_0 < x \leq l) \\
 & \frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-x)}{2Eh^3l} \eta, \quad 0 \leq \eta \leq x_0 \\
 & \frac{d^2 w}{d\eta^2} = F(\eta, \eta) + \frac{3P_0(x-\eta)}{2Eh^3l} \eta, \quad x_0 \leq \eta \leq l - x_0 \\
 & \frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-x)}{2Eh^3l} \eta \quad l - x_0 \leq \eta \leq x \\
 & \frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{3P_0(l-\eta)}{2Eh^3l} x \quad x \leq \eta \leq l
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

с учетом граничных условий свободного опирания краев $\eta = 0$, $\eta = l$ и условий неразрывности балки в сечениях $\eta = x_0$, $\eta = l - x_0$, $\eta = x$.

Правые части дифференциальных уравнений (1.10), (1.16) и (1.17) являются известными функциями, в силу чего путем двукратного интегрирования и использования соответствующих условий всегда можно получить их решения в квадратурах. Однако, мы этого не будем делать, так как эти формальные решения необозримы и довольно громоздки.

Сравнивая уравнения (1.10), (1.16) и (1.17), заключаем, что балка под действием сосредоточенной силы P_0 , находящейся в промежутке $x_0 < x < l$, по-разному изгибается в зависимости от того, как она нагружалась: обычным (статическим) способом или способом движущейся силы.

Эта разница обусловлена только тем, что в случае движущейся силы имеются участки разгрузки ($x_0 < \eta < x$ при $x_0 < x < l - x_0$ и $x_0 < \eta < l - x_0$ при $x > l - x_0$), и сечениях которых кривизна оси балки за счет остаточных деформаций больше, чем при статическом нагружении. Исходя из этих рассуждений и имея в виду условия неразрывности балки в сечениях, разделяющих участки разгрузки от остальных частей балки, нетрудно заключить, что прогибы неопорных сечений балки в случае движущейся силы больше, чем соответствующие статические прогибы.

Вопрос о том, как именно зависят прогибы от способа нагружения балки, можно выяснить после окончательного решения вышеупомянутых дифференциальных уравнений, что, по-видимому, возможно только численным путем.

2. Рассмотрим случай, когда сила P_0 доходит до другой опоры балки. Полагая в (1.17) $x = l$ и имея в виду, что в данном случае участок $x \leq \eta < l$ отсутствует, для дифференциальных уравнений задачи получим

$$(x = l)$$

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} = 0 \quad 0 \leq \eta \leq x_0$$

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} = F(\eta, \eta) + \frac{3P_0(l-\eta)}{2Eh^3 l} \eta \quad x_0 \leq \eta \leq l - x_0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} = 0 \quad l - x_0 \leq \eta \leq l$$

Интегрируя уравнения (2.1) и удовлетворяя условиям свободного опирания краев $\eta = 0$, $\eta = l$ и условиям неразрывности балки в сечениях $\eta = x_0$, $\eta = l - x_0$, а также при этом имея в виду симметричность функции

$$f(\eta) = F(\eta, \eta) + \frac{3P_0(l-\eta)}{2Eh^3 l} \eta$$

относительно середины пролета $\eta = l/2$, получим

$$w = -\frac{C}{l-2x_0} \eta \quad 0 \leq \eta \leq x_0$$

$$w = R(\eta) - \frac{C}{l-2x_0} \eta \quad x_0 \leq \eta \leq l - x_0 \quad (2.2)$$

$$w = -\frac{C}{l-2x_0} (l-\eta) \quad l-x_0 \leq \eta \leq l$$

где приняты обозначения

$$R(\eta) = \int_{x_0}^{\eta} \left(\int_{x_0}^{\eta} f(\eta) d\eta \right) d\eta, \quad C = R \Big|_{\eta=l-x_0}$$

Для иллюстрации рассмотрим следующий числовой пример:

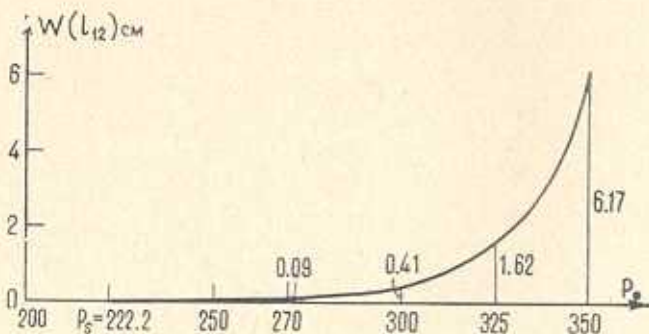
$$E = 10^6 \text{ кг/см}^2, \quad A = 990 \text{ кг/см}^2, \quad B = 10^4 \text{ кг/см}^2,$$

$$e_s = 10^{-3}, \quad h = 5 \text{ см}, \quad l = 300 \text{ см} \quad (P_s = 222.2 \text{ кг}).$$

В нижеприведенной таблице представлены значения постоянных x_0 , C и функции $R(\eta)$ для трех значений движущейся силы $P_0 > P_s^*$ (вычисления производились на машине „Наири“).

$P_0 = 270 \text{ кг}, x_0 = 86.9 \text{ см}, C = -0.087 \text{ см}$		$P_0 = 300 \text{ кг}, x_0 = 73.6 \text{ см}, C = -0.501 \text{ см}$		$P_0 = 350 \text{ кг}, x_0 = 59.4 \text{ см}, C = -8.684 \text{ см}$	
$\eta \text{ см}$	$-10^4 \cdot R(\eta) \text{ см}$	$\eta \text{ см}$	$-10^4 \cdot R(\eta) \text{ см}$	$\eta \text{ см}$	$-10^4 \cdot R(\eta) \text{ см}$
86.9	0	73.6	0	59.40	0
96.0	0.07	81.23	0.32	68.46	2.0
99	0.22	85.05	1.07	74.50	6.6
102	0.54	88.87	2.69	80.54	18.5
105	1.12	92.69	5.67	86.58	44.4
108	2.06	96.51	10.60	92.62	94.7
111	3.48	100.33	18.20	98.66	184.9
114	5.51	104.15	29.28	104.70	338.4
117	8.27	107.97	44.71	107.72	449.5
120	11.91	111.79	65.48	113.70	772.3
123	16.58	115.61	92.60	119.80	1290.0
126	22.41	119.43	127.14	125.84	2096.4
129	29.54	123.25	170.17	128.86	2639.8
132	38.10	127.07	222.72	131.88	3292.8
135	48.21	130.89	285.77	134.90	4065.9
138	59.99	134.71	360.18	137.92	4967.9
141	73.52	138.53	446.68	140.94	6005.9
144	88.87	142.35	545.83	143.96	7185.0
147	106.27	146.17	657.99	147.98	8508.3
150.00	125.9	150.00	783.24	150.00	9976.8

* Из-за симметрии прогибов относительно середины пролета балки $\eta = l/2$ значения функции $R(\eta)$ для промежутка $l/2 < \eta < l - x_0$ не приводятся.



Фиг. 2.

Как видно из графика, для достаточно больших P_0 исследования следует производить в геометрически нелинейной постановке.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 20 IX 1967

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՇԱՐՔՎՈՂ ՈՒԺԻ ԱԶԳԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԳՏԵՎՈՂ ՀԵՄԱՆԻ
ԱՌԱՋԳՅԱՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԽՈՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո ւ փ ո ս մ

Դիտարկվում է կենարձնացված բա կրող հեծանի առաձգապլաստիկական ծաման խնդիրը, երբ բևը դանդաղ շարժվում է հեծանի էմի ծայրից դեպի մյուսը: Պարզարանելով հեծանի առաձգա-պլաստիկական տիրույթների վարքը բևի շարժման ընթացքում, գծախորհն ամրացվող նյութի փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության շրջանակներում ստացվում են խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնք քառակուսելի են: Բերված է թվային օրինակ:

R. M. KIRAKOSIAN

ON THE ELASTIC-PLASTIC BENDING OF BEAM UNDER
MOTION FORCE ACTION

S u m m a r y

The problem of elastic-plastic bending of beam is considered under the action of concentrated force, which slowly and unilaterally moves from one end of the beam to another.

Clarifying the behaviour of elastic-plastic regions of the beam in the time of motion of force on the basis of the theory of small elastic-

plastic deformations [1] of linear strengthening materials the differential equations of the problem are obtained, which are easily integrated in a closed form. A numerical example is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Ильющин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М.—Л., 1948.