ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

А. Г. БАГДОЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ДАВЛЕНИЯ ВБЛИЗИ ОСОБОЙ ЛИНИИ ДЛЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ

Пусть имеется акустическая ударная волна, которая, распространяясь в неоднородной среде, характеризуемой начальной скоростью звука $a_0(x, y, z)$, является в начальный момент $t=0$ вогнутой по отношению к направлению своего распространения. В некоторый момент времени, распространяясь вдоль лучей, волна достигнет огибающей лучей, или каустической поверхности, на которой фронт волны, будучи перпендикулярен лучам, имеет точку возврата, а интенсивность его обращается в бесконечность.

Уравнение для давления и скоростей имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial z^2}=\frac{1}{a_0^2}\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \tag{1}$$

При решении линейной задачи вблизи каустики удобно ввести преобразование Фурье для P

$$u=\int_0^\infty Pe^{i\omega t}dt \tag{2}$$

причем обратное преобразование запишется в виде [1]

$$P=\operatorname{Re}\left(\frac{1}{\pi}\int_{i\omega''}^{i\omega''+\infty} ue^{-i\omega t}d\omega\right) \tag{3}$$

где $\omega''>0$ — некоторая постоянная в одностороннем преобразовании Фурье.

Подставляя (2) в (1), можно получить, с учетом нулевых начальных условий, уравнение для u

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{a_0^2}u=0$$

или, введя показатель преломления $n=\dfrac{a_0(0)}{a_0}$, где $a_0(0)$ — скорость звука в начальной точке луча, а также волновое число $k=\dfrac{\omega}{a_0(0)}$, можно переписать уравнение в виде [1]

$$\Delta u+k^2n^2u=0 \tag{4}$$

Решение уравнения (4) вблизи огибающей лучей получено обобщением лучевого метода Ю. Л. Газаряном [1], причем решение записывается через функцию Эйри.

Позднее решение вблизи каустики более простым способом получено Ю. А. Кравцовым [2] и Блейштейном, Левисом и Д. Людвигом [3].

В их решении, однако, помимо функции Эйри, фигурирует слагаемое с ее производной. Можно показать, что указанное слагаемое можно не писать и все рассмотрения [3] останутся прежними, только амплитуды падающей и отраженной волн будут равны.

То, что эти амплитуды равны на каустике, для частного случая отмечено в [2], причем Ю. А. Кравцов для случая плоской волны в неоднородной среде принимает, что они равны всюду.

Здесь, учитывая результаты Ю. Л. Газаряна [1], проводится последовательное применение метода [3] без дополнительного слагаемого, содержащего производную функции Эйри. Подобно решению геометрической оптики, имеющему вид $u = e^{ik\theta} g$, решение (4) можно искать в виде [3]

$$u = e^{ik\theta} \Phi\left(-k^{\frac{2}{3}} \rho\right) g \tag{5}$$

где выражение с Φ', имеющееся в правой части для u [3], опущено; $\theta(x, y, z)$, $\rho(x, y, z)$ должны быть определены, $\Phi(t)$ удовлетворяет уравнению Эйри

$$\Phi''(t) = t\Phi(t) \tag{6}$$

Вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} \Delta u = &- (\nabla\theta)^2 k^2 e^{ik\theta} g\Phi - (\nabla\rho)^2 \rho k^2 e^{ik\theta} g\Phi + \\ &+ 2ik^{\frac{5}{3}} g (\nabla\theta\nabla\rho)\, e^{ik\theta}\Phi + 2e^{ik\theta} k^{\frac{2}{3}} (\nabla g\nabla\rho)\, \Phi' + \\ &+ e^{ik\theta} g k^{\frac{2}{3}} (\nabla\rho)\, \Phi' + ike^{ik\theta} (\Delta\theta)\, g\Phi + \\ &+ 2ike^{ik\theta} (\nabla\theta\nabla g)\, \Phi + e^{ik\theta} (\Delta g)\, \Phi \end{aligned}$$

где заменено Φ'' согласно (6).

Приравнивая в (4) слагаемые с наибольшими степенями k, можно найти

$$\begin{gathered} (\nabla\theta)^2 + (\nabla\rho)^2 \rho - n^2 = 0 \\ 2\nabla\theta\nabla\rho = 0 \end{gathered} \tag{7}$$

$$\begin{gathered} 2\nabla\theta\nabla g + g\Delta\theta = 0 \\ 2\nabla\rho\nabla g + g\Delta\rho = 0 \end{gathered} \tag{8}$$

Умножая вторые уравнения в (7) и (8) на $\sqrt{\rho}$, складывая с первыми, можно получить уравнения

$$(\nabla\theta \pm \sqrt{\rho}\, \nabla\rho)^2 = n^2 \tag{9}$$

$$2(\nabla\theta \pm \sqrt{\rho}\,\nabla\rho)\,\nabla g + g\,(\Delta\theta \pm \sqrt{\rho}\,\Delta\rho) = 0 \tag{10}$$

или, вводя эйконал,

$$\varphi^{\pm} = \theta \pm \frac{2}{3}\rho^{\frac{3}{2}} \tag{11}$$

$$(\nabla\varphi^{\pm})^2 = n^2 \tag{12}$$

$$2\nabla\varphi^{\pm}\nabla g + g\Delta\varphi^{\pm} \mp \frac{1}{2}\rho^{-\frac{1}{2}}(\nabla\rho)^2 g = 0 \tag{13}$$

Уравнение (12) есть обычное уравнение эйконала для лучей, а (13) отличается от уравнения геометрической оптики третьим слагаемым в левой части, что приводит к конечности решения g на каустике [2], [3].

Здесь $\frac{\varphi^{\mp}}{a(0)}$ обозначает время прихода падающего и соответственно отраженного от каустики луча в данную точку P, фиг. 1; смысл θ будет выяснен далее.

Решение для больших $k^{\frac{2}{3}}\rho$, т. е. вдали от каустики, соответствующее приближению геометрической оптики, получается применением к Φ в (5) метода стационарной фазы. Функцию Эйри можно записать в виде [3]

$$\Phi(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(\frac{\xi^3}{3}+\xi t\right)}\,d\xi \tag{14}$$

Стационарные точки будут $\xi = \pm\sqrt{-t}$.

Выражение в экспоненте приближенно запишется в окрестности $\xi = \pm\sqrt{-t}$

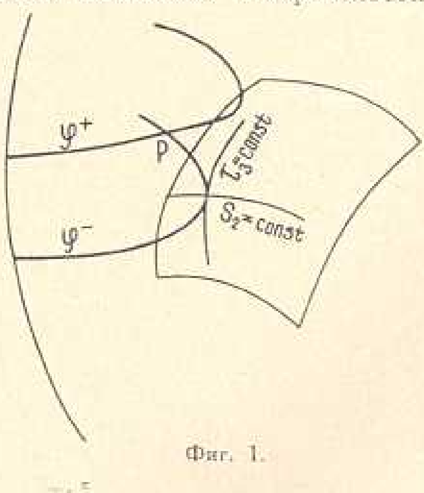
$$\pm\frac{2(-\sqrt{-t})^3}{3} \pm 2\sqrt{-t}\,\frac{(\xi \mp \sqrt{-t})^2}{2}$$

и решение примет вид

$$\Phi(t) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sqrt{-t}(\xi-\sqrt{-t})^2}\,d\xi +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\sqrt{-t}(\xi+\sqrt{-t})^2}\,d\xi$$



Фиг. 1.

Заменяя в первом и втором интегралах $\xi e^{\mp i\frac{\pi}{4}}\sqrt[4]{-t} = x$ соответственно и записывая получающиеся интегралы по x в виде $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, что возможно, так как первоначальные интегралы можно брать по контурам, расположенным под углом $\pm \frac{\pi}{4}$ к оси ξ в стационарных точках, можно найти асимптотическое выражение

$$\Phi(t) = (-t)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{2}{3}(-t)^{3/2}} + (-t)^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{-i\frac{2}{3}(-t)^{3/2} + i\frac{\pi}{2}}$$

и окончательно с учетом (5) и (11)

$$u \sim \frac{k^{-\frac{1}{6}}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \rho^{-\frac{1}{4}} \left(e^{ik\varphi^{+}} g + e^{ik\varphi^{-} + i\frac{\pi}{2}} g \right) \tag{15}$$

причем

$$P_{\text{геом}} = \frac{k^{-\frac{1}{6}}}{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \rho^{-\frac{1}{4}} gki \tag{16}$$

дает амплитуду падающей и отраженной волны вдали от каустики, g зависит от характера падающей волны и для плоской волны постоянна, $\varphi^{\mp}$ — эйконалы падающей и отраженной волн [3].

Очевидно, что по (11)

$$\theta = \frac{\varphi^{+} + \varphi^{-}}{2}, \quad \rho = \left\{ \frac{3}{4} (\varphi^{+} - \varphi^{-}) \right\}^{2/3} \tag{17}$$

Для получения выражений ρ и θ через физические координаты, следуя [3], можно на каустической поверхности ввести криволинейные ортогональные координаты s_2, τ_3, где $\tau_3 = \text{const}$ соответствует поверхностному лучу, т. е. линии, касающейся луча (12), $s_2 = \text{const}$ — уравнение поверхностных волн.

Если ввести в пространстве ортогональные координаты

$$(u_1, u_2, u_3) = (\eta, s_2, \tau_3)$$

где η есть расстояние от точки $P(x, y, z)$ до каустики, измеренное вдоль нормали к ней, и ввести для радиус-вектора точки

$$\bar{x} = \bar{y}(s_2, \tau_3) + \eta \bar{N}(s_2, \tau_3), \quad \frac{\partial \bar{y}}{\partial s_2} = \frac{1}{n} \bar{t}_s$$

где $\bar{y}(s_2, \tau_3)$ — радиус-вектор проекции M точки P на каустику, $\bar{t}_s$ — единичный вектор касательной к лучу, $\bar{N}$ — единичный вектор нормали к каустике, можно записать уравнение эйконала в виде

$$\frac{1}{h_1^2} \left(\frac{\partial s}{\partial \eta} \right)^2 + \frac{1}{h_2^2} \left(\frac{\partial s}{\partial s_2} \right)^2 + \frac{1}{h_3^2} \left(\frac{\partial s}{\partial \tau_3} \right)^2 = n^2 (\bar{y} + \eta \bar{N}) \tag{18}$$

где [3]

$$h_1^2 = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial \eta} \right)^2 = \bar{N}^2 = 1$$

$$h_2^2 = \left(\frac{\partial \bar{x}}{\partial s_2}\right)^2 = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial s_2} + \eta \frac{\partial \bar{N}}{\partial s_2}\right)^2 = \left(\frac{1}{n}\bar{t}_s + \eta \frac{\partial \bar{N}}{\partial s_2}\right)^2 \tag{19}$$

$$h_3^2 = \left(\frac{\partial \bar{y}}{\partial \tau_3} + \eta \frac{\partial \bar{N}}{\partial \tau_3}\right)^2$$

причем ds_2 связано с длиной дуги поверхностного луча $d\tau_2$ по формуле $ds_2 = n d\tau_2$, а эйконал s связан с поверхностным эйконалом s_2 формулой

$$s = s_2 + \psi(\eta, \tau_3) \tag{20}$$

где $\psi(0, \tau_3) = 0$. Подстановка (20) в (18) дает

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{1}{\left(\frac{1}{n}\bar{t}_s + \eta \frac{\partial \bar{N}}{\partial s_2}\right)^2} + \frac{1}{h_3^2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau_3}\right)^2 = n^2(\bar{y}) + 2n\eta \bar{N}\nabla n \tag{21}$$

где в правой части (18) оставлены малые первого порядка по η. Если то же сделать для правой части, легко видеть, что в основном порядке

$$\psi = \frac{2}{3}\alpha \eta^{\frac{3}{2}}$$

где

$$\alpha^2 = 2\left(n^3 \bar{t}_s \frac{\partial \bar{N}}{\partial s_2} + n\bar{N}\nabla n\right) \tag{22}$$

Поскольку $\bar{N}\frac{\nabla n}{n} = \frac{1}{R_r}$ есть проекция вектора главной кривизны луча на нормаль к каустике, а по формулам для производных трехгранника при $\eta = 0$, $\frac{\partial \bar{N}}{\partial s_2} = -\frac{1}{R_s}\bar{t}_s$, где R_s — радиус кривизны поверхностного луча, можно найти

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{2}{R}}\, n \tag{23}$$

где $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_r} - \frac{1}{R_s}$ есть разность проекции главной кривизны луча на нормаль к каустике и главной нормальной кривизны каустики в направлении поверхностного луча. Тогда из (20) можно найти в выбранном порядке

$$s_{\pm} = s_2 \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{R}}\, \eta^{\frac{3}{2}} \tag{24}$$

а по (17)

$$\rho = \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}} \eta n^{\frac{2}{3}} \tag{25}$$

где за s_2 можно взять время прихода фронта волны на основание нормали из точки P на каустику, поскольку по (24) при $\eta = 0$, $s_- = s_2$ и s_2 есть значение $s_+ = s_-$ или $\varphi^+ = \varphi^-$ на каустике.

Если подставить (25) в (5) и учесть (16), можно найти для решения вблизи каустики

$$u = e^{ik\theta}\frac{P_{\text{геом}}}{ki}\rho^{\frac{1}{4}}e^{i\frac{\pi}{4}}k^{\frac{1}{6}}2\sqrt{\pi}\,\Phi\left(-k^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{\frac{2}{R}}\,n^{\frac{2}{3}}\rho\right) \tag{26}$$

что совпадает с формулой, полученной в [1], если перейти к обозначениям этой работы, т. е.

$$u = \frac{F}{\sqrt{\bar{\eta}}}e^{i\left(\frac{\omega}{a}\bar{\sigma} - \frac{\pi}{4}\right)}2\left(\frac{k_1 R}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\Phi\left(-\sqrt[3]{\frac{2}{k_1 R}}\,k_1\nu\right) \tag{27}$$

причем $P_{\text{геом}} = \frac{Fki}{\sqrt{\eta_1}}$, $\frac{\eta_1}{\bar{\eta}} = \left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{3}}\nu^{\frac{1}{2}}$, $\nu = \eta$, $\bar{\sigma} = \theta$, значение $k_1 = \frac{\omega}{a_1}$ в (27) равно частоте, деленной на скорость звука на каустике, в то время, как в (26) $k = \frac{\omega}{a_0(0)}$, $k = \frac{k_1}{n}$, поэтому $\frac{\omega}{a_1}\bar{\sigma} = k\theta$.

Если ввести систему декартовых ортогональных координат, направив ось $0x$ по касательной к поверхностному лучу, ось $0y$ — по нормали к каустике, ось $0z$ — перпендикулярно обоим, причем начало 0 находится на данном луче в точке соприкосновения волны с каустикой, можно заметить, что в точке P $x = a_1\frac{s_2}{a_0(0)} - ta_1$, $s_2 = \theta$ и, принимая приближенно участок каустики за плоский, можно отождествить расстояния по нормали от P до каустики ν [1] или η [3] с $(-y)$. Если перейти к оригиналам, по (3) можно найти [1]

$$P = P_{\text{геом}}P_{-\frac{1}{6}}(\lambda), \quad \lambda > 1$$

$$P = 2P_{\text{геом}}P_{-\frac{1}{6}}(\lambda), \quad -1 < \lambda < 1$$

$$P = P_{\text{геом}}\sqrt{3}\,P_{-\frac{1}{6}}(-\lambda) + P_{\text{геом}}\frac{2}{\pi}Q_{-\frac{1}{6}}(-\lambda), \quad \lambda < -1 \tag{28}$$

$$\lambda = -\frac{3x}{2(-y)^{3/2}}\left(\frac{R}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Более строгое рассмотрение проведено В. М. Бабичем [1].

Нетрудно показать, что в нелинейной задаче, характеризующейся малой начальной амплитудой волны γ, порядки величин вблизи каустики $v_x \sim \gamma^{\frac{4}{5}}, v_y \sim \gamma^{\frac{6}{5}}, x \sim \gamma^{\frac{6}{5}}, y \sim \gamma^{\frac{4}{5}}$.

Для получения решения в нелинейной задаче в случае произвольного наклона лучей к каустической поверхности можно ввести ось $0x$ (u) по направлению поверхностных лучей на каустике, ось $0y$ — по нормали к ней и ось $0z$ (v) — перпендикулярно $0x$, $0y$; u, v — криволинейные координаты на каустике, $\frac{du}{dt} = -a_0$, причем точка 0 есть точка касания луча с каустикой. В неподвижной системе (X, Y, Z) координаты 0 будут (X_0, Y_0, Z_0). Реперы осей x, y, z относительно X, Z, Y обозначены $\bar e_1$, $\bar e_2$, $\bar e_3$.

Тогда

$$X - X_0 = x\cos(X, x) + y\cos(X, y) + z\cos(X, z)$$

и подобные же соотношения выполняются для $Y - Y_0$, $Z - Z_0$, причем косинусы осей обладают свойствами симметрии и ортонормированности. Если в системе уравнений газодинамики перейти от X, Y, Z, t к x, y, z, t с учетом

$$\frac{\partial x}{\partial t} \sim a_0, \quad \frac{\partial y}{\partial t} \sim 0, \frac{\partial z}{\partial t} \sim 0, \quad \left.\frac{\partial v_X}{\partial t}\right|_{X, Y, Z} \sim \left.\frac{\partial v_X}{\partial t}\right|_{x, y, z} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial v_X}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_X}{\partial X} = \cos(x, X)\frac{\partial v_X}{\partial x} + \cos(y, X)\frac{\partial v_X}{\partial y} + \cos(z, X)\frac{\partial v_X}{\partial z}$$

и подобных равенств для остальных параметров, можно, комбинируя уравнения движения, отбрасывая слагаемые, стоящие вне производных и оставляя малые порядка $\gamma^{-\frac{2}{5}}$, $\gamma^{\frac{2}{5}}$ и 1, получить

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial v_x}{\partial x} + v_x\frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial v_y}{\partial x} + v_x\frac{\partial v_y}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial v_z}{\partial x} + v_x\frac{\partial v_z}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial z}$$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial P}{\partial x} + v_x\frac{\partial P}{\partial x} + \rho a^2\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) = 0$$

Из первого уравнения, если оставить в нем малые порядка $\gamma^{-\frac{2}{5}}$, следует $P = -\rho_0 a_0 v_x$. Теперь второе и третье уравнения в порядке $0(1)$ дают $\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}$, $\frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}$. Для $\frac{\partial x}{\partial t}$ из приведенных уравнений можно найти

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{\partial X_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\cos(x, X) - \frac{\partial X_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\cos(x, X) -$$

$$-\frac{\partial Y_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\cos(x, Y) - \frac{\partial Y_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\cos(x, Y) -$$

$$-\frac{\partial Z_0}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}\cos(x, Z) - \frac{\partial Z_0}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial t}\cos(x, Z) +$$

$$+(X - X_0)\frac{d\cos(x, X)}{dt} + (Y - Y_0)\frac{d\cos(x, Y)}{dt} + (Z - Z_0)\frac{d\cos(x, Z)}{dt}$$

Если использовать формулы для производной репера $\bar{e}_1$ с координатами $\cos(x, X)$, $\cos(x, Y)$, $\cos(x, Z)$ в приближении $\gamma^{\frac{4}{3}}$

$$\frac{d\bar{e}_1}{dt} = D\frac{du}{dt}\bar{e}_2, \qquad D = -\frac{1}{R_s}$$

где $\frac{1}{R_s}$ — нормальная кривизна каустики в направлении поверхностного луча, и записать скалярное произведение

$$(\bar{r} - \bar{r}_0)\frac{d\bar{e}_1}{dt} = (X - X_0)D\frac{du}{dt}\cos(y, X) +$$

$$+(Y - Y_0)D\frac{du}{dt}\cos(y, Y) + (Z + Z_0)D\frac{du}{dt}\cos(y, Z)$$

учесть, что $\frac{\partial X_0}{\partial u} = \cos(X, x)$, $\frac{\partial X_0}{\partial v} = \cos(X, y)$ и т. п., можно найти

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{du}{dt} + D\frac{du}{dt}y$$

Подставляя эти соотношения в систему и исключая $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial P}{\partial y}$, находим

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial x}(2a'ya_1 - 2\varkappa^{\circ}v_x a_1 + 2Da_1^2 y) +$$

$$+ a_1^2\frac{\partial v_y}{\partial y} + a_1^2\frac{\partial v_z}{\partial z} - 2a_1\frac{\partial v_x}{\partial t} = 0 \tag{29}$$

причем учтено, что $a^2 = a_0^2(x, y) - 2(\varkappa^{\circ} - 1)a_0 v_x$, $a_0(x, y) = a_1 + a'y$, $\varkappa^{\circ}$ дается уравнением политропы. Из (28) следует, что движение будет установившимся и не зависящим от z. Тогда из (30) следует отбросить слагаемые, содержащие v_z и t, и система примет вид

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial y},\quad \frac{\partial v_x}{\partial x}\left(2a'ya_1-2\frac{1}{R_s}a_1^2y-2\alpha^0 v_x a_1\right)+a_1^2\frac{\partial v_y}{\partial y}=0 \tag{30}$$

Если ось $0x$ направлена по движению волны, в (28) следует заменить x на $-x$, а в (30) v_x на $-v_x$, причем $\frac{1}{R_r}=\frac{a'}{a_1}$. Тогда (30) запишется

$$\frac{\partial v_y}{\partial x}=\frac{\partial v_x}{\partial y},\quad \frac{\partial v_x}{\partial x}\left(\frac{a_1}{R}y+\alpha^0 v_x\right)+\frac{a_1}{2}\frac{\partial v_y}{\partial y}=0,\quad \frac{1}{R}=\frac{1}{R_r}-\frac{1}{R_s} \tag{31}$$

$$R_r>0,\quad R_s<0$$

Приведенное уравнение имеет место, если, при наблюдении из области за каустикой, движение ударной волны происходит по часовой стрелке, при направлении от осей x к y по часовой стрелке, и наоборот; уравнение (30) имеет место при условии, что ударная волна движется против часовой стрелки, при направлении от x к y по часовой стрелке.

Решение нелинейной системы (31) заменой $v_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $v_y=\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $v_{x_1}=\frac{\partial\Psi}{\partial x}$, $v_{y_1}=\frac{\partial\Psi}{\partial y}$, $\Psi=\frac{\alpha^0 R}{a_1}\varphi+xy+cy$ приводится к уравнению

$$v_{x_1}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2}+\frac{R}{2}\frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2}=0$$

которое преобразованием

$$\Phi+\Psi=xv_{x_1}+yv_{y_1},\quad x=\frac{\partial\Phi}{\partial v_{x_1}},\quad y=\frac{\partial\Phi}{\partial v_{y_1}}$$

приводится к уравнению Трикоми

$$v_{x_1}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_{y_1}^2}+\frac{R}{2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial v_{x_1}^2}=0 \tag{32}$$

Здесь c — постоянная порядка $\gamma^{\frac{6}{5}}$.

Решение (32) можно, сопоставляя с линейным, записать в виде (28), где заменено x на v_{y_1}, y на v_{x_1}.

Явление нерегулярного отражения, возникающее в данной задаче, можно рассчитать численно.

Пусть решение на падающей волне по геометрической акустике имеет вид [1]

$$P_{\text{геом}}=A_2(-y)^{-\frac{1}{4}} \tag{33}$$

Тогда согласно (28) позади падающей ударной волны AF $v_x=\frac{P}{\rho_0 a_1}$,

$$P = 2A_2(-y)^{-\frac{1}{4}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi\right)$$

$$\varphi_0 = -\frac{4}{3}\frac{A_2}{\rho_0 a_1} 2\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{\frac{3}{4}}\xi F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 2, \xi\right) \tag{34}$$

$$\xi = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{x}{\sqrt{\frac{4}{9}\eta^3}}\right), \qquad \eta = -\sqrt[3]{\frac{2}{R}}\, y$$

причем впереди AF имеют место вдвое меньшие значения v^0_1 и φ_0.

Вблизи отраженной волны BF решение дается (34), причем аналитическое продолжение к линии $\xi = 1$ имеет вид

$$\varphi'(\xi) = F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, \xi\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln|1-\xi|\, F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 1, 1-\xi\right) +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^2}\sum_0^\infty \Gamma\left(\frac{1}{6}+m\right)\times \tag{35}$$

$$\times\Gamma\left(\frac{5}{6}+m\right)\frac{2\psi(m+1)-\psi\left(m+\frac{1}{6}\right)-\psi\left(m+\frac{5}{6}\right)}{\Gamma(m+1)}\frac{(1-\xi)^m}{m!}$$

где $\psi(x) = \dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ и

$$\varphi(\xi) = F\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{6}, 2, \xi\right) = \frac{\frac{36}{5}}{2\pi} + \frac{1}{2\pi}(1-\xi)\ln|1-\xi|\times$$

$$\times F\left(\frac{7}{6}, \frac{11}{6}, 2, 1-\xi\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{\frac{36}{5}}{2\pi}\sum_0^\infty\frac{\psi\left(\frac{11}{6}+m\right)+\psi\left(\frac{7}{6}+m\right)-\psi(2+m)-\psi(1+m)}{(m+1)!}\times$$

$$\times\Gamma\left(\frac{7}{6}+m\right)\Gamma\left(\frac{11}{6}+m\right)\frac{(1-\xi)^{m+1}}{m!} \tag{36}$$

Аналитическое выражение позади и впереди BF одинаково. На отраженной волне BF $\xi = 1$ и P бесконечно. Для устранения особенности при $\xi = 1$ для конечных y можно использовать метод [4] замены в линейном решении характеристической переменной ее уточненным неизнейным значением. Если в (34), (35), взятых вблизи BF, заменить $1-\xi$ через $-\dfrac{\xi_5}{(-y)^{\frac{3}{2}}}$, причем

$$1-\xi=-\frac{\xi_1}{(-y)^{\frac{3}{2}}},\qquad 1-\xi_4=-\frac{\xi_5}{(-y)^{\frac{3}{2}}} \tag{37}$$

то вблизи BF уточненное решение запишется в виде

$$v_x=\frac{P}{\rho_0 a_1},\qquad v_x=2\frac{A_2}{\rho_0 a_1}(-y)^{-\frac{1}{4}}\varphi'(\xi_4)$$

$$v_y=\frac{10}{3}\frac{A_2}{\rho_0 a_1}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{\frac{1}{4}}\varphi(\xi_4)+2\frac{A_2}{\rho_0 a_1}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{\frac{1}{4}}(1-2\xi_4)\varphi'(\xi_4) \tag{38}$$

Если в уравнении характеристики, соответствующей волне BF,

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{-\frac{2}{R}y-\frac{2}{a_1}v_x}$$

перейти к переменной ξ, $x=(1-2\xi)\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{\frac{3}{2}}$ заменить v_x по (38), взятой вблизи BF, и отбросить малые более высокого порядка, то можно найти уравнение

$$\frac{d\xi}{dy}y^2-\frac{3}{2}(\xi-1)(-y)=\frac{3}{2}\alpha^0(-y)^{-\frac{1}{4}}F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1,\xi_4\right)$$

$$F\left(\frac{1}{6},\frac{5}{6},1,\xi_4\right)=-\frac{1}{2\pi}\ln|1-\xi_4|+\frac{3\ln 3+4\ln 2}{2\pi} \tag{39}$$

В уравнении (39) введены безразмерные переменные ξ путем замены $\dfrac{x}{\frac{R}{2}\gamma^{\frac{6}{5}}}$, $\dfrac{y}{\frac{R}{2}\gamma^{\frac{4}{5}}}$, $\dfrac{v_x}{a_1\gamma^{\frac{4}{5}}}$, $\dfrac{v_y}{a_1\gamma^{\frac{6}{5}}}$ на x, y, v_x, v_y соответственно, причем $\gamma=\dfrac{A_2\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{4}}}{\rho_0 a_1^2}$. Тогда (39) запишется в виде

$$\frac{d(\xi-1)(-y)^{\frac{3}{2}}}{d(-y)^{\frac{3}{2}}}=-\alpha^0(-y)^{-\frac{7}{4}}\frac{-\ln|1-\xi_4|+3\ln 3+4\ln 2}{2\pi} \tag{40}$$

Вводя переменную $x_1=(-y)^{\frac{3}{2}}$, после интегрирования при начальном условии $\xi=\xi_4$, $y=0$ $(\xi_1=\xi_5)$ получим

$$\xi_1=6(-y)^{\frac{1}{4}}\frac{1}{2\pi}\ln|1-\xi_4|+6(-y)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{6}{2\pi}-\frac{3\ln 3+4\ln 2}{2\pi}\right)+\xi_5 \tag{41}$$

или

$$1-\xi=1-\xi_4-2A_1(-y)^{-\frac{5}{4}}\ln|1-\xi_4|-B_1(-y)^{-\frac{5}{4}}$$
$$A_1=3\frac{\alpha^0}{2\pi},\ B_1=12A_1-2A_1(3\ln 3+4\ln 2) \tag{42}$$

Если взять за x, y прежние переменные, то $A_1=\frac{3}{2\pi}\alpha^0\frac{R}{2}\frac{A_2}{\rho_0 a_1^2}$.

Если подставить (42) в уравнение ударной волны в прежних переменных

$$\frac{dx}{dy}=\sqrt{-\frac{2}{R}y-\frac{\alpha^0}{a_1}(v_x+v_x^0)}$$

или приближенно

$$\frac{dx}{dy}=\left(-\frac{2}{R}y\right)^{\frac{1}{2}}-\frac{\alpha^0}{2}(v_x+v_x^0)\left(-\frac{2}{R}y\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{43}$$

где v_x, v_x^0 даются (38) (причем положено $\xi_4=\xi_3$ за ударной волной и $\xi_4=\xi_2$ перед ударной волной соответственно) можно найти

$$1-\xi_2=\lambda_2(-y)^{-\frac{5}{4}}2A_1,\qquad 1-\xi_3=-\mu_2(-y)^{-\frac{5}{4}}2A_1$$
$$2\lambda_2-2=\ln\frac{\lambda_2}{\mu_2} \tag{44}$$

Условие непрерывности $1-\xi$ на BF запишется в виде

$$\lambda_2+\mu_2+\ln\frac{\mu_2}{\lambda_2}=0,\quad \lambda_2>2,\quad \mu_2>0 \tag{45}$$

Формулы (38), (44), (45) дают решение на ударной волне BF (фиг. 2). Условие сохранения касательной составляющей к BF запишется

$$v_y-v_y^0+(v_x-v_x^0)\frac{dx}{dy}=0 \tag{46}$$

где $\frac{dx}{dy}$ дается (43). Если учесть, что вблизи BF

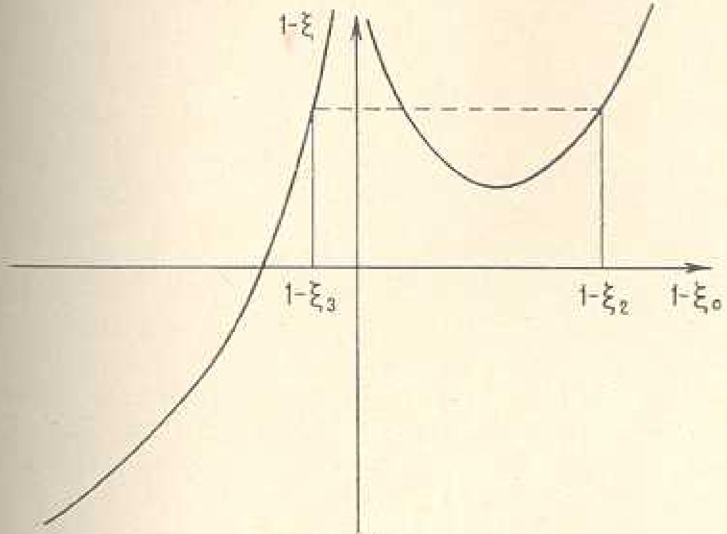
$$\frac{v_y}{\frac{A_2}{\rho_0 a_1}\left(\frac{2}{R}\right)^{\frac{1}{2}}(-y)^{\frac{1}{4}}}=\frac{24}{2\pi}\xi_4+\frac{10}{3}\frac{1-\xi_4}{2\pi}\ln|1-\xi_4|-$$
$$-\frac{4}{2\pi}(1-\xi_4)\ln|1-\xi_4|-2\varphi'(\xi_4) \tag{47}$$

и оставить малые порядка $\gamma^2\ln\gamma$, можно получить

$$(1-\xi_3)\ln|1-\xi_3|-(1-\xi_2)\ln|1-\xi_2|=(\xi_2-\xi_3)\ln|1-\xi_3|=$$
$$=2A_1(-y)^{-\frac{5}{4}}(\lambda_2+\mu_2)\ln\gamma=-2A_1(-y)^{-\frac{5}{4}}\ln\frac{\mu_2}{\lambda_2}\ln\gamma,$$

а если учесть, что приближенно $v_x + v_x^0 = -2(-y)^{-\frac{1}{4}} \frac{A_2}{2\pi\rho_0 a_1} 2 \ln \gamma$,

можно проверить удовлетворение (46) в порядке $\gamma^2 \ln \gamma$.



Фиг. 2.

Для экспериментальной проверки результатов желательно рассмотреть обтекание тонкого плоского тела постоянным потоком $V > a_0$ газа, имеющего переменную скорость звука $a(y)$, причем $a(y_1) = V$. Тогда $y = y_1$ будет каустикой, и в ее окресности решение дается (34), где $f(x)$ — контур тела, $A_2 = \rho_0 a_1^2 f'(0) \left(\frac{2a_1'}{a_1}\right)^{-\frac{3}{4}} y_1^{-\frac{1}{2}} \sqrt[4]{\frac{a_1^2}{a_0^2} - 1}$, $a_1 = a(y_1)$, y_1 — расстояние от тела до каустики. Применение метода Лайтхилла к определению отраженной волны дает неправильный результат и вдвое меньшее A_1, что, вероятно, связано с приближенностью уравнения (31).

Следует отметить, что формула для $\frac{\partial \gamma_2}{\partial r_0}$ работы [5] является неточной. В самом деле, если в (51) [5] положить

$$\lambda_0 - \frac{1}{V} - \lambda_1(y) = \Phi, \quad s = s_0(y) + s_1(y)\Phi + s_2(y)\Phi^2$$

и оставить в разложении по Ф малые нулевого порядка, можно найти вблизи точки соединения фронтов волн

$$2a^2(y)\mu_0' i s_1(y) - \alpha^3 \frac{A\pi}{a^2(y)} + \frac{a^4(y)}{H_2^2} s_1^2(y) = 0$$

Условие (59) в нулевом порядке запишется $s_1(y) = \frac{\lambda_1 Y_1}{1 - \frac{R''}{V^3} Y_1}$.

Подставляя в предыдущее уравнение и интегрируя, можно найти для λ_1 формулу (56) [5]. Таким образом, в точке соединения $\frac{\partial s}{\partial t_0} = s_0(y)$

Полагая $v_s = A\pi + v_{s_1}$, $v_0 = -\frac{\lambda_1 A\pi}{a(y)\mu_0\left(1 - \frac{R''}{V^3}Y_1\right)} + v_{0_1}$, $v_s = A\pi$,

подставляя в (51) [5] и оставляя малые порядка Φ, можно получить

$$-2a^2(y)\mu_0 s_1'(y) + 2a^2(y)\mu_0\lambda_1' 2s_2(y) +$$

$$+\frac{a^2(y)}{H_2^2}4s_1(y)s_2(y) + \frac{\alpha^0}{a^2(y)}\frac{v_{s_1}}{\Phi} = 0$$

$$\frac{v_{0_1}}{\Phi} = -\frac{A\pi}{H_2}2s_2(y) - \frac{v_{s_1}}{\Phi}\frac{s_1(y)}{a(y)\mu_0 Y_1}$$

Подставляя сюда решение [5] $\frac{v_{0_1}}{\Phi} = -\frac{1}{a(y)\mu_0\left(1 - \frac{R''}{V^3}Y_1\right)}A\pi$,

$$\frac{\Phi A}{v_{s_1}}\sqrt{\frac{1-\frac{R''}{V^3}Y_1}{Y_1}}\,s_1(y) = \int_0^y \frac{\alpha^0 A\sqrt{\frac{1-\frac{R''}{V^3}Y_1}{Y_1}}}{\mu_0 a^4(y_1)}dy_1 + C_2(0),$$

можно найти окончательно $1 = \frac{v_{s_1}}{\Phi A\pi}2\lambda_1$, что не может быть, вообще говоря, удовлетворено. Таким образом, условия на ударной волне в точке соединения волн [5] удовлетворены лишь в нулевом порядке по Φ, однако выбором функции $C_2(C_1)$ можно их удовлетворить с достаточной точностью на всей ударной волне.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 XII 1967

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ

ՃՆՇՄԱՆ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ԵԶԱԿԻ ԳԾԻ ՄՈՏ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՀԱՄԱՐ

Ամփոփում

Դիտարկվում է հարվածային ալիքի որոշումը այն գծի մոտ, որտեղ եռապայմանները կոտրվում են շոշափողը և գծային լուծումը անվերջ է։ Որոշված են պարամետրերի կարգերը և գտնված են բերված պարզեցված հավասարումները, որոնց լուծումը գտնվում է գծային լուծման հետ կապելու եղանակով

A. G. BAGDOEV

PRESSURE EVALUATION NEAR A SINGULAR LINE FOR A SHOCK WAVE

Summary

The problem of determination of the weak shock wave near the caustic of the linear rays is considered. The linear solution is infinite there, and a nonlinear improvement is required. The comparison of the solutions performed by various authors is made. The orders of the disturbed quantities and the value of the disturbed region are made.

The nonlinear equations in this order are reduced with new variables to the Tricomi equation and the solution is found in the form of Legendre's special functions. In the region far from caustic this solution transfers into a linear solution.

The determination of the reverbiration wave where the linear solution has a logarithmic singularity is made.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Газарян Ю. Л., Бабич В. М.* Вопросы динамической теории распространения сейсмических волн. Л., № 5, 1961.
2. *Кравцов Ю. А.* Радиофизика. № 4, 1964.
3. *Lewis R. M., Bleistein N., Ludwig D.* Communications on Pure and Applied Mathematics. № 2, 1967.
4. *Whitham G. B.* Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. VI, 1953.
5. *Багдоев А. Г.* Ученые записки Ереванского Университета, № 1, 1968.