ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXII, № 1, 1969 Механика

Дж. З. МКРТЧЯН

РАСЧЕТ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА, ИЗГОТОВЛЕННОГО ИЗ РАЗНОМОДУЛЬНОГО МАТЕРИАЛА

В работе рассматривается полый цилиндр, изготовленный из разномодульного материала и находящийся под действием равномерного внутреннего давления и равномерного внешнего натяжения.

Решена задача для двух случаев напряженно-деформированного состояния цилиндра:

а) обобщенное плоское напряженное состояние, когда длина цилиндра весьма мала;

б) плоская деформация, когда длина цилиндра бесконечно большая.

Для рассмотренных случаев получены формулы для определения напряжений и радиального перемещения. Определение радиусов окружностей, разделяющих области первого и второго рода [1], приведено к решению трансцендентных уравнений.

В работе показано, что для разномодульного материала задача о плоской деформации, в отличие от классической теории упругости, в некоторых случаях может существенно отличаться от соответствующей задачи об обобщенном плоском напряженном состоянии.

Аналогичная задача для сферического сосуда, изготовленного из разномодульного материала, решена в работе [1].

§1. Обобщенное плоское напряженное состояние полого цилиндра

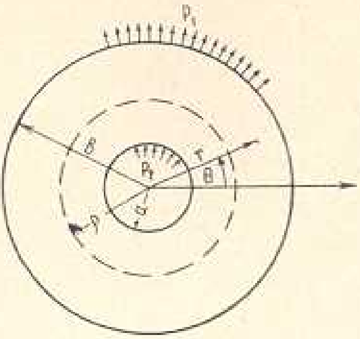
Рассмотрим полый цилиндр весьма малой длины, изготовленный из разномодульного материала, характеризующегося модулями упругости и коэффициентами Пуассона E^+, ν^+ и E^-, ν^- при растяжении и сжатии соответственно.

Пусть внутренний радиус цилиндра — a, внешний — b, интенсивность внутреннего давления — p_2, интенсивность наружного натяжения — p_1 (фиг. 1).

В рассматриваемом случае все расчетные величины (напряжения σ_r, σ_θ и радиальное перемещение u) не зависят от θ и являются функциями только от r.

Как известно [1, 2], в разномодульной теории упругости чисто статические и чисто геометрические уравнения и соотношения ничем не отличаются от соответствующих уравнений и соотношений классической теории упругости.

Приведем уравнение равновесия элемента кольца



Фиг. 1.

$$r\frac{d\sigma_r}{dr}+\sigma_r-\sigma_\theta=0 \tag{1.1}$$

Относительные деформации ε_r и ε_θ выражаются через перемещение u следующими формулами:

$$\varepsilon_\theta=\frac{u}{r},\qquad \varepsilon=\frac{du}{dr} \tag{1.2}$$

Очевидно, что под действием указанных нагрузок во всех точках кольца $\sigma_\theta>0$. Напряжение же σ_r имеет разные знаки на внутренней ($r=a$) и внешней ($r=b$) окружностях. Поэтому естественно, что на некоторой, пока неизвестной, окружности ($r=\rho$) σ_r обращается в нуль. В силу сказанного следует, что кольцо разделится этой окружностью ($r=\rho$) на две части. Первая часть ($a\leqslant r<\rho$) является областью второго рода, так как для всех точек этой части $\sigma_r<0$, $\sigma_\theta>0$. Вторая часть ($\rho\leqslant r\leqslant b$) является областью первого рода, так как для нее $\sigma_r\geqslant 0$, $\sigma_\theta<0$.

Заметим, что напряжения σ_r и σ_θ являются главными. Напишем закон упругости в главных направлениях r и θ для каждой из рассмотренных частей кольца в отдельности [1, 2].

Для первой части ($a\leqslant r<\rho$) имеем

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E^-}(\sigma_r-\nu^-\sigma_\theta),\qquad \varepsilon_\theta=\frac{1}{E^+}(\sigma_\theta-\nu^+\sigma_r) \tag{1.3}$$

Для второй части ($\rho\leqslant r\leqslant b$) имеем

$$\varepsilon_r=\frac{1}{E^+}(\sigma_r-\nu^+\sigma_\theta),\qquad \varepsilon_\theta=\frac{1}{E^+}(\sigma_\theta-\nu^+\sigma_r) \tag{1.4}$$

Решая уравнения (1.3) и (1.4) относительно напряжений и используя соотношения (1.2), получим:
для первой части ($a<r<\rho$)

$$\sigma_r=\frac{E}{1-\nu^-\nu^+}\left(\frac{du_1}{dr}+\nu^+\frac{u_1}{r}\right),\qquad \sigma_\theta=\frac{E^+}{1-\nu^-\nu^+}\left(\frac{u_1}{r}+\nu^-\frac{du_1}{dr}\right) \tag{1.5}$$

для второй части ($\rho\leqslant r\leqslant b$)

$$\sigma_r=\frac{E^+}{1-\nu_+^2}\left(\frac{du_2}{dr}+\nu^+\frac{u_2}{r}\right),\qquad \sigma_\theta=\frac{E^+}{1-\nu_+^2}\left(\frac{u_2}{r}+\nu^+\frac{du_2}{dr}\right) \tag{1.6}$$

Отсюда очевидно, что для решения поставленной задачи необходимо рассмотреть каждую часть кольца в отдельности.

Для первой части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (1.5) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p_2, \quad \text{при } r = \rho \quad \sigma_r = 0 \tag{1.7}$$

Для второй части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (1.6) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = \rho \quad \sigma_r = 0, \qquad \text{при } r = b \quad \sigma_r = p_1 \tag{1.8}$$

Следует учесть также, что радиальные перемещения для первой (u_1) и второй (u_2) частей на границе раздела ($r = \rho$) равны между собой:

$$\text{при } r = \rho \quad u_1 = u_2 \tag{1.9}$$

Решим задачу для первой части ($a \leqslant r < \rho$) кольца. Подставляя значения напряжений σ_r и σ_θ (1.5) в уравнение равновесия (1.1), для определения перемещения u_1 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$r^2 \frac{d^2 u_1}{dr^2} + r \frac{du_1}{dr} - \frac{\nu^+}{\nu^-} u_1 = 0 \tag{1.10}$$

Решение этого уравнения будет

$$u_1 = C_1 r^{\alpha_1} + C_2 r^{-\alpha_1} \tag{1.11}$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{\nu^+}{\nu^-}} \tag{1.12}$$

C_1, C_2 — постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий (1.7).

После удовлетворения граничным условиям (1.7), с учетом (1.5), для постоянных интегрирования C_1 и C_2 получим

$$C_1 = \frac{p_2 (1 - \nu^- \nu^+) a^{\alpha_1 + 1}}{E^- (\alpha_1 + \nu^+)(\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})}, \qquad C_2 = \frac{p_2 (1 - \nu^- \nu^+) a^{\alpha_1 + 1} \rho^{2\alpha_1}}{E^- (\alpha_1 - \nu^+)(\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})} \tag{1.13}$$

Подставляя значения C_1 и C_2 (1.13) в (1.11) и (1.5), получим следующие выражения для перемещения u_1 и напряжений σ_r, σ_θ:

$$u_1 = \frac{p_2 a^{\alpha_1 + 1} [\rho^{2\alpha_1} (\alpha_1 + \nu^+) + r^{2\alpha_1} (\alpha_1 - \nu^+)]}{E^+ r^{\alpha_1} (\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})} \tag{1.14}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_2 a^{\alpha_1 + 1} (\rho^{2\alpha_1} - r^{2\alpha_1})}{r^{\alpha_1 + 1} (\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_2 \alpha_1 a^{\alpha_1 + 1} (\rho^{2\alpha_1} + r^{2\alpha_1})}{r^{\alpha_1 + 1} (\rho^{2\alpha_1} - a^{2\alpha_1})} \tag{1.15}$$

Ход решения задачи для второй части ($\rho \leqslant r \leqslant b$) кольца такой же, что и для первой части.

Поступая аналогичным образом, для определения перемещения u_2 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$r^2\frac{d^2u_2}{dr^2}+r\frac{du_2}{dr}-u_2=0 \tag{1.16}$$

Решение этого уравнения будет

$$u_2=C_3r+C_4r^{-1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.8) и определяя постоянные C_3 и C_4, для перемещения u_2 и напряжений σ_r, σ_θ окончательно получим

$$u_2=\frac{p_1b^2[\rho^2+r^2-\nu^+(r^2-\rho^2)]}{E^+r(b^2-\rho^2)} \tag{1.17}$$

$$\sigma_r=\frac{p_1b^2(r^2-\rho^2)}{r^2(b^2-\rho^2)},\qquad \sigma_\theta=\frac{p_1b^2(r^2+\rho^2)}{r^2(b^2-\rho^2)} \tag{1.18}$$

В полученные здесь выражения для расчетных величин входит неизвестная пока величина ρ, которая определяется из условия неразрывности перемещения (1.9).

Удовлетворяя условию (1.9), для определения ρ получим следующее трансцендентное уравнение:

$$s_1^{2\alpha_1}+k_1(s_1^{\alpha_1+1}-s_1^{\alpha_1-1})-m_1=0 \tag{1.19}$$

где

$$s_1=\frac{\rho}{b},\qquad m_1=\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha_1},\qquad k_1=\frac{p_2}{p_1}\alpha_1\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha_1+1} \tag{1.20}$$

Нетрудно показать, что уравнение (1.19) в промежутке $\frac{a}{b}<s_1<1$ имеет только один действительный корень. Этот корень, при конкретных числовых значениях параметров, входящих в уравнение (1.19), можно определить известными методами приближенных вычислений.

Отметим, что все расчетные величины непрерывны в каждой части кольца. Нетрудно показать, что они остаются непрерывными также на границе раздела этих частей.

§ 2. Плоская деформация полого цилиндра

Рассмотрим ту же задачу для бесконечно длинного полого цилиндра, изготовленного из разномодульного материала.

В этом случае имеем $\varepsilon_z=0$, откуда для напряжения σ_z получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}&\sigma_z=\nu^+(\sigma_r+\sigma_\theta)\quad \text{при } \sigma_z>0\\&\sigma_z=\nu^-(\sigma_r+\sigma_\theta)\quad \text{при } \sigma_z<0\end{aligned} \tag{2.1}$$

Уравнение равновесия элемента кольца (1.1) и геометрические соотношения (1.2) остаются справедливыми и для рассматриваемой задачи.

Очевидно, что во всех точках кольца $\sigma_\theta > 0$, а σ_r имеет разные знаки на внутренней ($r = a$) и внешней ($r = b$) окружностях. Поэтому на некоторой, пока неизвестной, окружности ($r = \rho_2$) σ_r обращается в нуль.

Из (2.1) замечаем, что знак напряжения σ_z совпадает со знаком выражения $\sigma_r + \sigma_\theta$. На внешней окружности ($r = b$) $\sigma_r > 0$, $\sigma_\theta > 0$ и поэтому $\sigma_z > 0$.

На внутренней же окружности возможны случаи, когда $\sigma_z \geqslant 0$ или $\sigma_z < 0$. Эти случаи следует рассмотреть в отдельности.

Если при $r = a$ $\sigma_z \geqslant 0$, то естественно ожидать, что для всей области σ_z не меняет своего знака. В этом случае решение рассматриваемой задачи принципиально не будет отличаться от решения соответствующей задачи для цилиндра малой длины (§ 1), рассмотренной в предыдущем пункте.

Если при $r = a$ $\sigma_z < 0$, значит в этом случае σ_z меняет свой знак и на некоторой, пока неизвестной, окружности $r = \rho_1$ σ_z обращается в нуль.

Так как в последнем случае меняют знаки вдоль радиуса и σ_r (при $r = \rho_2$) и σ_z (при $r = \rho_1$), то в этом случае решение задачи существенно будет отличаться от предыдущего случая.

Ниже приводятся решения рассматриваемой задачи для каждого из указанных случаев. Причем, в ходе решения получено необходимое и достаточное условие, при котором может иметь место тот или другой случай.

А. Рассмотрим случай, когда во всей области $\sigma_z \geqslant 0$. В этом случае кольцо разделится окружностью $r = \rho_2$ на две части.

Первая часть ($a \leqslant r < \rho_2$) является областью второго рода, так как для всех точек этой области $\sigma_z \geqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r < 0$.

Вторая часть ($\rho_2 \leqslant r \leqslant b$) является областью первого рода, так как для нее $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$, $\sigma_r \geqslant 0$.

Закон упругости для первой части ($a \leqslant r < \rho_2$) будет

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^-}[\sigma_r - \nu^-(\sigma_\theta + \sigma_z)], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+}[\sigma_\theta - \nu^+(\sigma_r + \sigma_z)]$$

Отсюда, с учетом (2.1) и (1.2), для напряжений σ_r и σ_θ получим

$$\sigma_r = \frac{E^-(1-\nu^+)}{\gamma_1}\frac{du_1}{dr} + \frac{E^+\nu^-}{\gamma_1}\frac{u_1}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E^-\nu^+}{\gamma_1}\frac{du_1}{dr} + \frac{E^+(1-\nu^-\nu^+)}{\gamma_1(1+\nu^+)}\frac{u_1}{r} \tag{2.2}$$

где

$$\gamma_1 = 1 - \nu^+ - 2\nu^-\nu^+ \tag{2.3}$$

Для второй части кольца ($\rho_2 \leqslant r \leqslant b$) имеем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^+}[\sigma_r - \nu^+(\sigma_\theta + \sigma_z)], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+}[\sigma_\theta - \nu^+(\sigma_z + \sigma_r)]$$

откуда аналогичным образом получаем

$$\sigma_r = \frac{E^+(1-\nu^+)}{\gamma_2}\frac{du_2}{dr} + \frac{E^+\nu^+}{\gamma_2}\frac{u_2}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E^+(1-\nu^+)}{\gamma_2}\frac{u_2}{r} + \frac{E^+\nu^+}{\gamma_2}\frac{du_2}{dr} \tag{2.4}$$

где

$$\gamma_2 = 1 - \nu^+ - 2\nu_+^2 \tag{2.5}$$

Как и при решении для цилиндра малой длины (§ 1), мы должны рассмотреть каждую часть кольца в отдельности.

Для первой части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.2) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p_2, \text{ при } r = \rho_2 \ \sigma_r = 0 \tag{2.6}$$

Для второй части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.4) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_r = 0, \text{ при } r = b \quad \sigma_r = p_1 \tag{2.7}$$

Условие неразрывности перемещения u на границе раздела двух частей кольца будет

$$\text{при } r = \rho_2 \quad u_1 = u_2 \tag{2.8}$$

Подставляя значения напряжений σ_r и σ_θ (2.2) в уравнение равновесия (1.1), получим следующее дифференциальное уравнение для определения перемещения u_1:

$$r^2\frac{d^2u_1}{dr^2} + r\frac{du_1}{dr} - \frac{\nu^+(1-\nu^-\nu^+)}{\nu^-(1-\nu_+^2)}u_1 = 0$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$u_1 = C_1 r^{\alpha_2} + C_2 r^{-\alpha_2}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\nu^+(1-\nu^-\nu^+)}{\nu^-(1-\nu_+^2)}} \tag{2.9}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.6) с учетом соотношений (2.2), получим следующие выражения для постоянных интегрирования C_1 и C_2:

$$C_1 = \frac{p_2\gamma_1 a^{\alpha_2+1}}{E^-(\rho_2^{2\alpha_2} - a^{2\alpha_2})[\alpha_2(1-\nu^+) - \nu^+]}$$

$$C_2 = \frac{p_2\gamma_1 a^{\alpha_2+1}\rho_2^{2\alpha_2}}{E^-(\rho_2^{2\alpha_2} - a^{2\alpha_2})[\alpha_2(1-\nu^+) - \nu^+]} \tag{2.10}$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в (2.9) и (2.2), для перемещения u_1, напряжений σ_r и σ_θ получим следующие выражения:

$$u_1 = \frac{p_2(1+\nu^+)a^{\alpha_2+1}\{\rho_2^{2\alpha_2}[\alpha_2(1-\nu^+)+\nu^+] + r^{2\alpha_2}[\alpha_2(1-\nu^+)-\nu^+]\}}{E^+ r^{\alpha_2}(\rho_2^{2\alpha_2} - a^{2\alpha_2})}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_2 a^{\alpha_2+1}(\rho_2^{2\alpha_2} - r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(\rho_2^{2\alpha_2} - a^{2\alpha_2})}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_2 \alpha_2 a^{\alpha_2+1}(\rho_2^{2\alpha_2} + r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(\rho_2^{2\alpha_2} - a^{2\alpha_2})}$$

$$\sigma_z = \frac{p_2 \nu^- a^{\alpha_2+1}[\rho_2^{2\alpha_2}(\alpha_2 - 1) + r^{2\alpha_2}(\alpha_2 + 1)]}{r^{\alpha_2+1}(\rho_2^{2\alpha_2} - a^{2\alpha_2})} \tag{2.11}$$

Рассматривая выражение для σ_z, нетрудно заметить, что для сохранения знака σ_z достаточно выполнения следующего неравенства:

$$\alpha_2 \geqslant 1 \quad \text{или} \quad \nu^+ \geqslant \nu^- \tag{2.12}$$

Решим задачу для второй части $\rho_2 \leqslant r \leqslant b$ кольца. Для этой части дифференциальное уравнение относительно перемещения u_2 получается в виде

$$r^2 \frac{d^2 u_2}{dr^2} + r\frac{du_2}{dr} - u_2 = 0$$

Решая это уравнение при граничных условиях (2.7), получим следующие выражения для перемещения u_2 и напряжений σ_r, σ_θ, σ_z:

$$u_2 = \frac{p_1(1+\nu^+) b^2 [(1-2\nu^+) r^2 + \rho_2^2]}{E^+ (b^2 - r^2) r}, \qquad \sigma_r = \frac{p_1 b^2 (r^2 - \rho_2^2)}{r^2 (b^2 - \rho_2^2)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 b^2 (r^2 + \rho_2^2)}{r^2 (b^2 - \rho_2^2)}, \qquad \sigma_z = \frac{2 p_1 \nu^+ b^2}{b^2 - \rho_2^2} \tag{2.13}$$

Неизвестный радиус ρ_2 определяется из условия (2.8). Удовлетворяя этому условию, для определения ρ_2 получим следующее трансцендентное уравнение:

$$s_2^{2\alpha_2} + k_2(s_2^{\alpha_2+1} - s_2^{\alpha_2-1}) - m_2 = 0 \tag{2.14}$$

где

$$s_2 = \frac{\rho_2}{b}, \quad m_2 = \left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha_2}, \quad k_2 = \frac{\alpha_2 p_2}{p_1}\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha_2+1} \tag{2.15}$$

Аналогично уравнению (1.19), уравнение (2.14) в промежутке $\frac{a}{b} < s_2 < 1$ имеет только один действительный корень.

Таким образом, задача решена. Остается только указать необходимое и достаточное условие сохранения знака σ_z для всей области $(a \leqslant r \leqslant b)$. Из выражения σ_z (2.11) следует, что σ_z будет неотрицательным, если выполняется неравенство

$$\rho_2^{2\alpha_2}(\alpha_2 - 1) + a^{2\alpha_2}(\alpha_2 + 1) \geqslant 0$$

Или пользуясь принятыми обозначениями

$$s_2^{2\alpha_2} \leqslant \left(\frac{1+\alpha_2}{1-\alpha_2}\right) m \tag{2.16}$$

Отметим, что при выполнении условия (2.12) неравенство (2.16) удовлетворяется независимо от значений остальных параметров.

Однако, неравенство (2.16) имеет более общий характер и представляет собой необходимое и достаточное условие сохранения знака напряжения σ_z во всей области.

Сравнивая полученные здесь результаты с соответствующими результатами, полученными при решении задачи для цилиндра малой длины (§ 1), нетрудно показать, что они могут быть получены из последних при замене постоянных $E^{\pm}$ и $\nu^{\pm}$ на $E_1^{\pm}$ и $\nu_1^{\pm}$, где

$$E_1^+ = \frac{E^+}{1-\nu_+^2}, \quad E_1^- = \frac{E^-}{1-\nu^-\nu^+}, \quad \nu_1^+ = \frac{\nu^+}{1-\nu^+}, \quad \nu_1^- = \frac{\nu^-(1+\nu^+)}{1-\nu^-\nu^+} \tag{2.17}$$

В формулах (2.17) преобладает ν^+ по сравнению с ν^-. Это объясняется тем, что во всей области напряжение σ_z положительно.

В случае же, когда во всей области σ_z отрицательно, в формулах (2.17) индексы (+) и (—) поменяются местами. Тогда соответствующие (2.17) формулы перехода будут

$$E_2^+ = \frac{E^+}{1-\nu^-\nu^+}, \quad E_2^- = \frac{E^-}{1-\nu_-^2}, \quad \nu_2^+ = \frac{\nu^+(1-\nu^-)}{1-\nu^-\nu^+}, \quad \nu_2^- = \frac{\nu^-}{1-\nu^-} \tag{2.18}$$

Интересно отметить, что между введенными коэффициентами тоже имеет место соотношение $E_i^+/E_i^- = \nu_i^+/\nu_i^-$.

Б. Рассмотрим теперь случай, когда напряжение σ_z меняет свой знак, обращаясь в нуль на некоторой окружности $r=\rho_1$.

В этом случае кольцо разделится окружностями $r=\rho_1$ и $r=\rho_2$ на три части.

Первая часть $(a \leqslant r \leqslant \rho_1)$ является областью второго рода, так как для этой области $\sigma_r < 0$, $\sigma_z \leqslant 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Вторая часть $(\rho_1 < r < \rho_2)$ также является областью второго рода, причем для этой области $\sigma_r < 0$, $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Третья часть $(\rho_2 \leqslant r \leqslant b)$ является областью первого рода, так как для всех точек этой области $\sigma_r \geqslant 0$, $\sigma_z > 0$, $\sigma_\theta > 0$.

Напишем закон упругости для каждой части в отдельности: для первой части $(a \leqslant r \leqslant \rho)$ имеем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^-}[\sigma_r - \nu^-(\sigma_\theta + \sigma_z)], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+}[\sigma_\theta - \nu^+(\sigma_r + \sigma_z)]$$

отсюда, учитывая соотношения (2.1) и (1.2), для напряжений σ_r и σ_θ получим

$$\sigma_r = \frac{E^-(1-\nu^-\nu^+)}{\gamma_3(1+\nu^-)}\frac{du_1}{dr} + \frac{E^+\nu^-}{\gamma_3}\frac{u_1}{r}, \quad \sigma_\theta = \frac{E^-\nu^+}{\gamma_3}\frac{du_1}{dr} + \frac{E^+(1-\nu^-)}{\gamma_3}\frac{u_1}{r} \tag{2.19}$$

для второй части ($\rho_1 < r < \rho_2$) имеем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^-}[\sigma_r - \nu^-(\sigma_\theta + \sigma_z)], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+}[\sigma_\theta - \nu^+(\sigma_r + \sigma_z)]$$

откуда, аналогичным образом, получим

$$\sigma_r = \frac{E^-(1-\nu^+)}{\gamma_1}\frac{du_2}{dr} + \frac{E^+\nu^-}{\gamma_1}\frac{u_2}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E^-\nu^-}{\gamma_1}\frac{du_2}{dr} + \frac{E^+(1-\nu^-\nu^+)}{\gamma_1(1+\nu^+)}\frac{u_2}{r} \tag{2.20}$$

для третьей части ($\rho_2 \leqslant r \leqslant b$) имеем

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E^+}[\sigma_r - \nu^+(\sigma_\theta + \sigma_z)], \qquad \varepsilon_\theta = \frac{1}{E^+}[\sigma_\theta - \nu^+(\sigma_r + \sigma_z)]$$

откуда

$$\sigma_r = \frac{E^+(1-\nu^+)}{\gamma_2}\frac{du_3}{dr} + \frac{E^+\nu^+}{\gamma_2}\frac{u_3}{r}, \qquad \sigma_\theta = \frac{E^+\nu^+}{\gamma_2}\frac{du_3}{dr} + \frac{E^+(1-\nu^+)}{\gamma_2}\frac{u_3}{r} \tag{2.21}$$

где

$$\gamma_1 = 1 - \nu^+ - 2\nu^-\nu^+, \quad \gamma_2 = 1 - \nu^+ - 2\nu_+^2, \quad \gamma_3 = 1 - \nu^- - 2\nu^-\nu^+ \tag{2.22}$$

Каждую часть кольца рассмотрим в отдельности. Для первой части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.19) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = a \quad \sigma_r = -p_2, \ \text{при } r = \rho_1 \quad \sigma_r + \sigma_\theta = 0 \tag{2.23}$$

Для второй части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.20) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_r = 0, \quad \text{при } r = \rho_1 \quad \sigma_r\big|_{r=\rho_1-0} = \sigma_r\big|_{r=\rho_1+0} \tag{2.24}$$

Для третьей части имеем уравнение равновесия (1.1), закон упругости (2.21) и следующие граничные условия:

$$\text{при } r = \rho_2 \quad \sigma_r = 0, \ \text{при } r = b \quad \sigma_r = p_1 \tag{2.25}$$

Условия неразрывности радиального перемещения на границах раздела этих частей будут

$$\text{при } r = \rho_1 \quad u_1 = u_2, \quad \text{при } r = \rho_2 \quad u_2 = u_3 \tag{2.26}$$

Решим задачу для первой части ($a \leqslant r \leqslant \rho_1$).

Для определения перемещения u_1 получим следующее дифференциальное уравнение:

$$r^2\frac{d^2u_1}{dr^2} + r\frac{du_1}{dr} - \frac{\nu^+(1-\nu_-^2)}{\nu^-(1-\nu^-\nu^+)}u_1 = 0$$

Общий интеграл этого уравнения будет

$$u_1 = C_1 r^{\alpha_0} + C_2 r^{-\alpha_0}, \qquad \alpha_0 = \sqrt{\frac{\nu^+(1-\nu_-^2)}{\nu^-(1-\nu^-\nu^+)}} \tag{2.27}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.23), определим постоянные интегрирования C_1 и C_2

$$C_1 = \frac{p_1 \alpha_3 (1-\alpha_3)\gamma_3 a^{\alpha_3+1}}{E^+ (1-\nu^- + \alpha_3 \nu^-)\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$C_2 = \frac{p_2 \alpha_3 (1-\alpha_3)\gamma_3 a^{\alpha_3+1} \rho_1^{2\alpha_3}}{E^+ (1-\nu^- - \alpha_3 \nu^-)\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]}$$

Подставляя значения этих постоянных в (2.27), (2.19) и (2.1), получим следующие выражения для перемещения u_1, напряжений σ_r, σ_θ и σ_z:

$$u_1 = \frac{p_2 \alpha_3 a^{\alpha_3+1}\left[(\nu_1^- + \alpha_3 \nu_2^-)\rho_1^{2\alpha_3} + (\nu_1^- - \alpha_3 \nu_2^-)\, r^{2\alpha_3}\right]}{\nu^- E_2^+ r^{\alpha_3}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_2 a^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, r^{2\alpha_3}\right]}{r^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_2 \alpha_3 a^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} + (1-\alpha_3)\, r^{2\alpha_3}\right]}{r^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$\sigma_z = -\frac{p_2 (\nu^- - \nu^+)\, a^{\alpha_3+1}(\rho_1^{2\alpha_3} - r^{2\alpha_3})}{(1-\nu^-\nu^+)\, r^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]} \tag{2.28}$$

Для определения перемещения u_2 получим дифференциальное уравнение

$$r^2 \frac{d^2 u_2}{dr^2} + r\frac{du_2}{dr} - \frac{\nu^+ (1-\nu^-\nu^+)}{\nu^- (1-\nu_+^2)}\, u_2 = 0$$

решением которого будет

$$u_2 = C_3 r^{\alpha_2} + C_4 r^{-\alpha_2}, \qquad \alpha_2 = \sqrt{\frac{\nu^+ (1-\nu^-\nu^+)}{\nu^- (1-\nu_+^2)}} \tag{2.29}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.20), получим следующие выражения для перемещения u_2 и напряжений σ_r, σ_θ и σ_z:

$$u_2 = \frac{2p_2 \alpha_3 a^{\alpha_3+1} \rho_1^{\alpha_3+\alpha_2}\left[(\alpha_2 + \nu_1^+)\rho_2^{2\alpha_2} + (\alpha_2 - \nu_1^+)\, r^{2\alpha_2}\right]}{E_1^+ r^{\alpha_2} (\rho_2^{2\alpha_2} - \rho_1^{2\alpha_2})\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$\sigma_r = -\frac{2p_2 \alpha_3 a^{\alpha_3+1} \rho_1^{\alpha_3+\alpha_2}(\rho_2^{2\alpha_2} - r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1} (\rho_2^{2\alpha_2} - \rho_1^{2\alpha_2})\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2p_2 \alpha_2 \alpha_3 a^{\alpha_3+1} \rho_1^{\alpha_3+\alpha_2}(\rho_2^{2\alpha_2} + r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1} (\rho_2^{2\alpha_2} - \rho_1^{2\alpha_2})\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$\sigma_z = \frac{2p_2 \nu^+ \alpha_3 a^{\alpha_3+1} \rho_1^{\alpha_3+\alpha_2}\left[(\alpha_2 - 1)\rho_2^{2\alpha_2} + (\alpha_2 + 1)\, r^{2\alpha_2}\right]}{r^{\alpha_2+1} (\rho_2^{2\alpha_2} - \rho_1^{2\alpha_2})\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3)\, a^{2\alpha_3}\right]} \tag{2.30}$$

Дифференциальное уравнение относительно перемещения u_3 для третьей части будет

$$r^2\frac{d^2u_3}{dr^2}+r\frac{du_3}{dr}-u_3=0$$

Решение этого уравнения имеет вид

$$u_3=C_5r+C_6r^{-1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (2.20), получим следующие выражения для u_3, σ_r, σ_θ и σ_z:

$$u_3=\frac{p_1b^2(1+\nu^+)}{E^+(b^2-\rho_2^2)r}\left[(1-2\nu^+)r^2+\rho_2^2\right]$$

$$\sigma_r=\frac{p_1b^2(r^2-\rho_2^2)}{r^2(b^2-\rho_2^2)},\qquad \sigma_\theta=\frac{p_1b^2(r^2+\rho_2^2)}{r^2(b^2-\rho_2^2)}$$

$$\sigma_z=\frac{2p_1\nu^+b^2}{b^2-\rho_2^2}\tag{2.31}$$

В полученные выражения для расчетных величин (u, σ_z, σ_r и σ_θ) входят пока неизвестные величины ρ_1 и ρ_2, которые определяются из условий неразрывности перемещения на границах раздела отдельных частей кольца (2.26).

Из первого условия (2.26) получим следующее уравнение:

$$\beta^{2\alpha_2}=\frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_2},\qquad \beta=\frac{\rho_1}{\rho_2}\tag{2.32}$$

Удовлетворяя второму условию (2.26), получим следующее трансцендентное уравнение, определяющее величину ρ_2:

$$s_3^{2\alpha_3}+k_3\left(s_3^{\alpha_3+1}-s_3^{\alpha_3-1}\right)-m_3=0\tag{2.33}$$

где

$$s_3=\frac{\rho_2}{b},\quad k_3=\frac{p_2\alpha_3\sqrt{1-\alpha_3^2}\left(\frac{a}{b}\right)^{\alpha_3+1}}{p_1(1+\alpha_3)\beta^{\alpha_3}},\quad m_3=\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha_3}\beta^{-2\alpha_3}\left(\frac{1-\alpha_3}{1+\alpha_3}\right)\tag{2.34}$$

Уравнение (2.33), аналогично уравнениям (1.19) и (2.14), в промежутке $\frac{\rho_1}{b}<s_3<1$ имеет только один действительный корень.

При конкретных числовых данных, решая трансцендентное уравнение (2.33), с учетом (2.32), определим s_3 и ρ_2, ρ_1.

Чтобы напряжение σ_z меняло свой знак в промежутке $\rho_2<r<a$, необходимо и достаточно, чтобы имело место неравенство $\frac{a}{\rho_2}<\frac{\rho_1}{\rho_2}$, или, учитывая уравнение (2.32)

$$s_3^{2\alpha_3} > \left(\frac{1+\alpha_3}{1-\alpha_3}\right)\left(\frac{a}{b}\right)^{2\alpha_3} \tag{2.35}$$

Сравнивая условия (2.35) и (2.16), замечаем, что при данных числовых значениях может иметь место или (2.16) или (2.35). Если выполняется (2.16), тогда имеем случай А, если же выполняется условие (2.35), имеем случай Б.

Учитывая уравнение (2.32) и (2.33), можно упростить выражения для расчетных величин.

После упрощения, для каждой части кольца окончательно получим:

для первой части ($a < r < \rho_1$)

$$u_1 = \frac{p_2 \alpha_3 a^{\alpha_3+1}\left[(\nu_1^- + \alpha_3 \nu_2^-)\rho_1^{2\alpha_3} + (\nu_1^- - \alpha_3 \nu_2^-) r^{2\alpha_3}\right]}{\nu^- E_2^- r^{\alpha_3}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3) a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_2 a^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3) r^{2\alpha_3}\right]}{r^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3) a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_2 \alpha_3 a^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} + (1-\alpha_3) r^{2\alpha_3}\right]}{r^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3) a^{2\alpha_3}\right]}$$

$$\sigma_z = -\frac{p_2 (\nu^- - \nu^+) a^{\alpha_3+1}(\rho_1^{2\alpha_3} - r^{2\alpha_3})}{(1-\nu^-\nu^+) r^{\alpha_3+1}\left[(1+\alpha_3)\rho_1^{2\alpha_3} - (1-\alpha_3) a^{2\alpha_3}\right]}$$

для второй части ($\rho_1 < r < \rho_2$)

$$u_2 = \frac{p_1 b^2\left[(\alpha_2 + \nu_1^+)\rho_1^{2\alpha_2} + (\alpha_2 - \nu_1^+) r^{2\alpha_2}\right]}{E_1^+ r^{\alpha_2} \rho_1^{\alpha_2-1}(b^2 - \rho_1^2)}$$

$$\sigma_r = -\frac{p_1 b^2 \rho_1^{1-\alpha_2}(\rho_1^{2\alpha_2} - r^{2\alpha_2})}{\alpha_2 (b^2 - \rho_1^2) r^{\alpha_2+1}}$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_1 b^2 \rho_1^{1-\alpha_2}(\rho_1^{2\alpha_2} + r^{2\alpha_2})}{r^{\alpha_2+1}(b^2 - \rho_1^2)}$$

$$\sigma_z = \frac{p_1 \nu^+ b^2 \rho_1^{1-\alpha_2}\left[(\alpha_2 - 1)\rho_1^{2\alpha_2} + (\alpha_2 + 1) r^{2\alpha_2}\right]}{\alpha_2 r^{\alpha_2+1}(b^2 - \rho_1^2)}$$

для третьей части ($\rho_1 < r < b$)

$$u_3 = \frac{p_1 b^2\left[(1+\nu_1^+)\rho_2^2 + (1-\nu_1^+) r^2\right]}{E_1^+ r (b^2 - \rho_2^2)}$$

$$\sigma_r = \frac{p_1 b^2 (r^2 - \rho_2^2)}{r^2 (b^2 - \rho_2^2)}, \qquad \sigma_\theta = \frac{p_1 b^2 (r^2 + \rho_2^2)}{r^2 (b^2 - \rho_2^2)}$$

$$\sigma_z = \frac{2 p_1 \nu^+ b^2}{b^2 - \rho_2^2}$$

Полученными расчетными формулами, при конкретных числовых данных, можно вычислить напряжения, деформации и перемещения.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 25 VI 1968

Ջ. Զ. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ՏԱՐԱՄՈԴՈՒԼ ՆՅՈՒԹԻՑ ՊԱՏՐԱՍՏՎԱԾ ՍՆԱՄԵՋ ԳԼԱՆԻ ՀԱՇՎԱՐԿԸ

Ամփոփում

Հոդվածում դիտարկված է տարամոդուլ նյութից պատրաստված սնամեջ գլանի հարթ խնդիրը, ընդհանրացված հարթ լարվածային վիճակի և հարթ դեֆորմացիայի դեպքերում։

Գլանի վրա գործում են ներքին հավասարաչափ ճնշում և արտաքին հավասարաչափ ձգում։

Ստացված են բանաձևեր լարումների և տեղափոխումների համար։

Աշխատանքի մեջ ցույց է տրված, որ ի տարբերություն կլասիկ տեսության, տարամոդուլ նյութի համար հարթ դեֆորմացիայի խնդիրը որոշ դեպքերում կարող է էապես տարբերվել համապատասխան հարթ լարվածային վիճակի խնդրից։

J. Z. MKRTCHIAN

CALCULATION OF THE CYLINDER MADE OF DIFFERENT MODUL MATERIAL

Summary

The plane-stress and plane-strain problems for the hollow cylinder made of different modul material is considered.

The cylinder is under the action of uniformly distributed internal pressure and external tension.

Formulas for calculation of the stresses and strains are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А., Хачатрян А. А.* Основные уравнения теории упругости для материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию. АН СССР, Инженерный журнал, МТТ, 1966, 2.
2. *Амбарцумян С. А.* Уравнения плоской задачи разномодульной теории упругости. Изв. АН АрмССР, Механика, № 2, 1966.
3. *Лейбензон Л. С.* Курс теории упругости. Гостехиздат, М.-Л., 1947.