ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

А. Б. БАГДАСАРЯН

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ДЕЙСТВИИ ВЗРЫВА СОСРЕДОТОЧЕННОГО ЗАРЯДА В ХРУПКОЙ ТВЕРДОЙ СРЕДЕ

Пусть в пространстве, заполненном хрупкой, трещиноватой горной породой, имеется сферическая полость радиуса r_0. Среда находится в покое и сжата гидростатическим давлением P_h. Полость заполнена зарядом BB, превращающимся в газ с начальным давлением P_0. Под воздействием этого давления порода вблизи полости будет вовлечена в движение, в результате которого при достаточно больших P_0 часть породы будет разрушена, а на больших расстояниях от полости распространяются упругие волны.

Вопросы математической теории деформации и разрушения горных пород изложены в работе [1]. Здесь рассматривается специальный случай, когда прочностная постоянная неразрушенной породы (τ_*) и некоторая постоянная из условия пластичности (τ_{*1}) [1] для горной породы совпадают, критическое растягивающее напряжение среды $\sigma_* = 0$.

В этом случае для некоторых интервалов времени распространения взрывных волн удается решение строить аналитически.

Если учесть, что для горных пород σ_* и $\tau_* - \tau_{*1} \ll \rho c_0^2$ и τ_*, а также то, что горные породы имеют естественную трещиноватость, становится ясным важность полученного аналитического решения для этого случая.

Рассмотрим каждую из областей породы, вовлеченной в движение, в которых порода либо разрушена по разным механизмам, либо не разрушена [1].

Неразрушенная область. Считается, что неразрушенный материал описывается линейно-упругой моделью. Тогда решение основных уравнений для этой области в случае центральной симметрии дается формулами:

$$\sigma_r = -\rho c_0^2 \left\{ \frac{f''(\xi)}{x} + \frac{2(1-2\nu)}{1-\nu} \left[\frac{f'(\xi)}{x^2} + \frac{f(\xi)}{x^3} \right] \right\} - P_h$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = -\rho c_0^2 \left\{ \frac{\nu}{1-\nu} \frac{f''(\xi)}{x} - \frac{1-2\nu}{1-\nu} \left[\frac{f'(\xi)}{x^2} + \frac{f(\xi)}{x^3} \right] \right\} - P_h \tag{1}$$

$$v = c_0 \left[\frac{f''(\xi)}{x} + \frac{f'(\xi)}{x^2} \right], \qquad u = r_0 \left[\frac{f'(\xi)}{x} + \frac{f(\xi)}{x^2} \right], \qquad \xi = \tau - x$$

где $x = r/r_0$, $\tau = c_0 t/r_0$ — безразмерные координаты, c_0 — скорость звука в неразрушенном материале, t — время, r — лагранжева координата, ρ — начальная плотность, σ_r, σ_θ, σ_φ — напряжения на координатных площадках, v — скорость частиц в радиальном направлении, u — радиальное смещение, σ — коэффициент Пуассона, $f(\zeta)$ — произвольная функция.

Область разрушения путем отрыва. Считается, что материал разбит на упругие конические стержни, которые выдерживают только радиальное напряжение, а кольцевое напряжение во всей области равно нулю.

$$\sigma_r = -\rho c_0^2 \lambda^2 \left[\frac{\dot f_1(\xi) - \dot f_2(\eta)}{x} + \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{x^2} \right], \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = 0$$

$$v = \frac{c_0 \lambda}{x} [\dot f_1(\xi) + \dot f_2(\eta)], \quad u = \frac{r_0}{x} \left[f_1(\xi) + f_2(\eta) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h x^2 \right] \tag{2}$$

$$p_h = \frac{P_h}{\rho c_0^2}, \quad \xi = \lambda\tau - x, \quad \eta = \lambda\tau + x$$

$$\lambda = c_1/c_0 = \left[\frac{(1-2\sigma)(1+\sigma)}{1-\sigma} \right]^{1/2}, \quad c_1^2 \rho = E$$

где c_1 — скорость звука в материале, разрушенном трещинами отрыва, а $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ — произвольные функции, E — модуль Юнга.

Область разрушения путем скола. Считается, что материал, разбитый трещинами скола, описывается законом Гука для объемной деформации и условием пластичности $\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_{*1}$ [1]

$$\sigma_r = -\rho c_0^2 q^2 \frac{1}{x} [\dot F_1(\xi_1) + \dot F_2(\eta_1)] - 4\tau_{*1} \ln x + P_h$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \sigma_r + 2\tau_{*1}, \quad v = c_0 q \left[\frac{\ddot F_1(\xi_1) - \ddot F_2(\eta_1)}{x} + \frac{\dot F_1(\xi_1) + \dot F_2(\eta_1)}{x^2} \right] \tag{3}$$

$$u = r_0 \left[\frac{\dot F_1(\xi_1) - \dot F_2(\eta_1)}{x} + \frac{F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1)}{x^2} + \frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma} T_{*1} x \ln x \right]$$

$$T_{*1} = \frac{\tau_{*1}}{\rho c_0^2}, \quad \xi_1 = q\tau - x, \quad \eta_1 = q\tau + x$$

$$q = c_2/c_0 = \left[\frac{1+\sigma}{3(1-\sigma)} \right]^{1/2}, \quad c_2^2 \rho (1-2\sigma) = E$$

где c_2 — скорость звука в материале, разрушенном трещинами скола, а $F_1(\xi_1)$ и $F_2(\eta_1)$ — произвольные функции.

Если $P_0 \geqslant 2\tau_*$, то разрушение может произойти путем отрыва и путем скола, а если $P_0 < 2\tau_*$, то разрушение происходит только путем отрыва. Рассмотрим случай взрыва при больших давлениях $P_0 \geqslant 2\tau_*$.

Распространение взрывных волн в этом случае происходит следующим образом. Если выполняется условие

$$P_0 < P_h + \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}\tau_* \qquad (4)$$

то с начального момента взрыва до момента $\tau=\tau_1$, когда на каверне достигается условие

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_* \qquad (5)$$

будут распространяться упругие волны, определяющиеся (1), где $f(\zeta)$ будет определяться формулой

$$f(\zeta) = \frac{1-\sigma}{2(1-2\sigma)}(p_0-p_h)\left\{1-\sqrt{2(1-\sigma)}\exp\left[\frac{2\sigma-1}{1-\sigma}(\zeta+1)\right]\times\right.$$

$$\left.\times\sin\left[\frac{\sqrt{1-2\sigma}}{1-\sigma}(\zeta+1)+\arcsin\frac{1}{\sqrt{2(1-\sigma)}}\right]\right\}, \quad p_0=\frac{P_0}{\rho c_0^2} \qquad (6)$$

После момента $\tau=\tau_1$ из каверны в глубь среды распространяется сферический фронт разрушения путем скола $x=x_1(\tau)$, из которого в неразрушенную область будут излучаться упругие волны. Если не выполняется условие (4), то фронт разрушения трещинами скола будет распространяться непосредственно в начальный момент взрыва. В случае $\sigma > 1/3$ разрушение продолжится до тех пор, пока скачок радиальных напряжений на фронте $x=x_1(\tau)$ не обратится в нуль или кольцевое напряжение на фронте $x=x_1(\tau)$ со стороны неразрушенного материала не обратится в нуль. Если раньше σ_θ обратится в нуль, то разрушение путем скола останавливается и материал продолжает разрушаться путем отрыва $x=x_2(\tau)$. Фронт разрушения путем отрыва $x=x_2(\tau)$ будет распространяться то как сильный разрыв, то как слабый. Разрушение путем отрыва останавливается, когда фронт стремится к своему значению статического решения. Если же $\sigma<1/3$ (в этом случае скорость распространения малых возмущений в материале, разрушенном трещинами скола, меньше, чем в материале, разрушенном трещинами отрыва), то только разрушение путем скола продолжается опять до момента, когда σ_θ со стороны нерзарушенного материала обратится в нуль, или скачок радиальных напряжений на фронте $x=x_1(\tau)$ обратится в нуль. Если раньше обратится в нуль σ_θ, то фронт разрушения раздваивается, вперед пойдет фронт разрушения путем отрыва $x=x_2(\tau)$, который материал разрушит радиальными трещинами, а за ним—фронт разрушения трещинами скола $x=x_1(\tau)$, повторно разрушающий материал на мелкие блоки. Если в какой-то момент времени скачок радиальных напряжений обратится в нуль, то после этого момента разрушение путем скола останавливается и его нужно рассматривать как контактный разрыв. Неизвестные функции $f(\zeta)$, $f_1(\xi)$, $f_2(\eta)$, $F_1(\xi_1)$, $F_2(\eta_1)$, входящие в выражения (1)–(3), должны быть определены из граничных условий, которые формулируются на каверне и на фронтах разрушений $x=x_1(\tau)$, $x=x_2(\tau)$. Простейшим условием на каверне при достаточно больших τ_* (т. е.

при $u \ll 1$) является

$$\sigma_r\big|_{r=r_0} = -P_0 \tag{7}$$

а условия на фронтах состоят из обычных условий сильного разрыва и условия разрушения. Условия разрушения на фронте $x = x_1(\tau)$ со стороны неразрушенного материала суть

$$\sigma_r - \sigma_\theta = -2\tau_* \tag{8}$$

а на фронте $x = x_2(\tau)$ со стороны неразрушенного материала суть

$$\sigma_\theta = 0 \tag{9}$$

Радиальное напряжение впереди и за фронтом разрушения путем скола выражается формулами

$$\begin{aligned} \sigma_{r1} &= \rho c_0^2 q^2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{2u_1}{r}\right) - \frac{4}{3}\tau_* - P_h \\ \sigma_{r2} &= \rho c_0^2 q^2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{2u_2}{r}\right) - \frac{4}{3}\tau_{*1} - P_h \end{aligned} \tag{10}$$

где индексы 1 и 2 соответственно обозначают величины впереди фронта и за фронтом $x = x_1(\tau)$. Используя условие непрерывности смещения и теорему о количестве движения с учетом (10), получим

$$\left[c_2^2 - \left(\frac{dr_1}{dt}\right)^2\right]\left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r}\right) = \frac{4}{3\rho}(\tau_* - \tau_{*1}) \tag{11}$$

В случае $\tau_* = \tau_{*1}$ условие на фронте разрушения $x = x_1(\tau)$ (11) удовлетворяется, если

либо $$dr_1/dt = c_2 \tag{12}$$

либо $$\partial u_1/\partial r = \partial u_2/\partial r \tag{13}$$

Как показывают конкретные вычисления задачи в общем случае [2], в момент $\tau = \tau_1$ фронт разрушения путем скола, при $\tau_* \to \tau_{*1}$, распространяется с постоянной скоростью, т. е. удовлетворяется только условие (12).

Уравнения, описывающие разрушение и распространение взрывных волн в этой стадии ($\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$) с учетом (1), (3) и (12) и граничных условий (7), (8), сводятся к следующему:

$$\frac{\ddot{f}(\zeta)}{x_1(\tau)} + 3\left[\frac{\dot{f}(\zeta)}{x_1^2(\tau)} + \frac{f(\zeta)}{x_1^3(\tau)}\right] = \frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}T_*$$

$$\dot{F}_1(\xi_1) - \dot{F}_2(\eta_1) + \frac{F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1)}{x_1(\tau)} + \frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma}T_* x_1^2(\tau)\ln x_1(\tau) =$$

$$= \dot{f}(\zeta) + \frac{f(\zeta)}{x_1(\tau)}, \qquad x_1(\tau) = 1 + q(\tau - \tau_1) \tag{14}$$

$$\ddot F_1(\xi_1^0)+\ddot F_2(\eta_1^0)=\frac{1}{q^2}(p_0-p_k),\quad \zeta=\tau-x_1(\tau),\quad \xi_1=q\tau-x_1(\tau)$$

$$\eta_1=q\tau+x_1(\tau),\quad \xi_1^0=q\tau-1,\quad \eta_1^0=q\tau+1$$

Из первого и третьего уравнений системы (14) определяем при $\sigma<0.385$

$$\begin{gathered} f(\zeta)=A_{10}[x_1(\zeta)]^{\alpha_1}\sin\beta(\zeta)+A_{12}[x_1(\zeta)]^3 \\ x_1(\zeta)=a_0+a_1\zeta,\qquad \beta(\zeta)=\alpha_2\ln x_1(\zeta)+A_{11} \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\alpha_1=\frac{1}{2q}(4q-3),\quad \alpha_2=\frac{1}{2q}\sqrt{3-4q^2},\quad a_0=\frac{1-q\tau_1}{1-q}$$

$$a_1=q/(1-q),\quad A_{10}=|f_0-A_{12}|\left\{1-\left[\frac{\dot f_0-3a_1A_{12}}{a_1(f_0-A_{12})}-\alpha_1\right]^2\right\}^{1/2} \tag{16}$$

$$A_{11}=\arcsin\frac{f_0-A_{12}}{A_{10}},\qquad A_{12}=\frac{2}{3}\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}\,\frac{(1-q)^2}{1+q}\,T_*$$

а f_0 и $\dot f_0$ — значения функций $f(\zeta)$ и $\dot f(\zeta)$ из решения (6) при $\zeta=\tau_1-1$. Если не выполняется условие (4), то из начального условия $u(x,0)=0$ следует $f_0(-1)=\dot f_0(-1)=0$.

Учитывая, что можно определить не все функции в системе (14), а лишь их комбинации

$$\begin{gathered} \dot F_1(\xi_1)-\dot F_2(\eta_1)+F_1(\xi_1)+F_2(\eta_1),\quad \ddot F_1(\xi_1)+\ddot F_2(\eta_1) \\ \ddot F_1(\xi_1)-\ddot F_2(\eta_1)+\dot F_1(\xi_1)+\dot F_2(\eta_1) \end{gathered} \tag{17}$$

входящие в выражение (2), за начальные условия примем

$$\begin{gathered} F_1(\xi_0)=\dot F_1(\xi_0)=F_2(\eta_0)=0,\quad \dot F_2(\eta_0)=f(\zeta_0)+\dot f(\zeta_0) \\ \xi_0=q\tau_1-1,\quad \eta_0=q\tau_1+1 \end{gathered} \tag{18}$$

Так как $F_1(\xi_1)$ на линии $x=x_1(\tau)$ постоянная, то во втором уравнении системы (14) с учетом начальных условий (18) можно положить

$$F_1(\xi_1)=\dot F_1(\xi_1)=0,\ \text{при}\ \xi=\xi_0 \tag{19}$$

Из второго уравнения системы (14) с учетом (18) и (19) определяем

$$\begin{gathered} F_2(\eta_1)=[x_1(\eta_1)]^{\alpha_1}[B_{11}\sin\beta(\zeta)+B_{12}\cos\beta(\zeta)]+ \\ +B_{13}[x_1(\eta_1)]^3[1+\ln x_1(\eta_1)]+(B_{14}\eta_1+B_{15})\,x_1^2(\eta_1) \end{gathered} \tag{20}$$

$$x_1(\eta_1)=\frac{1}{2}(1-q\tau_1+\eta_1)$$

где

$$B_{11}=\frac{2q}{1-q}\,\frac{A_{10}}{(\alpha_1-2)^2+\alpha_2^2}\left[(\alpha_1-2)\,\alpha_1 a_1+\alpha_1\alpha_2 a_1+\alpha_1-2\right]$$

$$B_{12}=\frac{2q}{1-q}\,\frac{A_{10}}{(\alpha_1-2)^2+\alpha_2^2}\left[(\alpha_1-2)\,\alpha_1 a_1-\alpha_1\alpha_2 a_1-\alpha_2\right] \qquad (21)$$

$$B_{13}=-\frac{8(1-\sigma)}{1+\sigma}T_*, \qquad B_{14}=A_{12}\left[1+3\alpha_1 a_1^2 A_{10}\right]$$

а

$$B_{15}=\dot f_0+f_0-B_{11}\sin A_{11}-B_{12}\cos A_{11}-B_{13}-B_{14}\eta_0$$

— постоянная интегрирования, определяемая из соответствующего начального условия (18).

Функция $F_1(\xi^0)$ определяется из четвертого уравнения системы (14)

$$F_1(\xi^0)=\frac{1}{2q^2}(p_0-p_h)(\xi^0)^2+D_{11}\xi^0+D_{12}-\left[\gamma(\eta^0)\right]^{\alpha_1-2}\left[B_{11}\sin\beta_1(\eta^0)+\right.$$

$$\left.+B_{12}\cos\beta_1(\eta^0)\right]-B_{13}\left[\gamma(\eta^0)\right]^3\left[1+\ln\beta_1(\eta^0)\right]-(B_{14}\eta^0+ \qquad (22)$$

$$+B_{15})\left[\gamma(\eta^0)\right]^2,\quad \gamma(\eta^0)=\frac{1}{2}(1-q\tau_1+\eta^0),\quad \beta_1(\eta^0)=\alpha_2\ln\gamma(\eta^0)+A_{11}$$

$$\eta^0=\xi^0+2,\quad D_{11}=\frac{1}{q^2}(p_h-p_0)\,\xi_0^0,\quad D_{12}=f_0+\dot f_0+\frac{1}{2q}(p_0-p_h)(\xi_0^0)^2$$

Решение системы (14) для случая $\sigma>0.385$ выражается формулами

$$f(\zeta)=A_{20}\left[x_1(\zeta)\right]^{k_1}+A_{21}\left[x_1(\zeta)\right]^{k_2}+A_{22}\left[x_1(\zeta)\right]^3$$

$$F_2(\eta_1)=\frac{2q}{1-q}\,\frac{2k_1-1}{k_1-2}A_{20}\left[x_1(\zeta)\right]^{k_1}+\frac{2q}{1-q}\,\frac{2k_2-1}{k_2-2}A_{21}\left[x_1(\eta_1)\right]^{k_2}+$$

$$+A_{22}(1+3a_1)\,\eta_1\left[x_1(\eta_1)\right]^2-\frac{8(1-\sigma)}{1+\sigma}T_*\left[x_1(\eta_1)\right]^3\left[1+\right. \qquad (23)$$

$$\left.+\ln x_1(\eta_1)\right]+A_{23}\left[x_1(\eta_1)\right]^2$$

$$F_1(\xi^0)=\frac{1}{2q}(p_0-p_h)(\xi^0)^2+D_{11}\xi^0+D_{12}-F_2(\eta^0)$$

$$x_1(\zeta)=a_0+a_1\zeta,\quad x_1(\eta_1)=\frac{1}{2}(1-q\tau_1+\eta_1)$$

где

$$A_{20}=\frac{1}{k_1-k_2}\left|\frac{\dot f_0}{a_1}-(f_0-A_{22})\,k_2-3A_{22}\right|$$

$$A_{21}=\frac{1}{k_2-k_1}\left|\frac{\dot f_0}{a_1}-(f_0-A_{22})\,k_1-3A_{22}\right|,\quad A_{22}=A_{12} \qquad (24)$$

$$A_{23}=f_0+\dot{f}_0-\frac{4q}{1-q}\left[A_{20}\frac{k_1-1}{k_1-2}+A_{21}\frac{k_2-1}{k_2-2}\right]-A_{22}\gamma_0(1+3a_1)+$$

$$+\frac{8(1-\sigma)}{1+\sigma}T_*,\qquad k_{1,2}=\frac{1}{2a_1}\left(a_1-3\pm\sqrt{a_1^2-6a_1-3}\right)$$

Решение системы (14) в случае $\sigma=0.385$ выражается формулами

$$f(\zeta)=[x_1(\zeta)]^{-0.74}[A_{30}\ln x_1(\zeta)+A_{31}]+A_{32}[x_1(\zeta)]^3$$

$$F_2(\eta)=[x_1(\eta)]^{-0.74}[B_{30}\ln x_1(\eta)+B_{31}]+[x_1(\eta)]^2[B_{32}x_1(\eta)+B_{33}] \tag{25}$$

$$F_1(\xi^0)=\frac{1}{2q}(p_0-p_h)(\xi^0)^2+D_{30}\xi^0+D_{31}-F_2(\eta^0)$$

$$x_1(\zeta)=7.46+6.46(\zeta-\tau_1),\quad x_1(\eta)=\frac{1}{2}(1-0.86\tau_1+\eta)$$

где

$$A_{30}=0.157f_0+4.700\dot{f}_0-0.136\,T_*,\quad A_{31}=f_0-0.018\,T_*$$

$$A_{32}=0.018\,T_*,\quad B_{30}=3.065\,A_{30},\quad B_{31}=3.065\,A_{31}-3.533\,A_{30}$$

$$B_{32}=1.025\,T_*,\quad B_{33}=f_0-\dot{f}_0-3.065\,A_{31}+ \tag{26}$$

$$+3.533\,A_{30}-1.025\,T_*,\quad D_{30}=-\frac{4}{3}(p_0-p_h)\xi_0^0$$

$$D_{31}=f_0+\dot{f}_0+\frac{2}{3}(p_0-p_h)(\xi_0^0)^2$$

Полученное решение совместно с (2) и (3) дают возможность построить поля напряжений, массовых скоростей и смещений в интервале $\tau_1\leqslant\tau\leqslant\tau_2$. Момент τ_2 определяется из соотношения

$$\left[a_1(\alpha_1^2-\alpha_2^2-\alpha_1)-\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}(1+\alpha_1a_1)\right]\sin\mu_2+a_1\left[a_1\alpha_2(2\alpha_1-1)-\right.$$

$$\left.-\frac{1-2\sigma}{\sigma}\alpha_2\right]\cos\mu_2+\frac{A_{12}}{A_{10}}\left[\sigma a_1^2-\frac{1-2\sigma}{\sigma}(1+3a_1)+\right. \tag{27}$$

$$\left.+\frac{1-\sigma}{\sigma}\frac{p_h}{A_{12}}\right]\mu_1^{3-\alpha_1}=0,\qquad \mu_1=1+q(\tau_2-\tau_1),\quad \mu_2=\alpha_2\ln\mu_1+A_{11}$$

После момента $\tau=\tau_2$ вперед в глубь среды распространяется фронт разрушения путем отрыва $x=x_2(\tau)$. Радиальное напряжение впереди и за фронтом $x=x_2(\tau)$ для $\varepsilon_*=0$ определяется формулами

$$\sigma_{r1}=E\frac{\partial u_1}{\partial r}-(1-2\sigma)P_h$$

$$\sigma_{r2}=E\frac{\partial u_2}{\partial r}-(1-2\sigma)P_h \tag{28}$$

С учетом (28), условия непрерывности смещений и теоремы количества движения на фронте $x = x_2(\tau)$ легко получить

$$\left[c_1^2 - \left(\frac{dr_2}{dt} \right)^2 \right] \left(\frac{\partial u_1}{\partial r} - \frac{\partial u_2}{\partial r} \right) = 0 \qquad (29)$$

Из (29) заключаем, что условие сопряжения на фронте $x = x_2(\tau)$ будет удовлетворено, если

$$dr_2/dt = c_1 \qquad (30)$$

или

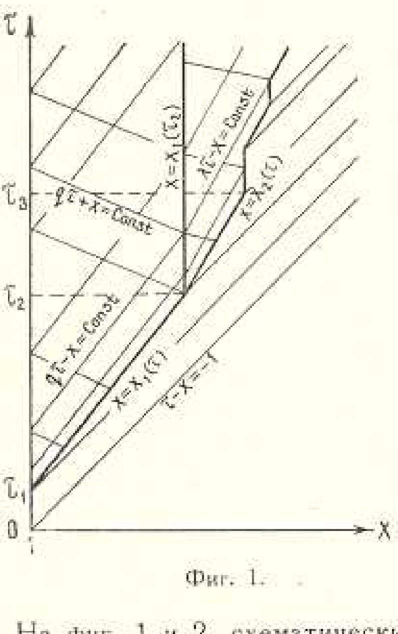
$$\partial u_1/\partial r = \partial u_2/\partial r \qquad (31)$$

Как показывают вычисления задачи действия давления в полости горных пород с образованием разрушения путем отрыва, при $\sigma_* \to 0$ фронт распространяется с постоянной скоростью, равной c_1, до момента, когда нарушается условие раскрытия трещин, навязанное геометрией, сводящееся к следующему:

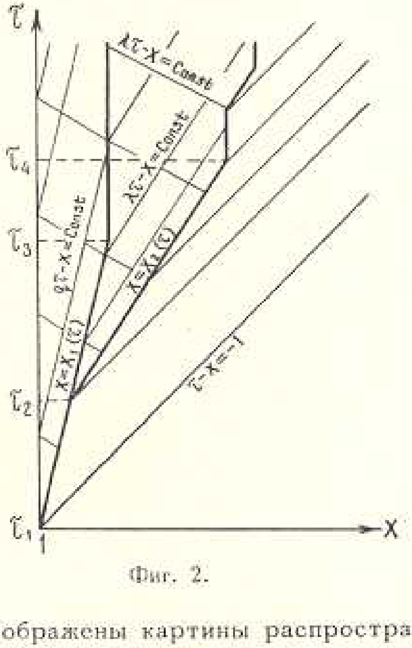
$$\frac{\rho_{\text{ис}} - \rho}{\rho} = - \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma} \frac{\sigma_{rr}}{\rho c_0^2} + 3 p_h \geqslant \frac{\rho_{\text{ср}} - \rho}{\rho} = - \frac{\partial u_2}{\partial r} - \frac{2 u_2}{r} \qquad (32)$$

где $\rho_{\text{ис}}$ и $\rho_{\text{ср}}$ — истинная и средняя плотность материала в области, разрушенной трещинами отрыва. Условие (32) с учетом (2) запишется в виде

$$\dot f_1(\xi) - \dot f_2(\eta) + \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{x} \geqslant 0 \qquad (33)$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

На фиг. 1 и 2 схематически изображены картины распространения взрывных волн на плоскости x, τ в случае $\sigma \geqslant 1/3$, $P_0 \geqslant 2\tau_*$.

(фиг. 1) и $\sigma < 1/3$, $P_0 < 2\tau_0$ (фиг. 2). Линия $x = x_1(\tau)$ изображает закон распространения фронта разрушения путем скола, $x = x_2(\tau)$ — фронт разрушения путем отрыва. Наклонные прямые — характеристики излучаемой упругой волны.

В интервале времени $\tau_2 \leqslant \tau \leqslant \tau_3$, где τ_3 — момент, когда впервые нарушается условие (33), уравнения, описывающие распространение взрывных волн и разрушение в среде при $\sigma < 1/3$, получаемые из граничных условий и из выражений (1)—(3), сводятся к следующему:

$$\ddot{F}_1(\xi^0) + \ddot{F}_2(\eta^0) = \frac{1}{q^2}(p_0 - p_h)$$

$$\dot{f}_1(\xi_2) - \dot{f}_2(\eta_2) + \frac{f_1(\xi_2) + f_2(\eta_2)}{x_1(\tau)} = \frac{2}{\lambda^2} T_* x_1(\tau)$$

$$\dot{F}_1(\xi_1) - \dot{F}_2(\eta_1) + \frac{F_1(\xi_1) + F_2(\eta_1)}{x_1(\tau)} + \frac{4(1-\sigma)}{1+\sigma} T_* x_1^2(\tau) \ln x_1(\tau) =$$

$$= f_1(\xi_2) + f_2(\eta_2) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h x_1^2(\tau), \quad x_1(\tau) = 1 + q(\tau - \tau_1)$$

$$\frac{\sigma}{1-\sigma} \frac{\ddot{f}(\zeta)}{x_2(\tau)} - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\left[\frac{\dot{f}(\zeta)}{x_2^2(\tau)} + \frac{f(\zeta)}{x_2^3(\tau)}\right] = -p_h \tag{34}$$

$$\dot{f}(\zeta) + \frac{f(\zeta)}{x_2(\tau)} = f_1(\xi) + f_2(\eta) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h x_2^2(\tau)$$

$$x_2(\tau) = 1 + q(\tau_2 - \tau_1) + \lambda(\tau - \tau_1)$$

где

$$\zeta = \tau - x_2(\tau), \quad \xi^0 = q\tau - 1, \quad \eta^0 = q\tau + 1$$

$$\xi = \lambda\tau - x_2(\tau), \quad \eta = \lambda\tau + x_2(\tau), \quad \xi_1 = q\tau - x_1(\tau) \tag{35}$$

$$\eta_1 = q\tau + x_1(\tau), \quad \xi_2 = \lambda\tau - x_1(\tau), \quad \eta_2 = \lambda\tau + x_1(\tau)$$

Начальные данные системы (34) определяются из решения предыдущей стадии для момента $\tau = \tau_2$ с учетом, что напряжения и смещения на характеристиках $\zeta = \tau - x = (1-q)\tau_2 + q\tau_1 - 1$ и $\eta = q\tau + x = 1 + q(\tau_1 + 2\tau_2)$ непрерывны.

Неизвестную функцию $f(\zeta)$, определяющую распространение упругих волн в неразрушенной среде, находим из условия разрушения трещинами отрыва (пятое уравнение системы (34) на фронте разрушения $x = x_2(\tau)$ и седьмое уравнение системы (34)).

$$f(\zeta) = A_{40}[x_2(\zeta)]^{l_1} + A_{41}[x_2(\zeta)]^{l_2} + A_{42}[x_2(\zeta)]^3 \tag{36}$$

$$x_2(\zeta) = b_0 - b_1\zeta$$

где

$$A_{40} = \frac{\dot{f}_0 x_1(\tau_2) - l_2 f_0 - A_{42} x_1^3(\tau_2)(3 - l_2)}{[x_1(\tau_2)]^{l_1}(l_1 - l_2)}$$

$$A_{41}=\frac{\dot{f}_0 x_1(\tau_2)-l_1 f_0-A_{42}x_1^3(\tau_2)(3-l_1)}{[x_1(\tau_2)]^{l_2}(l_2-l_1)},\quad A_{42}=\frac{1-\sigma}{14\sigma-4}p_h \tag{37}$$

$$b_0=\frac{1}{1-\lambda}[1-(q-\lambda)\tau_2-q\tau_1],\quad b_1=\frac{\lambda}{1-\lambda},\quad l_{1,2}=\frac{1}{2\sigma}(1-\sigma\pm$$

$$\pm\sqrt{1+2\sigma-9\sigma^2})$$

а f_0 и $\dot{f}_0$ — значения функций $f(\zeta)$ и $\dot{f}(\zeta)$ при $\zeta_0=\tau_2-x_1(\tau_2)$.

В шестом уравнении системы (34) $f_1(\xi)=\mathrm{const}$, поскольку $\xi=\mathrm{const}$. Так как в выражения (2) входит только сумма f_1+f_2, то за начальное значение $f_1(\xi)$ можно принять любое число, например, нуль. Тогда

$$\begin{gathered}f_2(\eta)=B_{40}[x_2(\eta)]^{l_1-1}+B_{41}[x_2(\eta)]^{l_2-1}+B_{42}[x_2(\eta)]^2\\ x_2(\eta)=\frac{1}{2}[\eta+1+q(\tau_2-\tau_1)-\lambda\tau_2]\end{gathered}\tag{38}$$

где

$$B_{40}=A_{40}(1+l_1 b_1),\ B_{41}=A_{41}(1+l_2 b_1),\ B_{42}=A_{42}(1-3b_1)-\frac{1-\sigma}{1+\sigma}p_h$$

Функция $f_1(\xi_2)$ определяется из второго уравнения системы (34)

$$\begin{gathered}f_1(\xi_2)=B_{43}[x_1(\xi_2)]^2+B_{44}\{B_{40}[x_2(\xi_2)]^{l_1-1}+B_{41}[x_2(\xi_2)]^{l_2-1}+\\ +B_{42}[x_2(\xi_2)]^2\}+B_{45}[x_1(\xi_2)]^{\lambda/q-1}\int_{\xi_{20}}^{\xi_2}[x_1(\xi_2)]^{-1-\lambda/q}\{B_{40}[x_1(\xi_2)]^{l_1-1}+\\ +B_{41}[x_1(\xi_2)]^{l_2-1}+B_{42}[x_1(\xi_2)]^2\}\,d\xi_2+B_{46}[x_1(\xi_2)]^{\lambda/q-1}\\ x_1(\xi_2)=\frac{\lambda(q\tau_1-1)}{\lambda-q}+\frac{q}{\lambda-q}\xi_2,\quad x_2(\xi_2)=\frac{1}{2}\Big[1+(q-\lambda)\tau_2-q\tau_1+\\ +\frac{2\lambda}{\lambda-q}(2\tau_1-1)-\frac{2q}{q-1}\xi_2\Big]\end{gathered}\tag{39}$$

где

$$B_{43}=\frac{2T_* q(\lambda-q)}{\lambda^2(3q-\lambda)},\quad B_{44}=\frac{\lambda-q}{\lambda+q},\quad B_{45}=1-\left(\frac{\lambda-q}{\lambda+q}\right)^2$$

а B_{46} — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $f_1(\xi_{20})=0$, $\xi_{20}=q\tau_2-x_1(\tau_2)$.

Из третьего уравнения системы (34) с учетом (19) функция

$$\begin{gathered}F_2(\eta_1)=\frac{2(1-\sigma)}{1+\sigma}\Big\{4T_* x_1^3(\eta_1)[\ln x_1(\eta_1)-1]+p_h\ln x_1(\eta_1)+\\ +B_{47}x_1^2(\eta_1)+x_1(\eta_1)\int_{\eta_{10}}^{\eta_1}\frac{1}{x_1^2(\eta_1)}[f_1(\xi_2)+f_2(\eta_2)]\,d\eta_1\end{gathered}\tag{40}$$

$$x_1(\eta_1) = \frac{1}{2}(\eta_1 + 1 - q\tau_1)$$

где B_{47} — постоянная интегрирования, определяемая из начального условия $F_2(\eta_{10}) = F_{20}$, $\eta_{10} = q\tau_2 + x_2(\tau_2)$, а F_{20} — значение функции $F_2(\eta_1)$ при $\eta_1 = \eta_{10}$ из решения предыдущей стадии.

Функция $F_1(\xi^0)$ определяется из первого уравнения системы (34)

$$F_1(\xi^0) = \frac{1}{2q^2}(p_0 - p_k)(\xi^0)^2 - \int_{\xi_0^0}^{\xi^0} \frac{F_2(\xi^0 + 2)}{\alpha(\xi^0)} d\xi^0 + \int_{\xi_0^0}^{\xi^0} [f_1(\xi^0) +$$

$$+ f_2(\eta^0)] d\xi^0 + \frac{8(1-\sigma)}{3(1+\sigma)} T_* \alpha(\xi^0) \left| \ln \alpha(\xi^0) - \frac{1}{3} \right| - \frac{2(1-\sigma)}{3(1+\sigma)} \alpha^3(\xi^0) + \quad (41)$$

$$+ B_{48}\xi^0 + B_{49}, \quad \alpha(\xi^0) = \frac{1}{2}(\xi^0 + 3 - q\tau_1)$$

где B_{48} и B_{49} находим из начальных условий $F_1(\xi_0^0) = \dot{F}_1(\xi_0^0) = 0$, $\xi_0^0 = q\tau_1 - 1$. Решения (36), (38), (39), (40), (41) совместно с (1), (2), (3) дают возможность построить поля напряжений, массовых скоростей и смещений в интервале $\tau_2 \leqslant \tau \leqslant \tau_3$. После момента $\tau = \tau_3$, когда впервые нарушится условие (33), ударный фронт разрушения путем отрыва превращается в слабый разрыв. Уравнения, описывающие разрушение и распространение взрывных волн в этой стадии совпадают с системой уравнений, приведенной в работе [3], и получаются из системы (34), если в них седьмое уравнение заменить уравнением (31), записанным в виде

$$\ddot{f}(\zeta) + \frac{2(1-2\sigma)}{1-\sigma}\left[\frac{\dot{f}(\zeta)}{x_2(\tau)} + \frac{f(\zeta)}{x_2^2(\tau)}\right] + p_k x_2^2(\tau) =$$

$$= \lambda^2 \left[\dot{f}_1(\xi) - \dot{f}_2(\eta) + \frac{f_1(\xi) + f_2(\eta)}{x_2(\tau)}\right] \quad (42)$$

Решение полученной системы можно продолжать до момента, когда вновь на фронте $x = x_2(\tau)$ начнет выполняться условие (33), после чего решение продолжается при помощи системы (34). Нарушение условия (33) может повторяться и возобновляться многократно. Если в какой-то момент времени скачок радиальных напряжений на фронте $x = x_1(\tau)$ обратится в нуль, то после этого момента второе и четвертое уравнения системы (34) необходимо заменить уравнениями

$$x_1(\tau) = x_* = \text{const}, \quad \lambda^2\left[\dot{f}_1(\xi_2) - \dot{f}_2(\eta_2) + \frac{f_1(\xi_2) + f_2(\eta_2)}{x_*}\right] =$$

$$= q^2[\ddot{F}_1(\xi_1) + \ddot{F}_2(\eta_1)] + 4T_* x_* \ln x_* \quad (43)$$

Решение продолжается до тех пор, пока скачок радиальных напряжений на ударном фронте разрушения не обратится в нуль.

В случае, когда $P_0 < 2\tau_*$, разрушение происходит только путем отрыва. Как уже было отмечено, условия сопряжения на фронте разрушения путем отрыва $x = x_2(\tau)$ при $\sigma_* \to 0$ удовлетворяются, если скорость фронта постоянна, равна c_1 (30) и если радиальное напряжение на фронте $x = x_2(\tau)$ непрерывно (31). Как показывают конкретные расчеты [2], в момент $\tau = \tau_1$ оба условия (30) и (31) удовлетворяются одновременно, а после момента $\tau = \tau_1$ удовлетворяется только условие (30).

Уравнения, описывающие разрушение, при котором удовлетворяются условия (30) и (33), сводятся к следующему:

$$\frac{\sigma}{1-\sigma}\frac{\ddot f(\zeta)}{x_1(\tau)} - \frac{1-2\sigma}{1-\sigma}\left[\frac{\dot f(\zeta)}{x_1^2(\tau)} + \frac{f(\zeta)}{x_1^3(\tau)}\right] = -p_h$$

$$f_1(\xi) + f_2(\eta) + \frac{1-\sigma}{1+\sigma}p_h x_1^2(\tau) = \dot f(\zeta) + \frac{f(\zeta)}{x_1(\tau)}$$

$$x_1(\tau) = 1 + \lambda(\tau - \tau_1), \quad \dot f_1(\xi^0) - \dot f_2(\eta^0) + f_1(\xi^0) + f_2(\eta^0) = \frac{p_0}{\lambda^2} \qquad (44)$$

$$\zeta = \tau - x_1(\tau), \quad \xi = \lambda\tau - x_1(\tau), \quad \eta = \lambda\tau + x_1(\tau)$$

$$\xi^0 = \lambda\tau - 1, \quad \eta^0 = \lambda\tau + 1$$

Решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$f(\zeta_0) = f_0, \quad \dot f(\zeta_0) = \dot f_0, \quad f_1(\xi_0) = 0, \quad f_2(\eta_0) = f_0 + \dot f_0 -$$
$$- \frac{1-\sigma}{1+\sigma}p_h, \quad \zeta_0 = \tau_1 - 1, \quad \xi_0 = \lambda\tau_1 - 1, \quad \eta_0 = \lambda\tau_1 + 1 \qquad (45)$$

где f_0 и $\dot f_0$ — значения функций $f(\zeta)$ и $\dot f(\zeta)$ из решения (6) при $\zeta = \zeta_0$, имеет следующий вид:

$$f(\zeta) = M_0[x_1(\zeta)]^3 + M_1[x_1(\zeta)]^{n_1} + M_2[x_1(\zeta)]^{n_2}$$

$$x_1(\zeta) = m_0\zeta + m_1$$

$$f_2(\eta) = M_3 x_1^2(\eta) + M_4[x_1(\eta)]^{n_1-1} + M_5[x_1(\eta)]^{n_2-1}$$

$$x_1(\eta) = \frac{1}{2}(\eta + 1 - \lambda\tau_1), \; f(\xi) = p_0/\lambda^2 + M_3\alpha_1^2(\xi) + M_3 e^{\xi}[\alpha_1^2(\xi) +$$

$$+ \alpha_1(\xi) - 0.5] + M_4[\alpha_1(\xi)]^{n_1-1} + M_5[\alpha_1(\xi)]^{n_2-1} - \qquad (46)$$

$$-\int_{\xi_0}^{\xi} e^{\xi}\{M_4[\alpha_1(\xi)]^{n_1-1} + M_5[\alpha_1(\xi)]^{n_2-1}\}d\xi + M_8 e^{-\xi}$$

$$\alpha_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi + 3 - \lambda\tau_1)$$

где

$$m_0 = \frac{\lambda}{1-\lambda}, \quad m_1 = \frac{1-\lambda\tau_1}{1-\lambda}, \quad m_2 = -\frac{1-2\sigma}{1-\sigma}, \quad m_3 = \frac{1-\sigma}{\sigma} p_h$$

$$n_{1,2} = \frac{m_0 - m_2}{2m_0} \pm \frac{1}{2m_0}\left[(m_0 - m_2)^2 - 4m_2\right]^{1/2}$$

$$M_0 = \frac{m_3}{6m_0^2 + 3m_0 m_2 + m_2}, \quad M_1 = \frac{\dot{f}_0 - 3M_0 m_0 - m_0 n_2 (M_0 - f_0)}{m_0(n_1 - n_2)}$$

$$M_3 = M_0(1 + 3m_0) - \frac{1-\sigma}{1+\sigma} p_h, \quad M_4 = M_1(1 + m_0 n_1) \tag{47}$$

$$M_2 = \frac{3M_0 m_0 - \dot{f}_0 - m_0 n_1 (M_0 - f_0)}{m_0(n_1 - n_2)}, \quad M_5 = M_2(1 + m_0 n_2)$$

$$M_6 = e^{-\xi_0}\{M_3 e^{\xi_0} \alpha(\xi_0) - M_3 - M_4 - M_5 - p_h/\lambda^2\}$$

$$\xi_0 = \lambda\tau_1 - 1$$

а f_0 и $\dot{f}_0$—значения функций $f(\zeta)$ и $\dot{f}(\zeta)$ при $\zeta = \tau_1 - 1$ из решения (6). При выполнении условия (33) поля напряжений, массовых скоростей и смещений строятся при помощи формул (46), (1), (3). После момента, когда впервые нарушается выполнимость условия (33), необходимо в системе (44) третье уравнение (уравнение, полученное из (30)) заменить уравнением (31), которое с учетом (1) и (3) совпадает с уравнением (42). Полученную систему функциональных дифференциальных уравнений можно строить численно с использованием ЭВЦМ. Решая эту систему, можно определить распространение фронта разрушений $x = x_2(\tau)$, поля напряжений, массовых скоростей и смещений в интервале времени, где нарушено условие (33). После того, как возобновится выполнимость условия (33), решение необходимо продолжить при помощи системы (44) или его решением (46), только в нем нужно начальные условия (45) заменить новыми значениями из предыдущего решения. Затем снова, если нарушится условие (33), нужно заменить третье уравнение системы (44) уравнением (42) и т. д. Решение задачи при $P_0 < 2\tau_*$ должно, колеблясь, асимптотически стремиться к статическому решению

$$r_p = \left(\frac{P_0}{3P_h}\right)^{1/3}, \quad \sigma_{r1} = -\frac{\mathrm{const}_1}{x^3} - P_h, \quad \sigma_{\theta 1} = \frac{\mathrm{const}_1}{x^3} - P_h$$

$$\sigma_{r2} = \frac{\mathrm{const}_2}{x^2}, \quad \sigma_{\theta 2} = 0 \tag{48}$$

где r_p — радиус области раскрытия трещин, σ_{r1}, $\sigma_{\theta 1}$ — напряжения в неразрушенной области, σ_{r2}, $\sigma_{\theta 2}$ — напряжения в области раскрытия трещин.

На счетно-решающей машине вычислены некоторые варианты взрыва в трещиноватых породах при $P_0 < 2\tau_*$ в области $0 \leqslant \tau \leqslant \tau_2$, где τ_2 — момент, когда впервые нарушается условие (33).

В табл. 1 приведены результаты вычисления взрыва в трещиноватой гранитной среде ($\sigma = 0.3$, $E = 2.22 \cdot 10^5$ *ат.*, $\tau_* = 750$ *кг/см²*) при $P_0 = 500$ *ат.*, $P_h = 0$. До момента $\tau = \tau_1 = 0.43$ из каверны распространяются упругие волны. При $\tau = 0.43$ от каверны отходит фронт разрушения радиальными трещинами $x = x_2(\tau)$, и решение построено с учетом разрушения. Счет прекращается в момент, когда скачок напряжения на ударном фронте $x = x_2(\tau)$ обратится в нуль. В последних графах табл. 1 приведены значения радиальных напряжений впереди и за фронтом разрушения. На фронте разрушения $\xi_0 = -0.612$, $\dot{f}_1(\xi_0) = 1.644 \cdot 10^{-3}$, $f_1(\xi_0) = 0$.

Таблица 1

ξ	τ	$f \cdot 10^3$	$\dot{f} \cdot 10^3$	$\ddot{f} \cdot 10^3$	$f_1 \cdot 10^3$	$\dot{f}_2 \cdot 10^3$	σ_{r1} (*кг/см²*)	σ_{r2} (*кг/см²*)
−1.00	0	0	0	1.670	—	—	—	—
−0.76	0.24	0.044	0.347	1.225	—	—	—	—
−0.60	0.40	0.114	0.520	0.946	—	—	—	—
−0.57	0.43	0.127	0.548	0.880	0.675	0.067	−500.0	−500.0
−0.56	0.50	0.132	0.557	0.855	0.681	0.052	−446.7	−343.0
−0.55	0.57	0.138	0.565	0.815	0.688	0.052	−402.2	−323.4
−0.54	0.65	0.144	0.573	0.780	0.694	0.050	−364.3	−306.0
−0.53	0.72	0.150	0.581	0.747	0.700	0.049	−331.8	−290.0
−0.52	0.79	0.155	0.588	0.718	0.706	0.048	−303.6	−276.3
−0.51	0.86	0.161	0.595	0.691	0.712	0.047	−279.0	−263.5
−0.50	0.94	0.167	0.602	0.666	0.718	0.046	−257.4	−251.9
−0.49	1.01	0.173	0.608	0.644	0.724	0.045	−238.3	−241.3

Результаты вычисления разных конкретных примеров хорошо согласуются с представлениями, которые мы имеем из экспериментов по разрушению горных пород при взрыве.

Эти результаты были доложены на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике, 1968 г.

Автор благодарит С. С. Григоряна за постоянное внимание к данной работе.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 14 III 1968

Ա. Բ. ԲԱՂԴԱՍԱՐՅԱՆ

ՓԽՐՈՒՆ ՊԻՆԴ ՄԻՋԱՎԱՅՐՈՒՄ ԿԵՆՏՐՈՆԱՑՎԱԾ ԼԻՑՔԻ ՊԱՅԹՄԱՆ ԽՆԴՐԻ ՃՇԳՐԻՏ ԼՈՒԾՈՒՄՆԵՐ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված է հատուկ դեպք, երբ լեռնային ապարի ձգման կրիտիկական լարումը $\sigma_* = 0$ և շոշափող լարման կրիտիկական արժեքը τ_* հավասար է մի հաստատունի՝ պլաստիկության պայմանից τ_{*1}, որը բնորոշում է շփումը բեկորային ճաքերի միջև:

Այդ դեպքում բեկորային և շառավղային ճաքեր առաջացնող հարվածային ալիքները տարածվում են հաստատուն արագությամբ և կարելի է ստանալ անալիտիկ լուծումներ:

Ստացված լուծումները վերաբերվում են ճաքճքված ապարներին, ինչպես նաև կարող են կիրառվել չճաքճքված ապարների համար, քանի որ σ_* և $\tau_* - \tau_{*1} \ll \rho c_0^2$ և τ_*.

A. B. BAGHDASARIAN

THE EXACT SOLUTIONS OF THE PROBLEM ON THE ACTION OF A CONCENTRATED CHARGE EXPLOSION IN A BRITTLE RIGID MEDIUM

S u m m a r y

A special case, when the critical stress $\sigma_* = 0$ in a brittle medium and the critical value of shearing stress, is considered.

In this case shock waves propagate with a constant velocity, and the analytical solution may be obtained. The obtained solutions are related to the cracked brittle medium, however they may be applied for noncracked medium because σ_* and $\tau_* - \tau_{*1} \ll \rho c_0^2$ and τ_*.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Григорян С. С.* Некоторые вопросы математической теории деформирования и разрушения твердых горных пород. ПММ, т. 31, вып. 4, 1967.
2. *Багдасарян А. Б., Григорян С. С.* О действии взрыва в органическом стекле. ПМТФ, №3, 1967.
3. *Корявов В. П.* О зоне и фронте трещин в упругом теле под действием давления. ПМТФ, № 6, 1965.