ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

Р. Е. МКРТЧЯН

ЗАДАЧИ БОЛЬШИХ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЙ ДЛЯ СИММЕТРИЧНОГО РАСШИРЕНИЯ И ВЫВОРАЧИВАНИЯ НАИЗНАНКУ СОСТАВНОЙ ПОЛОЙ СФЕРЫ

В работе Грина и Шилда [1] и в книге [2] с помощью функции энергии деформации общего вида решается задача симметричного расширения однородной сферической оболочки из несжимаемого материала, когда на внешней и внутренней поверхностях оболочки действуют нормальные, равномерно распределенные нагрузки.

Армани [3] впервые рассмотрел задачу выворачивания наизнанку сферической оболочки. Он выбрал функцию энергии деформаций так, чтобы главные напряжения были линейными функциями от главных удлинений. Задача выворачивания наизнанку однородной сферической оболочки из несжимаемого материала в наиболее общей форме исследована в работе Эриксена [4].

Задача симметричного расширения и выворачивания наизнанку толстой сферической оболочки из сжимаемого материала решена Грином [5, 6].

В настоящей работе эти задачи рассматриваются для оболочки, составленной из нескольких надетых одна на другую и спаянных по сферическим поверхностям изотропных сферических оболочек из различных упругих материалов.

В работе Баргавы и Панде [7] исследуется задача симметричного расширения концентрических сферических оболочек из различных несжимаемых, упругих материалов.

1. Пусть толстая сферическая оболочка, состоящая из n однородных, изотропных и несжимаемых слоев, деформируется так, что точка оболочки, занимавшая первоначально положение (ρ, θ, φ) в системе сферических координат с началом в центре оболочки, переходит в точку (r, θ, φ). Тогда радиусы $\rho_1 > \rho_2 > \cdots > \rho_{n+1}$ граничных сферических поверхностей недеформированной оболочки после деформации переходят в $r_1 > r_2 > \ldots > r_{n+1}$, если рассматривается задача симметричного расширения оболочки, и в $r_1 < r_2 < \ldots < r_{n+1}$, если рассматривается задача выворачивания оболочки.

Физические компоненты напряжения, возникающие в каждом слое деформированной оболочки, определяются соотношениями [1]

$$\sigma_{11}^{(k)} = \tau_{(k)}^{11} = Q^4 \Phi_{(k)} + 2\, Q^2 \Psi_{(k)} + p_{(k)}$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = \sigma_{33}^{(k)} = r^2 \tau_{(k)}^{22} = r^2 \tau_{(k)}^{33} \sin^2\theta = \frac{1}{Q^2}\Phi_{(k)} + \left(Q^2 + \frac{1}{Q^4}\right)\Psi_{(k)} + p_{(k)} \quad (1.1)$$

$$\sigma_{23}^{(k)} = \sigma_{31}^{(k)} = \sigma_{12}^{(k)} = 0$$

$$(k = 1,\ 2, \ldots n)$$

где

$$Q = \frac{\rho}{r}, \quad \Phi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1}, \quad \Psi_{(k)} = 2\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2} \quad (1.2)$$

$\tau_{(k)}^{ij}$ — компоненты контрвариантного тензора напряжений,

$p_{(k)}$ — скалярная инвариантная функция от инвариантов доформации I_1 и I_2,

$W_{(k)}$ — функция энергии деформации.

Из условия несжимаемости имеем

$$\rho^3 - r^3 = \rho_1^3 - r_1^3 = \rho_2^3 - r_2^3 = \cdots = \rho_{n+1}^3 - r_{n+1}^3$$

$$Q = \left(1 + \frac{\rho_1^3 + r_1^3}{r^3}\right)^{1/3}, \quad \frac{dQ}{dr} = \frac{1}{r}\left(\frac{1}{Q^2} - Q\right) \quad (1.3)$$

если рассматривается симметричное расширение оболочки, и

$$\rho^3 + r^3 = \rho_1^3 + r_1^3 = \rho_2^3 + r_2^3 = \cdots = \rho_{n+1}^3 + r_{n+1}^3$$

$$Q = \left(\frac{\rho_1^3 + r_1^3}{r^3} - 1\right)^{1/3}, \quad \frac{dQ}{dr} = -\frac{1}{r}\left(\frac{1}{Q^2} + Q\right) \quad (1.4)$$

если рассматривается выворачивание оболочки.

$p_{(k)}$ при симметричном расширении определяется [2]

$$p_{(k)} = -Q^2(Q^2\Phi_{(k)} + 2\Psi_{(k)}) + 2\int^{Q}\left[(Q^3+1)\Phi_{(k)} + \left(Q + \frac{1}{Q^2}\right)\Psi_{(k)}\right]dQ \quad (1.5)$$

Если рассматривается задача выворачивания оболочки, подставляя в уравнения равновесия при отсутствии объемных сил [2]

$$\tau_{(k),i}^{ij} + \Gamma_{ir}^{i}\tau_{(k)}^{rj} + \Gamma_{ir}^{j}\tau_{(k)}^{ir} = 0 \quad (1.6)$$

значения символов Кристофеля Γ_r^{ij}, с помощью (1.1) и (1.4) получаем

$$\frac{dp_{(k)}}{dQ} + Q^4\frac{d\Phi_{(k)}}{dQ} + 2Q^2\frac{d\Psi_{(k)}}{dQ} + 2(Q^3+1)\Phi_{(k)} + 2\left(Q + \frac{1}{Q^2}\right)\Psi_{(k)} = 0$$

откуда

$$p_{(k)} = -Q^2(Q^2\Phi_{(k)} + 2\Psi_{(k)}) + 2\int^{Q}\left[(Q^3-1)\Phi_{(k)} + \left(Q - \frac{1}{Q^2}\right)\Psi_{(k)}\right]dQ \quad (1.7)$$

Таким образом, в общем случае $p_{(k)}$ определяется выражением

$$p_{(k)} = -Q^2(Q^2\Phi_{(k)} + 2\Psi_{(k)}) + L_{(k)}(r) + H_k \quad (1.8)$$

где H_k — постоянные, а

$$L_{(k)}(r) = 2\int\limits_{Q_k}^{Q} \left[(Q^3+1)\,\Phi_{(k)} + \left(Q + \frac{1}{Q^2} \right) \Psi_{(k)} \right] dQ \tag{1.9}$$

при симметричном расширении оболочки и

$$L_{(k)}(r) = 2\int\limits_{Q_k}^{Q} \left[(Q^3-1)\,\Phi_{(k)} + \left(Q - \frac{1}{Q^2} \right) \Psi_{(k)} \right] dQ \tag{1.10}$$

при выворачивании оболочки.

Подставляя (1.8) в (1.1), получаем

$$\sigma_{11}^{(k)} = \tau_{(k)}^{11} = L_{(k)}(r) + H_k$$

$$\sigma_{22}^{(k)} = \sigma_{33}^{(k)} = r^2 \tau_{(k)}^{22} = r^2 \tau_{(k)}^{33} \sin^2\theta =$$

$$= \tau_{(k)}^{11} + \left(\frac{1}{Q^2} - Q^4 \right) \Phi_{(k)} + \left(\frac{1}{Q^4} - Q^2 \right) \Psi_{(k)} \tag{1.11}$$

$$\sigma_{23}^{(k)} = \sigma_{31}^{(k)} = \sigma_{12}^{(k)} = 0$$

Из условия сцепления

$$\sigma_{11}^{(k)}\Big|_{r=r_{k+1}} = \sigma_{11}^{(k+1)}\Big|_{r=r_{k+1}} \quad (k = 1, 2, \ldots, n-1) \tag{1.12}$$

и (1.11) получаем формулы для определения постоянных H_k

$$H_1 = \sigma_{11}^{(k)}\Big|_{r=r_1} = R_1$$

$$H_{k+1} = H_k + L_{(k)}(r_{k+1}) \tag{1.13}$$

$$H_n + L_{(n)}(r_{n+1}) = \sigma_{11}^{(n)}\Big|_{r=r_{n+1}} = R_2$$

где R_1 и R_2 — нормальные напряжения на внешней и внутренней поверхностях составной оболочки.

Задавая один из радиусов $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, из (1.13) и из условия несжимаемости можно определить постоянные H_k и одно соотношение между R_1 и R_2

$$R_1 - R_2 + \sum_{k=1}^{n} L_{(k)}(r_{k+1}) = 0 \tag{1.14}$$

Если же известны нормальные напряжения R_1 и R_2, то из (1.14) и из условия несжимаемости определяются радиусы $r_1, r_2, \ldots, r_{n+1}$, а затем постоянные H_k. В этом случае деформированное состояние оболочки определяется разностью $R_1 - R_2$.

2. В качестве конкретной задачи рассмотрим выворачивание наизнанку двухслойной сферической оболочки. Функции энергии дефор-

мации для материалов первого и второго слоя оболочки возьмем в виде выражения Муни-Ривлина

$$W_{(i)} = C_i(I_1 - 3) + D_i(I_2 - 3) \qquad (i = 1,\ 2) \tag{2.1}$$

где C_i и D_i — постоянные.

Физические компоненты напряжения будут

$$\begin{gathered} \sigma_{11}^{(i)} = L_{(i)}(r) + H_i \\ \sigma_{22}^{(i)} = \sigma_{33}^{(i)} = \sigma_{11}^{(i)} + \left(\frac{1}{Q^2} - Q^4\right)2C_i + \left(\frac{1}{Q^4} - Q^2\right)2D_i \\ \sigma_{23}^{(i)} = \sigma_{31}^{(i)} = \sigma_{12}^{(i)} = 0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

где

$$L_{(i)}(r) = 4\int_{Q_i}^{Q}\left[(Q^3 - 1)C_i + \left(Q - \frac{1}{Q^2}\right)D_i\right]dQ =$$

$$= (Q^4 - 4Q)C_i + 2\left(Q^2 + \frac{2}{Q}\right)D_i - (Q_i^4 - 4Q_i)C_i - 2\left(Q_i^2 + \frac{2}{Q_i}\right)D_i \tag{2.3}$$

где $$Q_i > Q > Q_{i+1}$$

Предположим, что деформированное тело остается в форме сферической оболочки при нулевых внутреннем и внешнем давлениях.

Тогда из (1.14) получаем

$$L_{(1)}(r_2) + L_{(2)}(r_3) = 0 \tag{2.4}$$

Дальнейший ход решения задачи иллюстрируется на численном примере.

Пусть оболочка в недеформированном состоянии имеет размеры $\rho_1 = 20\,см$, $\rho_2 = 18\,см$, $\rho_3 = 15\,см$ и состоит из таких материалов, для которых можно принять

$$C_1 = 2\,кг/см^2,\ C_2 = 1\,кг/см^2,\ D_1 = D_2 = 0$$

Подставляя эти значения в (2.4), получаем

$$-2Q_1^4 + Q_2^4 + Q_3^4 + 8Q_1 - 4Q_2 - 4Q_3 = 0 \tag{2.5}$$

Из условия несжимаемости имеем

$$Q = \frac{\rho}{(\rho_1^3 + r_1^3 - \rho^3)^{1/3}} = \frac{Q_1\rho}{[(\rho_1^3 - \rho^3)Q_1^3 + \rho_1^3]^{1/3}}$$

откуда

$$Q_2 = \frac{18Q_1}{(2168Q_1^3 + 8000)^{1/3}}, \qquad Q_3 = \frac{15\,Q_1}{(4625Q_1^3 + 8000)^{1/3}}$$

Подставляя эти значения в (2.5), получаем

$$-2Q_1^3+\frac{104976\,Q_1^3}{(2168\,Q_1^3+8000)^{4/3}}+\frac{50625\,Q_1^3}{(4625\,Q_1^3+8000)^{4/3}}-$$
$$-\frac{72}{(2168\,Q_1^3+8000)^{1/3}}-\frac{60}{(4625\,Q_1^3+8000)^{1/3}}+8=0 \tag{2.6}$$

Отсюда, используя физически осмысленное решение (2.6), полученное на ЭВМ „Наири", находим

$$Q_1=1.18036, \qquad Q_2=0.93951, \qquad Q_3=0.70850$$
$$r_1=16.9440\,см, \qquad r_2=19.1590\,см, \qquad r_3=21.1714\,см$$

Из (1.13) определяем

$$H_1=R_1=0, \qquad H_2=L_{(1)}(r_2)$$

Физические компоненты напряжения будут

$$\sigma_{11}^{(1)}=2Q^4-8Q+5.5606$$
$$\sigma_{22}^{(1)}=\frac{4}{Q^2}-2Q^4-8Q+5.5606 \tag{2.7}$$

где

$$1.18036\geqslant Q\geqslant 0.93951$$

$$\sigma_{11}^{(2)}=Q^4-4Q+2.5817$$
$$\sigma_{22}^{(2)}=\frac{2}{Q^2}-Q^4-4Q+2.5817 \tag{2.8}$$

где

$$0.93951\geqslant Q\geqslant 0.70850$$

Как показывают вычисления, радиусы рассматриваемой составной сферической оболочки при выворачивании ее наизнанку увеличиваются.

Этот эффект имеет место для любой однородной несжимаемой сферической оболочки. Например, если взять однородную сферическую оболочку размерами $\rho_1=20\,см$, $\rho_2=15\,см$ из ново-гуковского материала, т. е. $W=C(I_1-3)$, то после выворачивания наизнанку получим

$$r_1=16.972\,см, \qquad r_2=21.189\,см$$

Для составной оболочки при определенном соотношении радиусов составляющих оболочек, когда материал внутренней оболочки сопротивляется упругим деформациям значительно больше, чем материал внешней оболочки, может иметь место и обратный эффект.

Например, если взять двухслойную оболочку размерами $\rho_1=20\,см$, $\rho_2=18\,см$, $\rho_3=15\,см$ и принять для функции энергии деформации выражения

$$W_{(1)}=I_1-3, \qquad W_{(2)}=2(I_1-3)$$

то после выворачивания наизнанку получаем

$$r_1=14.390\,см, \qquad r_2=17.267\,см, \qquad r_3=19.665\,см$$

3. Рассмотрим случай, когда материалы сферической оболочки сжимаемы.

В этом случае точка оболочки (ρ, θ, φ) в интервале $\rho_k \geqslant \rho \geqslant \rho_{k+1}$ в выбранной системе сферических координат переходит в точку $(r_{(k)}, \theta, \varphi)$, где $r_{(k)}$ — функция от ρ.

Для компонентов контрвариантного тензора напряжения каждого слоя имеем [5]

$$\tau^{11}_{(k)} = r^2_{(k)\rho}\,\Phi_{(k)} + \frac{2\,r^2_{(k)\rho}\,r^2_{(k)}}{\rho^2}\Psi_{(k)} + p_{(k)}$$

$$\tau^{22}_{(k)} = \tau^{33}_{(k)}\sin^2\theta = \frac{1}{\rho^2}\Phi_{(k)} + \left(\frac{r^2{}_{(k)}}{\rho^4} + \frac{r^2{}_{(k)\rho}}{\rho^2}\right)\Psi_{(k)} + \frac{p_{(k)}}{r^2_{(k)}} \qquad (3.1)$$

$$\tau^{12}_{(k)} = \tau^{23}_{(k)} = \tau^{31}_{(k)} = 0$$

где

$$\Phi_{(k)} = \frac{2}{\sqrt{I_3^{(k)}}}\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_1^{(k)}}, \quad \Psi_{(k)} = \frac{2}{\sqrt{I_3^{(k)}}}\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_2}, \quad p_{(k)} = 2\sqrt{I_3^{(k)}}\frac{\partial W_{(k)}}{\partial I_3^{(k)}} \qquad (3.2)$$

Уравнения равновесия сводятся к виду

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\,\tau^{11}_{(k)}\right) = 2\,r^3_{(k)}\,\tau^{22}_{(k)}$$

или

$$\frac{d}{d\rho}\left[r^2_{(k)\rho}\,r^2_{(k)}\,\Phi_{(k)} + \frac{2\,r^2_{(k)\rho}\,r^4_{(k)}}{\rho^2}\,\Psi_{(k)} + r^2_{(k)}\,p_{(k)} \right] =$$

$$= \frac{2\,r_{(k)\rho}\,r^3_{(k)}}{\rho^2}\,\Phi_{(k)} + 2\left(\frac{r_{(k)\rho}\,r^5_{(k)}}{\rho^4} + \frac{r^3_{(k)\rho}\,r^3_{(k)}}{\rho^2}\right)\Psi_{(k)} + 2\,r_{(k)\rho}\,r_{(k)}\,p_{(k)} \qquad (3.3)$$

Эти уравнения представляют собой нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка относительно функций $r_{(k)}(\rho)$.

На внешней и внутренней сферических поверхностях составной оболочки могут быть заданы два из следующих граничных условий:

$$\tau^{11}_{(1)}\big|_{\rho=\rho_1} = R_1, \qquad r_{(1)}\big|_{\rho=\rho_1} = r_1$$

$$\tau^{11}_{(n)}\big|_{\rho=\rho_{n+1}} = R_2, \qquad r_{(n)}\big|_{\rho=\rho_{n+1}} = r_{n+1} \qquad (3.4)$$

Условия (3.4) и условия сцепления

$$\tau^{11}_{(k)}\big|_{\rho=\rho_{k+1}} = \tau^{11}_{(k+1)}\big|_{\rho=\rho_{k+1}} \qquad (3.5)$$

являются краевыми условиями, которым должны удовлетворять решения дифференциальных уравнений (3.3). Если найдены $r_{(k)}$ и $r_{(k)\rho}$, которые определяют деформированное состояние оболочки, то из (3.1) нетрудно найти ее напряженное состояние.

Для нахождения $\tau^{11}_{(k)}$ можно применить другой способ. Для k-ого слоя имеем [6]

$$\frac{d\,W_{(k)}}{d\rho}=\frac{1}{\rho^3}\frac{d}{d\rho}\left[(\rho\, r_{(k)\rho}-r_{(k)})\, r^2_{(k)}\,\tau^{11}_{(k)}\right] \tag{3.6}$$

Интегрируя эти уравнения, получаем

$$\int\limits_{\rho_1}^{\rho}\rho^3\,\frac{dW_{(1)}}{d\rho}\,d\rho=(\rho r_{(1)\rho}-r_{(1)})\, r^2_{(1)}\,\tau^{11}_{(1)}-R_1[(\rho r_{(1)\rho}-r_{(1)})\, r^2_{(1)}\,]_{\rho=\rho_1}$$

где $$\rho_1\geqslant\rho\geqslant\rho_2$$

$$\int\limits_{\rho_2}^{\rho}\rho^3\,\frac{dW_{(2)}}{d\rho}\,d\rho=(\rho\, r_{(2)\rho}-r_{(2)})\, r^2_{(2)}\,\tau^{11}_{(2)}-[(\rho r_{(2)\rho}-r_{(2)})\, r^2_{(2)}\,\tau^{11}_{(2)}\,]_{\rho=\rho_2}$$

где $$\rho_2\geqslant\rho\geqslant\rho_3 \tag{3.7}$$

. . . .

$$\int\limits_{\rho_n}^{\rho}\rho^3\,\frac{dW_{(n)}}{d\rho}\,d\rho=(\rho r_{(n)\rho}-r_{(n)})\, r^2_{(n)}\,\tau^{11}_{(n)}-[(\rho r_{(n)\rho}-r_{(n)})\, r^2_{(n)}\,\tau^{11}_{(n)}\,]_{\rho=\rho_n}$$

где $$\rho_n\geqslant\rho\geqslant\rho_{n+1}$$

Из этих уравнений при помощи (3.5) определяются $\tau^{11}_{(k)}$ на граничных сферических поверхностях оболочки, а затем $\tau^{11}_{(k)}$ для каждого слоя.

4. В качестве конкретной задачи рассмотрим выворачивание наизнанку двухслойной сферической оболочки из сжимаемых материалов.

Пусть оболочка нетолстая и деформации такие, что можно применять соотношения теории упругости второго порядка. Тогда функции энергии деформации материалов оболочки определяются выражением Мурнагана

$$W_{(i)}=A^{(i)}_1 J^{(i)}_2+A^{(i)}_2 J^{(i)2}_1+A^{(i)}_3 J^{(i)}_1 J^{(i)}_2+A^{(i)}_4 J^{(i)3}_1+A^{(i)}_5 J^{(i)}_3$$
$$(i=1,\ 2) \tag{4.1}$$

где $$J^{(i)}_1=I^{(i)}_1-3,\qquad J^{(i)}_2=I^{(i)}_2-2\,I^{(i)}_1+3$$
$$J^{(i)}_3=I^{(i)}_3-I^{(i)}_2+I^{(i)}_1-1 \tag{4.2}$$

Из (3.2), (4.1) и (4.2) получаем

$$\Phi_{(i)}=\frac{2}{\sqrt{I^{(i)}_3}}\,(3\,A^{(i)}_4 I^{(i)2}_1+B^{(i)}_1 I^{(i)}_1+A^{(i)}_3 I^{(i)}_2+B^{(i)}_2)$$
$$\Psi_{(i)}=\frac{2}{\sqrt{I^{(i)}_3}}\,(A^{(i)}_3 I^{(i)}_1+B^{(i)}_3),\qquad p_{(i)}=2\sqrt{I^{(i)}_3}\,A^{(i)}_5 \tag{4.3}$$

где

$$B_1^{(i)} = 2A_2^{(i)} - 4A_3^{(i)} - 18A_4^{(i)}$$

$$B_2^{(i)} = -2A_1^{(i)} - 6A_2^{(i)} + 9A_3^{(i)} + 27A_4^{(i)} + A_5^{(i)} \tag{4.4}$$

$$B_3^{(i)} = A_1^{(i)} - 3A_3^{(i)} - A_5^{(i)}$$

Подставляя значения $\Phi_{(i)}$ и $\Psi_{(i)}$ в (3.1), получим

$$\tau_{(i)}^{11} = \frac{2r_{(i)\rho}^2}{\sqrt{I_3^{(i)}}}\left(3A_4^{(i)}I_1^{(i)2} + B_1^{(i)}I_1^{(i)} + A_3^{(i)}I_2^{(i)} + \frac{2A_3^{(i)}r_{(i)}^2}{\rho^2}I_1^{(i)} + \frac{2B_3^{(i)}r_{(i)}^2}{\rho^2} + B_2^{(i)}\right) + 2A_5^{(i)}\sqrt{I_3^{(i)}}$$

$$\tau_{(i)}^{22} = \frac{2}{\sqrt{I_3^{(i)}}}\left[\frac{1}{\rho^2}\left(3A_4^{(i)}I_1^{(i)2} + B_1^{(i)}I_1^{(i)} + A_3^{(i)}I_2^{(i)} + B_2^{(i)}\right) + \left(\frac{r_{(i)}^2}{\rho^4} + \frac{r_{(i)\rho}^2}{\rho^2}\right)\left(A_3^{(i)}I_1^{(i)} + B_3^{(i)}\right)\right] + \frac{2A_5^{(i)}\sqrt{I_3^{(i)}}}{r_{(i)}^2} \tag{4.5}$$

где инварианты деформаций определяются выражениями

$$I_1^{(i)} = r_{(i)\rho}^2 + \frac{2r_{(i)}^2}{\rho^2}, \qquad I_2 = \frac{r_{(i)}^4}{\rho^4} + \frac{2r_{(i)\rho}r_{(i)}^2}{\rho^2}, \qquad I_3 = \frac{r_{(i)\rho}^2 r_{(i)}^4}{\rho^4} \tag{4.6}$$

На основании (4.5) и (3.3) получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{r_{(i)\rho}^2 r_{(i)}^2}{\rho^2}\left(3A_4^{(i)}I_1^{(i)2} + B_1^{(i)}I_1^{(i)} + A_3^{(i)}I_2^{(i)} + \frac{2A_3^{(i)}r_{(i)}^2}{\rho^2}I_1^{(i)} + \frac{2B_3^{(i)}r_{(i)}^2}{\rho^2} + B_2^{(i)}\right) + A_5^{(i)}r_{(i)}^2\sqrt{I_3^{(i)}}\right] = \frac{2r_{(i)\rho}r_{(i)}^3}{\sqrt{I_3^{(i)}}}\left[\frac{1}{\rho^2}\left(3A_4^{(i)}I_1^{(i)2} + B_1^{(i)}I_1^{(i)} + A_3^{(i)}I_2^{(i)} + B_2^{(i)}\right) + \left(\frac{r_{(i)}^2}{\rho^4} + \frac{r_{(i)\rho}^2}{\rho^2}\right)\left(A_3^{(i)}I_1^{(i)} + B_3^{(i)}\right)\right] + 2A_5^{(i)}r_{(i)\rho}r_{(i)}\sqrt{I_3^{(i)}} \tag{4.7}$$

$$(i = 1, 2)$$

Пусть постоянные, входящие в $W_{(1)}$ и $W_{(2)}$, имеют следующие значения [8]:

$$A_1^{(1)} = -2.46\,кг/см^2,\ A_2^{(1)} = 10.9\,кг/см^2,\ A_3^{(1)} = 11\,кг/см^2\ A_4^{(1)} = 0$$

$$A_5^{(1)} = -2.76\,кг/см^2$$

$$A_1^{(2)} = -5.76\,кг/см^2,\ A_2^{(2)} = 22\,кг/см^2,\ A_3^{(2)} = 24\,кг/см^2$$

$$A_4^{(2)} = 0,\ A_5^{(2)} = -5.6\,кг/см^2$$

Тогда на основании (4.5) и (4.7) получаем

$$\tau_{(1)}^{11} = 88\,r_{(1)\rho}^3 - 44.4\frac{r_{(1)\rho}^3\rho^2}{r_{(1)}^2} - 219.6\,r_{(1)\rho} + 104.48\frac{r_{(1)\rho}r_{(1)}^2}{\rho^2} + 71.52\frac{r_{(1)\rho}\rho^2}{r^2}$$

$$\tau^{22}_{(1)}=66\frac{r^2_{(1)}}{r_{(1)\rho}\,\rho^4}-109.8\frac{r_{(1)\rho}}{r^2_{(1)}}-\frac{154.2}{r_{(1)\rho}\,\rho^2}+104.48\frac{r_{(1)\rho}}{\rho^2}+\frac{71.52}{r_{(1)\rho}\,r^2_{(1)}}+$$

$$+22\frac{r^3_{(1)\rho}}{r^2_{(1)}}$$

где

$$\rho_1\geqslant\rho\geqslant\rho_2 \tag{4.8}$$

$$\tau^{11}_{(2)}=192r^3_{(2)\rho}-104\frac{r^3_{(2)\rho}\,\rho^2}{r^2_{(2)}}-493\,r_{(2)\rho}+228.8\frac{r_{(2)\rho}\,r^2_{(2)}}{\rho^2}+176.8\frac{r_{(2)\rho}\,\rho^2}{r^2_{(2)}}$$

$$\tau^{22}_{(2)}=144\frac{r^2_{(2)}}{r_{(2)\rho}\,\rho^4}-246.8\frac{r_{(2)\rho}}{r^2_{(2)}}-\frac{350.8}{r_{(2)\rho}\,\rho^2}+228.8\frac{r_{(2)\rho}}{\rho^2}+\frac{176.8}{r_{(2)\rho}\,r^2_{(2)}}+$$

$$+48\frac{r^3_{(2)\rho}}{r_{(2)}}$$

где

$$\rho_2\geqslant\rho\geqslant\rho_3 \tag{4.9}$$

$$r_{(1)\rho\rho}\Big(-66.6r^2_{(1)\rho}\rho^2+132\,r^2_{(1)\rho}\,r^2_{(1)}-109.8\,r^2_{(1)}+52.24\frac{r^4_{(1)}}{\rho^2}+$$

$$+35.76\rho^2\Big)-44.4\,r^3_{(1)\rho}\rho+66\,r^4_{(1)\rho}\,r_{(1)}-109.8\,r^2_{(1)\rho}r_{(1)}+104.48\,\frac{r^2_{(1)\rho}\,r^3_{(1)}}{\rho^2}-$$

$$-104.48\frac{r_{(1)\rho}\,r^4_{(1)}}{\rho^3}+71.52\,r_{(1)\rho}\,\rho+154.2\frac{r^3_{(1)}}{\rho^2}-66\frac{r^5_{(1)}}{\rho^4}-71.52\,r_{(1)}=0 \tag{4.10}$$

$$r_{(2)\rho\rho}\Big(-156\,r^2_{(2)\rho}\rho^2+288\,r^2_{(2)\rho}\,r^2_{(2)}-246.8\,r^2_{(2)}+144.4\frac{r^4_{(2)}}{\rho^2}+88.4\rho^2\Big)-$$

$$-104\,r^3_{(2)\rho}\rho+144\,r^4_{(2)\rho}\,r_{(2)}-246.8\,r^2_{(2)\rho}\,r_{(2)}+228.8\frac{r^2_{(2)\rho}\,r^3_{(2)}}{\rho^2}-$$

$$-228\frac{r_{(2)\rho}\,r^4_{(2)}}{\rho^3}+176.8\,r_{(2)\rho}\rho+350.8\frac{r^3_{(2)}}{\rho^2}-144\frac{r^5_{(2)}}{\rho^4}-176.8\,r_{(2)}=0 \tag{4.11}$$

Для решения дифференциальных уравнений (4.10) и (4.11) необходимы конкретные граничные условия.

Пусть сферическая оболочка размерами $\rho_1=20см$, $\rho_2=19см$, $\rho_3=18см$ из вышеподобранных материалов выворачивается наизнанку так, что внешняя и внутренняя поверхности после деформации остаются свободными от напряжений. Отсюда имеем следующие граничные условия:

а) $\tau^{11}_{(1)}\big|_{\rho=\rho_1}=0$, или из (4.8)

$$r_{(1)\rho}=\sqrt{\left(-109.8\frac{r_1^2}{\rho_1^2}+52.24\frac{r_1^4}{\rho_1^4}+35.76\right)\Big/\left(22.2-44\frac{r_1^2}{\rho_1^2}\right)} \tag{4.12}$$

где знак перед корнем выбран из геометрических соображений;

б) $$r_{(1)}\big|_{\rho=\rho_2} = r_{(2)}\big|_{\rho=\rho_2} = r_2 \tag{4.13}$$

в) $$\tau_{(1)}^{11}\big|_{\rho=\rho_2} = \tau_{(2)}^{11}\big|_{\rho=\rho_2} \quad \text{или}$$

$$r^3_{(2)\rho}\left(96\frac{r_2^2}{\rho_2^2} - 52\right) + r_{(2)\rho}\left(114.4\frac{r_2^4}{\rho_2^4} - 246.8\frac{r_2^2}{\rho_2^2} + 88.4\right) -$$

$$- r^3_{(1)\rho}\left(44\frac{r_2^2}{\rho_2^2} - 22.2\right) - r_{(1)\rho}\left(52.24\frac{r_2^4}{\rho_2^4} - 109.8\frac{r_2^2}{\rho_2^2} + 35.76\right) = 0 \tag{4.14}$$

г) $$\tau_{(2)}^{11}\big|_{\rho=\rho_3} = 0 \quad \text{или}$$

$$r_{(2)\rho} = \sqrt{\left(-246.8\frac{r_3^2}{\rho_3^2} + 114.4\frac{r_3^4}{\rho_3^4} + 88.4\right)\Big/\left(52 - 96\frac{r_3^2}{\rho_3^2}\right)} \tag{4.15}$$

Эти граничные условия достаточны для решения дифференциальных уравнений (4.10) и (4.11).

Задача решена с помощью вычислительной машины „Наири-I". Программа составлена так, что, задаваясь r_1 и решая дифференциальные уравнения (4.10) и (4.11), добиваемся удовлетворения (4.13). При этом граничные условия дифференциального уравнения (4.11) определяются из (4.13) и (4.14) после решения (4.10). Подставляя полученные значения $r_{(1)}$, $r_{(1)\rho}$, $r_{(2)}$ и $r_{(2)\rho}$ в (4.8) и (4.9), получаем компоненты контрвариантного тензора напряжений.

Результаты численного решения с точностью до последнего знака приведены в табл. 1. Здесь же, с целью сопоставления, в скобках приводятся результаты соответствующих величин для выворачивания сферической оболочки из несжимаемых материалов, т. е. когда в (4.1) принимается $I_3^{(1)} = I_3^{(2)} = 1$.

Таблица 1

№ слоя	ρ в *см*	r в *см*	r_ρ	τ^{11} в *кг/см*^{2}	$r^2\tau^{22}$ в *кг/см*^{2}
Первый слой	20.0	17.4685(17.6893)	1.2444	0.0000(0.0000)	−1,2484(−2,6382)
	19.8	17.7126(17.9389)	1.1969	−0.0407(−0.0747)	−1,6550(−2.6777)
	19.6	17.9476(18.1769)	1.1534	−0.0839(−0.1384)	−1.7017(−2.3191)
	19.4	18.1741(18.4042)	1.1126	−0.1221(−0.1854)	−1.5101(−1.7644)
	19.2	18.3927(18.6216)	1.0734	−0.1510(−0.2148)	−1.1556(−1.1347)
	19.0	18.6035(18.8297)	1.0352	−0.1686(−0.2280)	−0,6887(−0.4956)
Второй слой	19.0	18.6035(18.8297)	1.0362	−0.1686(−0.2280)	−1.2560(−0.7715)
	18.8	18.8070(19.0291)	0.9983	−0.1803(−0.2361)	−0.1394(0.4833)
	18.6	19.0029(19.2203)	0.9606	−0.1673(−0.1998)	1.0707(1.7173)
	18.4	19.1912(19.4038)	0.9225	−0.1310(−0.1524)	2.3232(3.1325)
	18.2	19.3718(19.5801)	0.8837	−0.0738(−0.0858)	3.5756(4.0988)
	18.0	19.5446(19.7496)	0.8438	0.0000(−0.0000)	4.7894(5.0671

Из таблиц видно, что при выворачивании двухслойной сферической оболочки учет малой сжимаемости материалов (соответствующей коэффициенту поперечной деформации $\sigma = 0.47$ при переходе к линейной теории) значительно изменяет напряженное состояние.

Такой эффект имеет место и для однородной сферической оболочки.

В качестве примера рассмотрим выворачивание однородной сферической оболочки, которая изготовлена из материала первого слоя вышерассмотренной двухслойной оболочки.

Пусть оболочка имеет размеры $\rho_1 = 20\,см$ и $\rho_2 = 18см$.

В табл. 2 приведены результаты численного решения задачи, когда внешняя поверхность переходит в свободную от напряжений внутреннюю поверхность ($r_1 = 18см$).

Таблица 2

ρ в *см*	r в *см*	r_ρ	τ^{11} в *кг/см*^{2}	$r^2\tau^{22}$ в *кг/см*^{2}
20	18.0000(18.0000)	1.1860	0.0000(0.0000)	−1.6537(−2.6634)
19.6	18.4577(18.4715)	1.1040	−0.0783(−0.1189)	−1.3989(−1.8849)
19.2	18.8839(18.9026)	1.0279	−0.1197(−0.1711)	−0.5374(−0.6371)
18.8	19.2801(19.2984)	0.9531	−0.1142(−0.1650)	0.6107(0.5951)
18.4	19.6462(19.6631)	0.8764	−0.0646(−0.1147)	1.8696(1.8542)
18.0	19.9806(20.0000)	0.7950	0.0203(−0.0236)	3.1204(3.4895)

Результаты численного решения задачи, когда после выворачивания внешняя и внутренняя поверхности свободны от напряжений, приведены в табл. 3.

Таблица 3

ρ в *см*	r в *см*	r_ρ	τ^{11} в *кг/см*^{2}	$r^2\tau^{22}$ в *кг/см*^{2}
20.0	17.8997(18.0791)	1.1965	0.0000(0.0000)	−1.6251(−2.6273)
19.6	18.3612(18.5467)	1.1130	−0.0809(−0.1131)	−1.4779(−1.7650)
19.2	18.7910(18.9744)	1.0364	−0.1276(−0.1593)	−0.6645(−0.5112)
18.8	19.1909(19.3673)	0.9615	−0.1274(−0.1489)	0.4629(0.7138)
18.4	19.5600(19.7295)	0.8850	−0.0822(−0.0952)	1.7175(2.0857)
18.0	19.8930(20.0641)	0.8040	0.0000(0.0000)	2.9742(3.6730)

В этих таблицах сопоставляются полученные численные результаты с соответствующими результатами для сферической оболочки из несжимаемого материала.

Заметим, что радиусы внешней и внутренней поверхностей однородной сферической оболочки, изготовленной из сжимаемого материала, при выворачивании наизнанку могут уменьшаться, если поверхности после деформации остаются свободными от напряжений, что невозможно в случае несжимаемого материала.

Автор выражает благодарность К. С. Чобаняну за ценные советы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 13 VI 1968

Ռ. Ե. ՄԿՐՏՉՅԱՆ

ԲԱՂԱԴՐՅԱԼ ՍՆԱՄԵՋ ԳՆԴԻ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԸՆԴԱՐՁԱԿՄԱՆ ԵՎ ՇՈՒՌ ՏՐՄԱՆ ՀԱՄԱՐ ՄԵԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԴԵՖՈՐՄԱՑԻԱՆԵՐԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում մեծ առաձգական դեֆորմացիաների տեսության հիման վրա դիտարկվում է տարբեր առաձգական նյութերից պատրաստված և գնդային թաղանթներ ներկայացնող շերտերից կազմված բաղադրյալ թաղանթի սիմետրիկ ընդարձակման և շուռ տրման խնդիրները: Աշխատանքի առաջին կեսում ընդունվում է, որ գնդային թաղանթը կազմված է անսեղմելի նյութերից, իսկ երկրորդ կեսում հաշվի է առնվում նյութերի սեղմելիությունը:

Բերվում են թվային օրինակներ, որոնցում ուսումնասիրվում է սեղմելիության ազդեցությունը բազմաշերտ և համասեռ գնդային թաղանթների շուռ տրման ժամանակ:

R. E. MKRTCHIAN

PROBLEMS OF LARGE ELASTIC DEFORMATIONS FOR SYMMETRICAL EXPANSION AND INVERSION OF COMPOSITE HOLLOW SPHERE

Summary

The solution of the problems of large elastic deformations for symmetrical expansion and inversion of a composite hollow sphere, composed of different elastic spherical shells are considered. Both cases of incompressible and compressible materials are investigated in this work.

In particular the solution of the problem of inversion of a hollow sphere composed of two layers is considered in detail (the cases of incompressible and compressible materials are investigated separetely).

The effect of compressiblity for the inversion of composite and homogeneous hollow spheres is investigated by the help of numerical examples.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Green A. E.* and *Shield R. T.* Finite elastic deformation of incompressible isotropic bodies. Proc. Roy. Soc., A, 202, 1950, 407.
2. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical Elasticity, Clarendon Press, Oxford, 1954.
3. *Armanni G.* Sulle deformazioni finite dei solidi elastici isotropi, Il Nuovo Cimetro [6], 10, 1915, 424—427.
4. *Ericksen J. L.* Inversion of a perfectly elastic spherical shall. Z. angew. Math. Mech., 35, 1955, 382.
5. *Green A. E.* Finite elastic deformation of compressible isotropic bodies. Proc. Roy. Soc., A, 227, 1955, 271—278.
6. *Грин А, Адкинс Дж.* Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды. М., 1965.
7. *Bhargava R. D.* and *Pande D.* Finite spherical inhomogeneities in concentric shells, Indian J. Phys., 39, No.9, 1965, 428—433.
8. *Мкртчян Р. Е.* Большие упругие деформации для растяжения, раздувания и кручения составной трубы из сжимаемого материала. Известия АН АрмССР, Механика, т. XXI, №3, 1968.