ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

Л. А. МОВСИСЯН

КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРОИЗВОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В настоящей работе рассматриваются задачи свободных колебаний цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения, причем вдоль образующих срединная поверхность оболочки может претерпевать изломы в конечном числе точек. Введением функции обобщенной кривизны определение собственных частот свободно опертой оболочки сводится к отысканию собственных значений бесконечной матрицы, которой соответствует нормальный определитель.

1. Уравнения колебаний изгибного типа цилиндрической оболочки произвольного поперечного сечения имеют вид [1, 2]

$$\frac{1}{Eh}\nabla^4\varphi - k(\beta)\frac{\partial^2 w}{\partial\alpha^2} = 0$$

$$D\nabla^4 w + k(\beta)\frac{\partial^2\varphi}{\partial\alpha^2} + \rho h\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

Здесь сохранены общепринятые обозначения, но следует отметить только, что α и β — длины дуг соответственно по образующей и по направляющей, $k(\beta)$ — главная кривизна поперечного сечения.

Кривизну оболочки, срединная поверхность которой имеет изломы, можно представить в виде

$$k(\beta) = k_1(\beta) + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i\Gamma(\beta, \beta_i) \tag{1.2}$$

интерпретируя углы излома γ_i как импульсы кривизны, сосредоточенные вдоль образующих β_i, N — число изломов, $k_1(\beta)$ — вместе с производной непрерывная функция.

Использование обобщенной кривизны для расчета контактных задач мы встречаем у А. Г. Назарова [3]. В дальнейшем это нашло применение и в работах [4—7].

Здесь рассматриваются замкнутые оболочки, поэтому $k_1(\beta)$ и $\Gamma(\beta, \beta_i)$ представляются в виде рядов

$$k_1(\beta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(a_j\cos\mu_j\beta + b_j\sin\mu_j\beta)$$

$$\Gamma(\beta, \beta_i) = \frac{c_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty}(c_{ij}\cos\mu_j\beta + d_{ij}\sin\mu_j\beta) \tag{1.3}$$

где

$$a_j = \frac{2}{\beta_0}\int\limits_0^{\beta_0} k_1(\beta)\cos\mu_j\beta\, d\beta, \quad b_j = \frac{2}{\beta_0}\int\limits_0^{\beta_0} k_1(\beta)\sin\mu_j\beta\, d\beta \tag{1.3}$$

$$c_{ij} = \frac{\cos\mu_j\beta_i}{\beta_0}, \qquad d_{ij} = \frac{\sin\mu_j\beta_i}{\beta_0}, \qquad \mu_j = \frac{2\pi j}{\beta_0}$$

а β_0 — длина поперечного сечения.

Решение (1.1) ищется в виде

$$\varphi = e^{i\omega t}\sin\lambda_m\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\left(\varphi_n^{(1)}\cos\mu_n\beta + \varphi_n^{(2)}\sin\mu_n\beta\right)$$
$$\tag{1.4}$$
$$w = e^{i\omega t}\sin\lambda_m\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\left(w_n^{(1)}\cos\mu_n\beta + w_n^{(2)}\sin\mu_n\beta\right)$$

Здесь ω — частота колебаний, $\lambda_m = \dfrac{m\pi}{l}$, а l — длина оболочки.

Как видно из (1.4), φ и w удовлетворяют условиям свободного опирания на торцах.

Подстановка (1.2)—(1.4) в (1.1) для определения $\varphi_n^{(1)}$, $\varphi_n^{(2)}$, $w_n^{(1)}$, $w_n^{(2)}$ дает следующую однородную систему бесконечных уравнений:

$$A_{mn}\varphi_n^{(1)} + L_1(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i c_{ni} L_i(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) = 0$$
$$A_{mn}\varphi_n^{(2)} + L_2(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) + \sum_{i=1}^{N}\gamma_i d_{ni} L_i(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) = 0$$
$$\tag{1.5}$$
$$B_{mn}w_n^{(1)} - L_1(\varphi_q^{(1)}, \varphi_q^{(2)}) - \sum_{i=1}^{N}\gamma_i c_{ni} L_i(\varphi_q^{(1)}, \varphi_q^{(2)}) = 0$$
$$B_{mn}w_n^{(2)} - L_2(\varphi_q^{(1)}, \varphi_q^{(2)}) - \sum_{i=1}^{N}\gamma_i d_{ni} L_i(\varphi_q^{(1)}, \varphi_q^{(2)}) = 0$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$A_{mn} = \frac{1}{Eh}(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2, \qquad B_{mn} = D(\lambda_m^2 + \mu_n^2)^2 - \rho h\omega^2$$

$$L_1(w_q^{(1)}, w_q^{(2)}) = \frac{\lambda_m^2}{2}\left[\sum_{q=0}^{n}(a_{n-q}w_q^{(1)} - b_{n-q}w_q^{(2)}) +\right.$$
$$\left. + \sum_{q=n}^{\infty}(a_{q-n}w_q^{(1)} + b_{q-n}w_q^{(2)}) + \sum_{q=0}^{\infty}(a_{q+n}w_q^{(1)} + b_{q+n}w_q^{(2)})\right] \tag{1.6}$$

$$L_2(w_q^{(1)},\ w_q^{(2)}) = \frac{\lambda_m^2}{2}\Bigg[\sum_{q=1}^{n}(a_{n-q}\, w_q^{(1)} + b_{n-q}\, w_q^{(2)}) +$$

$$+\sum_{q=n}^{\infty}(a_{q-n}\, w_q^{(2)} - b_{q-n}\, w_q^{(1)}) + \sum_{q=1}^{\infty}(b_{q+n}\, w_q^{(1)} - a_{q+n}\, w_q^{(2)})\Bigg] \qquad (1.6)$$

$$L_i(w_q^{(1)},\ w_q^{(2)}) = \lambda_m^2 \sum_{q=0}^{\infty}(c_{qi}\, w_q^{(1)} + d_{qi} w_q^{(2)})$$

Из условия нетривиальности решения системы (1.5) определяются частоты колебаний оболочки.

Легко видеть, что определитель системы (1.5) нормальный, следовательно, итерационный процесс определения частот сходится.

С практической точки зрения, когда интересно определить наименьшую и близкие к ней частоты, в общем случае, можно пользоваться следующим способом. Вначале определить главную гармонику колебаний [8]. Вместо (1.5) взять каноническую систему, т. е. в выражениях L_1, L_2 и L_i оставить только члены с индексом n. Задаваясь значением m, нужно определить то число n, при котором частота будет наименьшей $(m = 1)$. Соответствующая ей гармоника будет главной на том основании, что среди прочих форм она наиболее близка к истинной форме колебаний. Естественно, что после главной гармоники наиболее близкие к истинной форме будут гармоники, непосредственно примыкающие к главной, поэтому собственные частоты, найденные уже в первом приближении, можно последовательно улучшить.

2. В случае оболочек открытых профилей расчеты, приведенные в предыдущем пункте, достаточно укорачиваются.

Для свободно опертой по четырем кромкам оболочки кривизну можно представить в виде

$$k(\beta) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos \mu_j \beta + \frac{2}{b}\sum_{i=1}^{N} \gamma_i \sum_{j=1}^{\infty} \sin \mu_j \beta_i \sin \mu_j \beta \qquad (2.1)$$

Здесь $\mu_j = \dfrac{j\pi}{b}$, b — длина поперечного сечения.

Тогда решение системы (1.1) ищется в виде

$$\varphi = e^{i\omega t} \sin \lambda_m \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n \sin \mu_n \beta$$

$$w = e^{i\omega t} \sin \lambda_m \alpha \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \mu_n \beta \qquad (2.2)$$

Из (1.1), (2.1) и (2.2) для φ_n и w_n получается следующая однородная система:

$$A_{mn}\varphi_n+\frac{\lambda_m^2}{2}L(w_q)+\frac{2\lambda_m^2}{b}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\sin\mu_n\beta_i\sum_{q=1}^{\infty}w_q\sin\mu_q\beta_i=0$$

$$B_{mn}w_n-\frac{\lambda_m^2}{2}L(\varphi_q)-\frac{2\lambda_m^2}{b}\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\sin\mu_n\beta_i\sum_{q=1}^{\infty}\varphi_q\sin\mu_q\beta_i=0 \qquad (2.3)$$

Здесь

$$L(w_q)=\sum_{q=1}^{n}a_{n-q}w_q+\sum_{q=n}^{\infty}a_{q-n}w_q-\sum_{q=1}^{\infty}a_{q+n}w_q$$

Частоты оболочки определяются из условия приравнивания нулю определителя системы (2.3). Относительно решения этой системы все, сказанное в п. 1, остается в силе.

Как частный пример, рассматривается двугранная складка с углом излома γ, находящимся на расстоянии b_1 от начала координат. Система (2.3) в данном случае принимает вид

$$A_{mn}\varphi_n+\frac{2\gamma}{b}\lambda_m^2\sin\mu_n b_1\sum_{q=1}^{\infty}w_q\sin\mu_q b_1=0$$

$$B_{mn}w_n-\frac{2\gamma}{b}\lambda_m^2\sin\mu_n b_1\sum_{q=1}^{\infty}\varphi_q\sin\mu_q b_1=0 \qquad (2.4)$$

Частотное уравнение получается из (2.4) путем исключения φ_n и w_n и имеет вид

$$1+\frac{4Eh\gamma^2\lambda_m^4}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\mu_n b_1}{(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2\mu_n b_1}{D(\lambda_m^2+\mu_n^2)^2-\rho h\omega^2}=0 \qquad (2.5)$$

В таблице приведены значения первых четырех безразмерных частот $\Omega_{mn}=\frac{\rho l^2\omega_{mn}^2}{E}$, вычисленных по (2.5) для складки с размерами $b/l=1$, $b/b_1=2$, $b/h=20$ $(m=1)$.

Таблица 1

n \ γ	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
1	0.0892	0.3332	0.5376	0.7064	0.8998
2	2.230	2.545	2.994	3.656	5.333
3	15.07	15.31	15.62	16.08	17.50
4	55.75	57.06	58.82	61.61	72.33

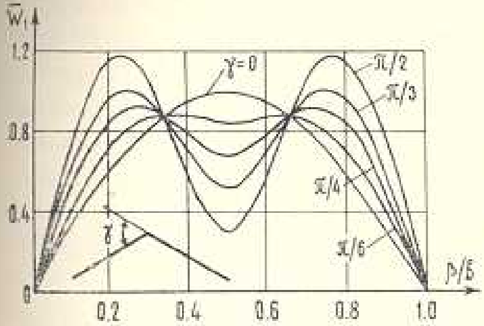
Сумма первого ряда (2.5) была вычислена с точностью до 10^{-6}, а из второго ряда были взяты десять членов.

Как видно из таблицы, угол излома оказывает наибольшее влияние на наименьшую частоту, и с повышением номера частоты влияние излома исчезает.

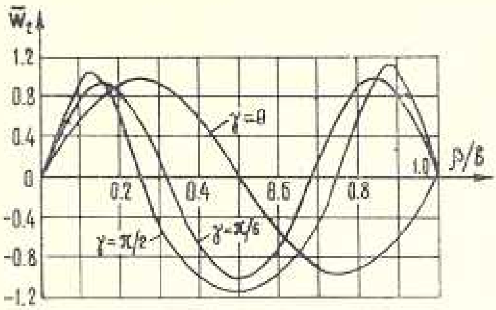
Частотам из (2.5) соответствуют следующие формы колебаний:

$$\overline{w}_{mn} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-n} \frac{B_{m,\,2n-1}(\omega_{mn})}{B_{m,\,2k+1}(\omega_{mn})} \sin \mu_{2k+1}\beta \tag{2.6}$$

На фиг. 1 и 2 представлены формы колебаний соответственно для первых двух частот при различных γ $(m = 1)$.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Приношу благодарность В. Л. Ширваняну, выполнившему на ЭВЦМ „Наири" основную часть вычислений.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 15 III 1968

Է. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԿԱՄԱՅԱԿԱՆ ԿՏՐՎԱԾՔՈՎ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԸ

Ամփոփում

Դիտարկվում է կամայական կտրվածքով գլանային թաղանթի ազատ տատանումների խնդիրը։ Թաղանթի միջին մակերևույթը ծնիչի երկարությամբ կարող է ունենալ նաև կոտրվածքներ (կոնտակտային խնդիր)։ Հետևելով Ա. Գ. Նազարովին մտցվում է ընդհանրացված կորություն։ Կամայական կտրվածքով փակ և եզրերով ազատ հենված գլանի սեփական հաճախականությունների գտնելը բերվում է (1.5) անվերջ սիստեմին համապատասխան անվերջ մատրիցայի սեփական արժեքները գտնելուն։ Ըստ որում, այդ մատրիցային համապատասխանում է նորմալ դետերմինանտ։

Բաց թաղանթի համար ստացվում է (2.3) սիստեմը։

Բերված է նրա առաջին չորս հաճախականությունների արժեքները կախված կտրման անկյունից և տատանումների առաջին երկու ձևերը։

L. A. MOVSISIAN

VIBRATIONS OF CYLINDRICAL SHELLS OF ARBITRARY CROSS SECTION

Summary

In the present paper the problem of free vibrations of cylindrical shells of arbitrary cross section is considered. In particular, the middle surface of the shell may have breaks along the generators. For contact problems the generalized functions of curvature (1. 2) is introduced [3]. The determination of frequencies of free supported shells is reduced to the finding of the eigenvalue of an infinite matrix.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Власов В. З.* Общая теория оболочек. Гостехиздат, М., 1949.
2. *Болотин В. В.* Динамическая устойчивость упругих систем. Гостехиздат, М., 1956.
3. *Назаров А. Г.* Некоторые контактные задачи теории оболочек. Докл. АН Арм. ССР, т. IX, № 2, 1948.
4. *Амбарцумян С. А.* К вопросу расчета цилиндрических оболочек произвольного поперечного сечения. Докл. АН АрмССР, т. XII, №1, 1950.
5. *Амбарцумян С. А.* К вопросу расчета устойчивости тонкостенных стержней. Докл. АН АрмССР, т. 17, №1, 1953.
6. *Онiашвили О. Д.* Некоторые динамические задачи теории оболочек. Изд. АН СССР, М., 1957.
7. *Тер-Исраелян В. А.* Расчет некоторых складчатых систем с помощью импульсивных функций. Автореферат диссертации, Ереван, 1952.
8. *Кукуджанов С. Н.* О наилучших начальных приближениях в проблеме собственных чисел в методах Ритца и Бубнова-Галеркина. Теория оболочек и пластин. Ереван, 1964.