ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

Д. В. ПЕШТМАЛДЖЯН, А. А. ХАЧАТРЯН

# ОБ ИЗГИБЕ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНКИ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ

В работе исследуется концентрация напряжений около кругового неподкрепленного отверстия в прямоугольной пластинке с помощью теории, учитывающей влияние поперечных сдвигов [1]. Материал пластинки трансверсально изотропный, плоскость изотропии параллельна срединной плоскости пластинки.

1. Приведем основную систему уравнений изгиба трансверсально изотропной пластинки в полярных координатах, которая, как известно [2], в случае отсутствия поверхностной нагрузки, представляется в виде

$$\Delta\Delta w = 0, \qquad \Delta \Phi - \delta_0^2 \Phi = 0 \tag{1.1}$$

Изгибающие и крутящий моменты и перерезывающие силы выражаются через искомые функции $w(r, \theta)$ и $\Phi(r, \theta)$ следующим образом:

$$M_r = -D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{2D}{\delta_0^2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\Delta w + \frac{2}{\delta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) \tag{1.2}$$

$$M_\theta = -D\left[\mu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta}\right)\right] +$$

$$+ \frac{2D}{\delta_0^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(\Delta w) - \frac{2}{\delta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)$$

$$H = -D(1-\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) - \frac{2D}{\delta_0^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta w)\right] + \Phi - \frac{2}{\delta_0^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}$$

$$N_r = -D\frac{\partial}{\partial r}(\Delta w) + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}, \qquad N_\theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\Delta w) - \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

Здесь

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \qquad D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \tag{1.3}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}, \qquad \delta_0^2 = \frac{10\,G'}{Gh^2}$$

где $h$ — толщина пластинки; $E$, $\mu$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона в плоскости изотропии; $G'$ — модуль сдвига в плоскостях, перпендикулярных к плоскости изотропии.

2. Пусть прямоугольная пластинка с круговым неподкрепленным отверстием, находящимся на достаточно большом расстоянии от ее краев, деформируется моментами $M_1$ и $M_2$, равномерно распределенными по сторонам.

Край отверстия свободен от усилий.

Зная решение для сплошной пластинки, нетрудно путем наложения [3] получить решение для поставленной задачи.

Решение для сплошной пластинки, изгибаемой моментами $M_1$ и $M_2$, имеет вид*

$$w' = -\frac{r^2}{4D}\left(\frac{M_1+M_2}{1+\mu} + \frac{M_1-M_2}{1-\mu}\cos 2\theta\right), \qquad \Phi' = 0 \tag{2.1}$$

При этом

$$M_r' = \frac{1}{2}\Big[(M_1+M_2)+(M_1-M_2)\cos 2\theta\Big]$$

$$M_\theta' = \frac{1}{2}\Big[(M_1+M_2)-(M_1-M_2)\cos 2\theta\Big]$$

$$H' = -\frac{1}{2}(M_1-M_2)\sin 2\theta \tag{2.2}$$

$$N_r' = 0, \qquad N_\theta' = 0$$

Накладываем на (2.1) и (2.2) решение для бесконечной пластинки с отверстием, край которого загружен следующими усилиями и моментами:

$$\left.\begin{aligned} M_r^{*} &= -\frac{1}{2}\Big[(M_1+M_2)+(M_1-M_2)\cos 2\theta\Big] \\ H^{*} &= \frac{1}{2}(M_1-M_2)\sin 2\theta, \qquad N_r^{*} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{при } r = a \tag{2.3}$$

взятыми из (2.2) с обратным знаком.

Решение этой задачи, в отличие от результатов для сплошной пластинки, будем обозначать двумя штрихами. Найдем его при граничных условиях (2.3) и условии, что все усилия стремятся к нулю на бесконечности.

Решение уравнений (1.1) ищем в виде

$$w'' = w_0(r) + w_1(r)\cos 2\theta, \qquad \Phi = F(r)\sin 2\theta \tag{2.4}$$

Подставляя (2.4) в систему (1.1), для функций $w_0(r)$, $w_1(r)$ и $F(r)$ получим

* Одним штрихом обозначаем решение для сплошной пластинки.

$$w_0 = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r$$
$$w_1 = C_5 + C_6 r^2 + C_7 r^4 + C_8 r^{-2} \tag{2.5}$$
$$F = C_9 I_2(\delta_0 r) + C_{10} K_2(\delta_0 r)$$

Здесь $I_n(\delta_0 r)$, $K_n(\delta_0 r)$ — функции Бесселя чисто мнимого аргумента соответственно первого и второго рода.

Удовлетворяя указанным граничным условиям и исключая жесткое смещение пластинки, для постоянных $C_1, \ldots, C_{10}$, входящих в (2.5), получим

$$C_1 = C_2 = C_4 = C_6 = C_7 = C_9 = 0$$

$$C_3 = -\frac{(M_1 + M_2)\, a^2}{2D(1-\mu)}, \qquad C_5 = \frac{M_1 - M_2}{2D} \frac{a^2}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \tag{2.6}$$

$$C_8 = \frac{(M_1 - M_2)\, a^4}{4D(1-\mu)} \frac{1 - \mu + 4\lambda(\delta)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)}, \qquad C_{10} = -\frac{2(M_1 - M_2)}{[3 + \mu - 4\lambda(\delta)]\, K_2(\delta)}$$

где

$$\delta = \delta_0 a = \frac{a}{h}\sqrt{\frac{10\, G'}{G}}, \qquad \lambda(\delta) = \frac{1}{\delta} \frac{K_1(\delta)}{K_2(\delta)} \tag{2.7}$$

Вычисляя теперь $M_r'', \ldots$ и выполняя указанное наложение $(M_r = M_r' + M_r'', \ldots)$, получим решение поставленной задачи, когда край отверстия свободен от напряжений.

Приведем лишь интересующие нас значения момента $M_\theta$ и перерезывающей силы $N_\theta$ по контуру отверстия $(r = a)$

$$M_\theta = M_1 + M_2 - \frac{2(1+\mu)(M_1 - M_2)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \cos 2\theta \tag{2.8}$$

$$N_\theta = -\frac{2(M_1 - M_2)}{a} \frac{\delta^2 \lambda(\delta)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \sin 2\theta \tag{2.9}$$

Полагая в выражении (2.8) $\delta \to \infty$, получим соответствующее выражение момента, найденное по классической теории пластинок

$$M_\theta = M_1 + M_2 - \frac{2(M_1 - M_2)}{3 + \mu} \cos 2\theta \tag{2.10}$$

Что же касается выражения перерезывающей силы (2.9), то в пределе оно, как и в работах [5,6], не дает результатов классической теории. Это объясняется тем, что классическая теория для перерезывающей силы дает существенно неверный результат, внося искажение самого порядка рассматриваемой величины [6]. Поэтому предельный переход в этом случае теряет смысл.

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а) Если $M_1 = M$, $M_2 = 0$, то

$$M_\theta = M\left[1 + \frac{2(1+\mu)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \cos 2\theta\right] \tag{2.11}$$

$$N_\theta = -\frac{2M}{a} \frac{\delta^2 \lambda(\delta)}{3 + \mu - 4\lambda(\delta)} \sin 2\theta \tag{2.12}$$

б) Если $M_1 = M_2 = M$, то

$$M_\theta = 2M, \qquad N_\theta = 0 \tag{2.13}$$

в) Если $M_1 = -M_2 = M$, то

$$M_\theta = -\frac{4M(1+\mu)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}\cos 2\theta \tag{2.14}$$

$$N_\theta = -\frac{4M}{a}\frac{\delta^2\lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}\sin 2\theta \tag{2.15}$$

Максимальных значений изгибающий момент достигает при $\theta=\pi/2$, а перерезывающая сила — при $\theta=\pi/4$ и в точках, им симметричных:
в случае а)

$$M_\theta^{\max} = k_0 M, \qquad N_\theta^{\max} = -k_1\frac{M}{a}$$

в случае в)

$$M_\theta^{\max} = -k_2 M, \qquad N_\theta^{\max} = -k_1\frac{2M}{a}$$

Здесь $k_0$, $k_1$, $k_2$ представляют собой коэффициенты концентрации соответствующих величин и определяются следующими формулами:

$$k_0 = \frac{5+3\mu-4\lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}, \qquad k_1 = \frac{2\delta^2\lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)} \tag{2.16}$$

$$k_2 = \frac{4(1+\mu)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}$$

В табл. 1 приведены значения $\delta$ в зависимости от $a/h$, $G/G'$

*Таблица 1*

| $a/h$ \ $G/G'$ | 1.0 | 2.0 | 5.0 | 10.0 | 20.0 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1.0 | 3.16 | 2.24 | 1.41 | 1.0 | 0.71 |
| 2.0 | 6.32 | 4.47 | 2.83 | 2.0 | 1.41 |
| 4.0 | 12.65 | 8.94 | 5.66 | 4.0 | 2.83 |
| 10.0 | 31.62 | 22.36 | 14.14 | 10.0 | 7.07 |

В табл. 2 приведены значения коэффициентов концентрации $k_0$, $k_1$, $k_2$ в зависимости от величины $\delta$ при $\mu = 0.3$

*Таблица 2*

| $\delta$ | $\infty$ | 10 | 5 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| $k_0$ | 1.788 | 1.880 | 1.966 | 2.070 |
| $k_1$ | — | 5.872 | 2.832 | 1.612 |
| $k_2$ | 1.576 | 1.761 | 1.933 | 2.140 |

Здесь первый столбец ($\delta \to \infty$) соответствует результатам классической теории пластинок.

Из приведенных здесь таблиц нетрудно заметить, что при сильно анизотропном материале даже для сравнительно больших отверстий учет поперечных сдвигов дает ощутимую поправку к классической теории.

3. Плита с круговым отверстием деформируется скручивающими моментами $H_0$, равномерно распределенными по всем четырем сторонам. Край отверстия свободен от усилий.

Как и в предыдущем пункте, решение поставленной задачи получим путем наложения решения для сплошной пластинки

$$w' = -\frac{H_0 r^2}{2D(1-\mu)} \sin 2\theta, \qquad \Phi' = 0$$

$$M_r' = H_0 \sin 2\theta, \qquad M_\theta' = -H_0 \sin 2\theta \tag{3.1}$$

$$H' = H_0 \cos 2\theta, \qquad N_r' = 0, \qquad N_\theta' = 0$$

на решение для пластинки с отверстием, край которого загружен следующими силами и моментами:

$$\left.\begin{aligned} M_r'' &= -H_0 \sin 2\theta, \qquad N_r'' = 0 \\ H'' &= -H_0 \cos 2\theta \end{aligned}\right\} \text{при } r = a \tag{3.2}$$

Решение уравнения (1.1) ищем в виде

$$w'' = w_1(r) \sin 2\theta$$

$$\Phi'' = F_0(r) + F_1(r) \cos 2\theta \tag{3.3}$$

Подставляя (3.3) в исходную систему (1.1), будем иметь

$$w_1(r) = C_1 + C_2 r^2 + C_3 r^4 + C_4 r^{-2}$$

$$F_0(r) = C_5 I_0(\delta_0 r) + C_6 K_0(\delta_0 r) \tag{3.4}$$

$$F_1(r) = C_7 I_2(\delta_0 r) + C_8 K_2(\delta_0 r)$$

Удовлетворяя граничным условиям (3.2) и условию стремления к нулю всех усилий при $r \to \infty$, для постоянных $C_1, \ldots C_8$, входящих в (3.4), получим

$$C_1 = -\frac{H_0 a^2}{D} \frac{1}{3+\mu-4\lambda(\delta)}, \qquad C_2 = C_3 = C_5 = C_6 = C_7 = 0$$

$$C_4 = \frac{H_0 a^4}{2D(1-\mu)} \frac{1-\mu+4\lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)}, \qquad C_8 = \frac{4H_0}{K_2(\delta)} \frac{1}{3+\mu-4\lambda(\delta)} \tag{3.5}$$

Поступая аналогично предыдущему пункту и выполняя указанное наложение, можно получить решение поставленной задачи.

По контуру отверстия ($r = a$) для момента и перерезывающей силы будем иметь выражения

$$M_\theta = -\frac{4(1+\mu) H_0}{3+\mu-4\lambda(\delta)} \sin 2\theta \tag{3.6}$$

$$N_\theta = \frac{4 H_0}{a} \frac{\delta^2 \lambda(\delta)}{3+\mu-4\lambda(\delta)} \cos 2\theta \tag{3.7}$$

Максимальных значений момент достигает при $\theta = \pi/4$, а перерезывающая сила—при $\theta = \pi/2$ и в точках им симметричных

$$M_\theta^{\max} = -k_2 H_0, \qquad N_\theta^{\max} = \frac{2 H_0}{a} k_1 \tag{3.8}$$

где $k_1$ и $k_2$ определяются по (2.16).

Принимая в (3.6) $\delta \to \infty$, получим значение момента $M_\theta$, соответствующее результатам классической теории [4]

$$M_\theta = -\frac{4(1+\mu) H_0}{3+\mu} \sin 2\theta$$

Относительно перерезывающей силы $N_\theta$ справедливо замечание, приведенное в предыдущем пункте.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 23 V 1967

Զ. Վ. ՓԵՇՏՄԱԼՋՅԱՆ, Ա. Ա. ԽԱՉԱՏՐՅԱՆ

## ԿԼՈՐ ԱՆՑՔՈՎ ՏՐԱՆՍՎԵՐՍԱԼ ԻԶՈՏՐՈՊ ՍԱԼԻ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

### Ամփոփում

*Ելնելով Ս. Ա. Համբարձումյանի կողմից առաջարկված անիզոտրոպ սալերի ծռման ճշգրտված տեսությունից, դիտարկված է տրանսվերսալ իզոտրոպ նյութից պատրաստված, կլոր անցքով, ուղղանկյուն սալի ծռման խնդիրը եզրերում ազդող ծռող կամ ոլորող մոմենտների ազդեցության տակ:*

*Ընդունելով, որ սալի չափերը բավականին մեծ են անցքի չափից, ուսումնասիրված է անցքի շուրջը առաջացող լարումների կոնցենտրացիան սալի ծռման ժամանակ: Ստացված են բանաձևեր, կատարված են թվային հաշվումներ և ստացված արդյունքները համեմատված են կլասիկ տեսությունով ստացվող համապատասխան արդյունքների հետ:*

D. V. PESHTMALDJIAN, A. A. KHACHATRIAN

## ON THE BENDING OF A TRANSVERSAL-ISOTROPIC PLATE WITH A CIRCULAR HOLE

Summary

The concentration of stresses near the circular hole in the rectangular plate is investigated by using the theory that takes into account the influence of transversal displacements.

The plate is made from transversal-isotropic material. The plane of isotropy is parallel to the middle plane of the plate.

The plate is bended by moments uniformly distributed on its sides. The obtained concentration coefficients are compared with the results of the classical theory.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Амбарцумян С. А.* Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
2. *Хачатрян А. А.* Некоторые задачи трансверсально изотропных круглых пластинок. Инж. ж., МТТ, №3, 1966.
3. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. М., 1963.
4. *Лехницкий С. Г.* Анизотропные пластинки. Гостехиздат, М., 1957.
5. *Колос А. В.* Об уточнении классической теории изгиба круглых пластинок. ПММ, т. 28, вып. 3, 1964.
6. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Об определении концентрации напряжений на основе прикладной теории. ПММ, т. 28, вып. 3, 1964.