ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

В. А. МАНЬКОВСКИЙ, М. И. РОЗОВСКИЙ

К ТЕОРИИ АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГО-НАСЛЕДСТВЕННЫХ СРЕД

§ 1. При рабочих нагрузках, не превышающих $25 \div 30\%$ от разрушающих, будем рассматривать конструкционный тканевый стеклопластик как упруго-наследственный квазиоднородный ортотропный континуум с усредненными по толщине „размазанными" упругими и реономными свойствами. Волнистость армирующего агента, обусловленная текстильной переработкой стекловолокон, и наличие в стеклотекстолите высокополимерного связующего предопределяет учет как сдвигового в плоскости армирования 12, так и линейного последействия указанного материала в направлениях основы 11, утка 22 и по толщине (направление 33). Слоистость, структурная немонолитность и гетерогенность стеклотекстолита приводят к существенным сдвиговым податливостям и в плоскостях 13, 23, перпендикулярных к плоскости армирования, и, как следствие, к отказу от гипотезы недеформируемых нормалей в задачах изгиба. Таким образом, определение компонентов тензоров напряженного и деформированного состояний для конструктивных элементов из указанных сред в общем случае сводится к решению трехмерных задач наследственной теории упругости анизотропного тела зачастую при менее "жестких" рабочих предположениях, нежели классическая гипотеза Кирхгоффа-Лява*.

Ввиду сложности решения указанных задач в замкнутом виде, введем следующие предположения относительно работы материала во времени:

1. главные плоскости упругой симметрии среды 12, 13, 23 инвариантны по отношению ко времени, и материал обладает ортогональной анизотропией реономных свойств в произвольный момент времени;

2. реономные свойства среды не зависят от знака компонентов тензора напряжений;

3. главные** характеристики или главные меры линейной и сдвиговой ползучести подобны между собой.

Первая гипотеза не является принципиально новой [2] и находится, как и вторая, на уровне обычно принимаемых допущений.

---

* Например, гипотеза о прямолинейном элементе [1].

** То есть соответствующие главным направлениям и плоскостям упругой симметрии материала. Здесь и ниже процесс развития во времени высокоэластических линейных и сдвиговых деформаций под действием постоянной нагрузки традиционно называем ползучестью (простой).

Непосредственные экспериментальные данные относительно второй гипотезы отсутствуют. Однако, следует ожидать, что при умеренной интенсивности внешнего силового поля она справедлива [3], и усложнение теории в этом направлении не оправдано.

В рассматриваемом случае равновесных процессов деформирования априорное использование третьей гипотезы накладывает ограничения лишь на форму нестационарного участка кривых ползучести, как правило, мало интересного с практической точки зрения. Однако, эти ограничения менее жесткие, нежели в известной расчетной модели Брызгалина Г. И. [4], предполагающей постоянство во времени характеристик (мер) ползучести в направлениях армирования 11, 22.

Отметим, что третья гипотеза эквивалентна предположению о подобии кривых простой одномерной ползучести для образцов, произвольно ориентированных в плоскостях упругой симметрии. Указанное подобие в плоскости 12 наблюдалось для эпоксидного стеклопластика [5], а также при релаксации напряжений для полиэфирного стеклотекстолита [6].

Справедливость последних двух гипотез проверялась экспериментально для судостроительного стеклопластика холодного отвердения (гидрофобизированный стеклосатин 8/3 и полиэфирная смола ПН—3). Образцы стеклотекстолита размерами в свету 100x100x3, вырезанные из одного листа (плоскость 12), синхронно деформировались во времени (до $2{,}5 \cdot 10^3$ час) в шарнирных четырехзвенниках (фиг. 1). Напряженное

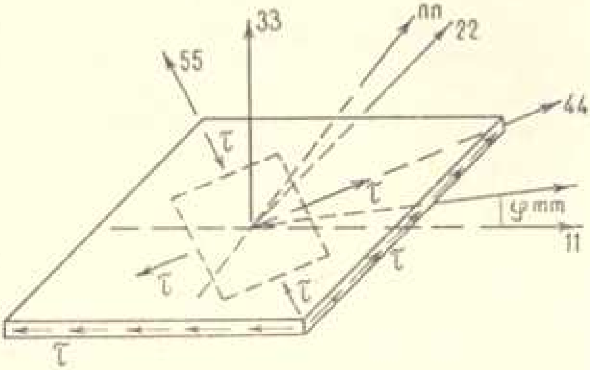
Фиг. 1. Установки для осуществления чистого сдвига.

состояние в центре образцов (фиг. 2) близко [3] к чистому сдвигу. Направление 11 основы материала составляло (фиг. 2) с диагональю растяжения 44 угол 45^0. Деформации замерялись тензометрическим путем с регистрацией статическими измерителями с мостовыми схемами и отсчетом по зеркальным гальванометрам типа М—17. Средние по толщине касательные напряжения составляли $7{,}5\%$ от разрушающих. На фиг. 3

представлены усредненные по данным двух идентичных установок (фиг. 1) экспериментальные характеристики λ_{ij} линейной ползучести при растяжении и сжатии вдоль соответствующих диагоналей 44 и 55 и сдвиговой ползучести в плоскости 12, причем

$$\lambda_{ij}(t) = \text{э}_{ij}(t)\, e_{ij}^{-1}, \quad i = j = 4.5, \quad i = 1,\ j = 2,$$

где э_{ij}, e_{ij} — высокоэластические и мгновенно-упругие деформации (линейные или угловые).



Фиг. 2. Анализ напряженного состояния в центре пластины.

Учитывая обычный разброс экспериментальных точек при последействии стеклотекстолитов, вызванный гетерогенностью их структуры и наличием нерегулярности в плане отдельных текстильных макроячеек стеклоткани, а также неизбежные субъективные погрешности при наклейке тензодатчиков, следует признать удовлетворительным результат сопоставления эксперимента с гипотезами. Локальную немонотонность опытных кривых можно объяснить „технологическими" причинами: ранее отмеченными искривлениями стеклянных прядей, незавершенностью процессов полимеризации и отверждения связующего, микродеструктивными процессами. Не усложняя рассуждений*, будем считать в дальнейшем, что исследуемый материал структурно стабилен во времени.

В заключение констатируем, ссылаясь на эксперимент, что установки (фиг. 1), рекомендуемые [3] для исследования плоского напряженного состояния при чистом сдвиге, неточны при определении упругих и недопустимы при определении реономных характеристик ортотропных материалов в тех случаях, когда угол между диагональю растяжения и основой материала отличен от $\varphi = \pm 45°$. В указанных случаях образец, втиснутый в относительно более жесткий контур четырехзвенника квадратной, а затем ромбической формы и деформирующийся по законам анизотропного тела общего случая (из-за наличия коэффициентов взаимного влияния полностью меняется геометрия образца [8]), испытывает „стесненную трансформацию".

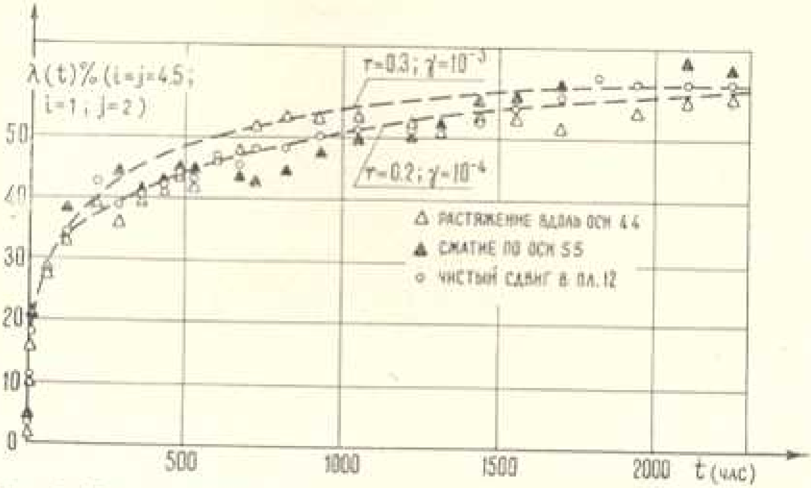
§ 2. Равновесные процессы простой ползучести с особенностью в момент загружения будем описывать с использованием слабо сингулярных наследственных функций влияния типа Ржаницына А. Р.:

$$R_{r-1}(-\gamma;\ T-\tau) = \exp\left[-\gamma(T-\tau)\right]\frac{(T-\tau)^{r-1}}{\Gamma(r)} \tag{2.1}$$

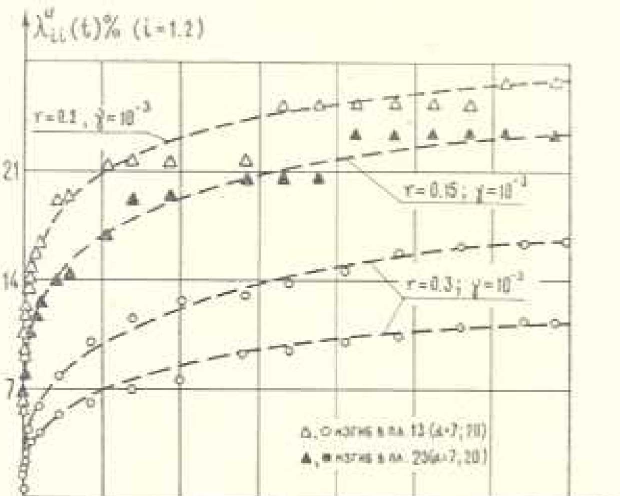
* Вопросы старения „в чистом виде" для нетканых стеклопластиков исследовались Мартиросяном М. М. [7]. Принципиально излагаемая теория распространяется и на случай анизотропного упруго-ползучего (стареющего) тела Маслова Г. Н.— Арутюняна Н. Х.

где r, γ — положительные реономные параметры; T, τ — безразмерные временные аргументы масштаба $t_0 = 1$ *час*; $\Gamma(r)$ — гамма-функция Эйлера.

На фиг. 3, 4 пунктиром показаны обработанные с помощью данного ядра характеристики ползучести при сдвиге в плоскости 12 и при изгибе в плоскостях 13, 23.



Фиг. 3. Характеристики ползучести при растяжении $\lambda_{44}(t)$, сжатии $\lambda_{55}(t)$ и чистом сдвиге $\lambda_{12}(t)$.



Фиг. 4. Характеристики ползучести при поперечном изгибе в плоскостях 13, 23 при различных соотношениях $\alpha = lh^{-1}$.

Выбор указанной функции влияния в качестве ядра ползучести обусловлен следующими обстоятельствами:

1. соответствующее ядру (2.1) уравнение связи вытекает из линеаризованного обобщенного уравнения Максвелла-Гуревича Г. И. [9],

наиболее полно описывающего поведение „сшитых“ полимеров и армоматериалов на их основе под нагрузкой;

2. замкнутость формы ядра (2.1) позволяет сравнительно просто определить его реономные параметры r, γ, так как характеристики ползучести в этом случае суть протабулированные [10] неполные гамма-функции, а в двойных логарифмических координатах их форма зависит только от параметра r (параметр γ предопределяет сдвиг кривой по оси $\lg T$);

3. указанные параметры r, γ позволяют точно описать форму кривых последействия. При достаточно малом γ процесс деформирования приближается к безразличному.

4. основные правила действия с обобщенными экспонентами дробного порядка (K-функциями), резольвентными по отношению к ядру (2.1), совпадают с аналогичными для $Э$-функций Работнова Ю. Н. [11], где

$$K_{r-1}(-\gamma;\ \varkappa;\ T-\tau)=\exp[-\gamma(T-\tau)]\sum_{n=1}^{\infty}\varkappa^{n-1}\frac{(T-\tau)^{nr-1}}{\Gamma(nr)} \qquad (2.2)$$

где $\varkappa$ — опытный аргумент, причем $|\varkappa|<\gamma^r$.

§ 3. Упругие свойства рассматриваемой ортотропной среды однозначно описываются девятью апостериорными [1] константами: главными шестью мгновенно-упругими линейными и сдвиговыми податливостями Y_{ij} ($i=j=1, 2, 3$; $i=1, 2$; $j\neq i=2, 3$) и тремя (из шести) коэффициентами Пуассона ν_{ij} *), например, $i=1, 2$; $j\neq i=2, 3$. Используя здесь и далее операторный принцип Вольтерра В. — Работнова Ю. Н. [11], на основании гипотезы о подобии § 1 представим операторные аналоги упругих констант в виде:

$$\overline{Y}_{ij}=Y_{ij}[1+\varkappa_{ij}K^*(0)],\quad i=j=1, 2, 3;\quad i=1, 2;\quad j\neq i=2, 3 \qquad (3.1)$$

$$\tilde{\nu}_{ij}=\nu_{ij}[1+\mu_{ij}K^*(-\varkappa_{ii})],\quad i, j=1, 2, 3;\quad i\neq j \qquad (3.2)$$

Данные функционалы, определяемые параметрами r, γ, $\varkappa$ наследственных K-операторов и равновесными параметрами $\varkappa_{ij}$, μ_{ij}, девять из которых линейно независимы, полностью характеризуют реономное поведение модели. Опытные параметры $\varkappa_{ij}$, связанные с соответствующими предельными характеристиками ползучести соотношением $\varkappa_{ij}=\gamma^r\lambda_{ij}(\infty)$, приведены для рассматриваемого стеклотекстолита в табл. 1, 2.

Линейные параметры $\varkappa_{ij}$ ($i=j=1, 2, 3$) определялись из обычных [3] испытаний на простую ползучесть при растяжении ($\varkappa_{11}$, $\varkappa_{22}$) или сжатии ($\varkappa_{33}$ **). Значение $\varkappa_{12}$ найдено из эксперимента, приведенного в § 1.

* Индексы i, j указывают соответственно на направления одномерного действия внешней силы и замера поперечной деформации.

** В этом случае деформации по толщине листа замерялись малобазисными (5 *мм*) тензодатчиками.

Реономные сдвиговые параметры $\varkappa_{13}$, $\varkappa_{23}$ рассматриваемого материала, описываемого моделью § 1, определялись из испытаний на длительный поперечный изгиб по схемам трехточечного загружения образцов-балочек размерами $l \times b \times \delta$, ориентированных в направлениях 11,22 и разнящихся отношением $\alpha = l\delta^{-1}$. На фиг. 4 показаны соответствующие экспериментальные характеристики ползучести $\overline{\lambda}_{ii}^{n}$, λ_{ii}^{n} $(i = 1, 2)$ при поперечном $(\alpha = 7)$ и квазичистом $(\alpha \geqslant 20)$ изгибах при „рабочих" нагрузках, не превышающих $15 \div 20\,\%$ от предельных. Пунктиром показаны теоретические кривые, соответствующие ядру (2.1). Исходя из параболического [1] закона распределения скалывающих напряжений по толщине δ, согласно функционалам (3.1) получаем $(i = 1, 2)$

$$\varkappa_{i3} = \eta^{-1}[\overline{\varkappa}_{ii}^{n}(1+\eta) - \varkappa_{ii}]; \qquad \eta = 1,\ 2\alpha^{-2}\,Y_{i3}Y_{ii}^{-1} \tag{3.3}$$

Здесь $\overline{\varkappa}_{ii}^{n}$ — опытный равновесный параметр при длительном поперечном изгибе с учетом сдвигов в плоскости $i3$ для образца, ориентированного в направлении ii.

Таблица 1

Главные линейные упругие и реономные* характеристики исследуемого стеклотекстолита

Главные оси	$Y_{ii}H^{-1}M^2\cdot 10^{10}$	$\varkappa_{ii}\cdot 10^2$
11	0.606	1.46
22	0.869	2.47
33	0.834	2.76

* Здесь и в табл. 2, 3 $\gamma = 10^{-3}$, $r = 0.3$

Таблица 2

Главные сдвиговые упругие и реономные характеристики

Главные плоскости	$Y_{ij}H^{-1}M^2\cdot 10^{10}$	$\varkappa_{ij}\cdot 10^2$
12	3.39	7.94
13	10.2	9.58
23	9.09	7.56

Отметим, что одномерные упругие и реономные характеристики Y_{ii}, $\varkappa_{ii}$ $(i = 1, 2)$ в формуле (3.3) целесообразней определять из испытаний на чистый (квазичистый) изгиб. Это позволит нивелировать погрешности, вносимые второй гипотезой § 1 при рассмотрении неоднородного поля напряжений и деформаций при изгибе.

Оставшиеся реономные параметры μ_{ij} находим из следующей системы шести линейных операторных уравнений, расшифровывая первую гипотезу § 1 (уравнения 1 — 3) и учитывая, что высокоэластические деформации не вызывают изменения объема (уравнения 4 — 6):

$$\overline{Y}_{jj}\overline{Y}_{ii} = \overline{\nu}_{ij}\overline{\nu}_{ji}^{-1}, \qquad \begin{matrix}1)\\2)\\3)\end{matrix} \quad i, j = \begin{cases}1, 2\\2, 3\\3, 1\end{cases}$$

$$(1 - \overline{\nu}_{ij} - \overline{\nu}_{ik})\,\overline{Y}_{ii} = Y_{ii}\,(1 - \nu_{ij} - \nu_{ik}), \qquad \begin{matrix}4)\\5)\\6)\end{matrix} \quad i, j, k = \begin{cases}1, 2, 3\\2, 1, 3\\3, 1, 2\end{cases} \tag{3.4}$$

Здесь переменные индексы принимают соответственные значения: так для первого уравнения $i=1$; $j=2,\ldots$ для четвертого — $i=1$, $j=2$, $k=3$ и т. д. Опуская громоздкие выкладки, получаем окончательно

$$\mu_{ij}=\frac{\varkappa_{ii}}{2\nu_{ij}}\left(1+\frac{Y_{jj}}{Y_{ii}}\frac{\varkappa_{jj}}{\varkappa_{ii}}-\frac{Y_{kk}}{Y_{ii}}\frac{\varkappa_{kk}}{\varkappa_{ii}}-2\nu_{ij}\right) \tag{3.5}$$

где i, j, k — циклично переставимые индексы дискретных значений 1, 2, 3, причем последнему переменному индексу приписывается знак минус.

В случае изотропного тела из равенства (3.5) следует известный результат Работнова Ю. Н. [11] (стр. 153), полученный в предположении отсутствия объемного последействия. Заметим, что для рассматриваемого ортотропного континуума оператор дилатации также постоянен во времени.

Таблица 3

Реономные параметры μ_{ij}, мгновенно-упругие ν_{ij} и длительные $\nu_{ij}(\infty)$ коэффициенты Пуассона

Индексы	ν_{ij}	$\nu_{ij}(\infty)$	μ_{ij}
12	0.144	0.171	0.218
21	0.101	0.112	0.136
13	0.510	0.519	0.017
31	0.371	0.345	−0.29
23	0.550	0.596	0.100
32	0.574	0.611	0.077

Соотношение (3.5) при $i=1$, $j=2$, $k=3$ позволяет объяснить наблюдаемое рядом исследователей [4], [12] уменьшение во времени коэффициента ν_{12}. Это, по-видимому, имеет место для ориентированных нетканых слоистых стеклокомпаундов, податливость которых по толщине из-за наличия полимерных макропрослоек существенно выше податливости в направлениях армирования 11, 22. Для стеклотекстолитов (табл. 1) эта разница существенно сглаживается, и, как правило, μ_{12} (табл. 3). Естественно, возможен и граничный случай стабильности коэффициента Пуассона ν_{12} во времени ($\mu_{12}=0$).

§ 4. Рассмотрим вопрос об определении линейных и сдвиговых реономных параметров модели для направлений и плоскостей, отличных от главных. Как и упругие, операторные коэффициенты деформаций рассматриваемой модели образуют в шестимерном пространстве симметричный тензор, компоненты которого в операторном виде преобразуются по известным [8] правилам тензорного анализа.

$$\begin{array}{cccccc} \overline{Y}_{11} & -\overline{\nu}_{12}\overline{Y}_{11} & -\overline{\nu}_{13}\overline{Y}_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & \overline{Y}_{22} & -\overline{\nu}_{23}\overline{Y}_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & \overline{Y}_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \overline{Y}_{23} & 0 & 0 \\ & & & & \overline{Y}_{13} & 0 \\ & & & & & \overline{Y}_{12} \end{array} \quad (4.1)$$

Ограничиваясь лишь поворотом операторных компонентов тензора (4.1) в плоскости 12 на угол φ по отношению к основе 11 (фиг. 2), получаем окончательно операторные аналоги преобразованных упругих констант модели в виде ($i = m, n, 3$)

$$\overline{Y}_{mi} = Y_{mi}[1 + \varkappa_{mi} K^*(0)]; \quad \overline{\nu}_{mn} = \nu_{mn}[1 + \mu_{mn} K^*(-\varkappa_{mm})] \quad (4.2)$$

где

$$\varkappa_{mm} = \frac{\varkappa_{11} Y_{11} \cos^4\varphi + 0.25[\varkappa_{12} Y_{12} - 2\nu_{12} Y_{11}(\varkappa_{11} + \mu_{12})]\sin^2 2\varphi + \varkappa_{22} Y_{22}\sin^4\varphi}{Y_{11}\cos^4\varphi + 0.25(Y_{12} - 2\nu_{12} Y_{11})\sin^2 2\varphi + Y_{22}\sin^4\varphi} \quad (4.3)$$

$$\varkappa_{mn} = \frac{\varkappa_{12} Y_{12} + [\varkappa_{11} Y_{11} + \varkappa_{22} Y_{22} + 2\nu_{12} Y_{11}(\varkappa_{11} + \mu_{12}) - \varkappa_{12} Y_{12}]\sin^2 2\varphi}{Y_{12} + [(1 + 2\nu_{12}) Y_{11} + Y_{22} - Y_{12}]\sin^2 2\varphi} \quad (4.4)$$

$$\varkappa_{m3} = \frac{\varkappa_{23} Y_{23}\sin^2\varphi + \varkappa_{13} Y_{13}\cos^2\varphi}{Y_{23}\sin^2\varphi + Y_{13}\cos^2\varphi} \quad (4.5)$$

$$\mu_{mn} = \frac{Y_{mm}^{-1}\{\nu_{12} Y_{11}(\varkappa_{11} + \mu_{12}) - 0.25[\varkappa_{11} Y_{11} + \varkappa_{22} Y_{22} + 2\nu_{12} Y_{11}(\varkappa_{11} + \mu_{12})]\sin^2 2\varphi\}}{[\nu_{12} Y_{11} - 0.25(Y_{mn} - Y_{12})] Y_{mm}^{-1}} - \varkappa_{mm} \quad (4.6)$$

Выражения в знаменателях формул (4.3) — (4.6) совпадают с известными [3], [8] „повернутыми" упругими константами Y_{mm}, Y_{mn}, Y_{m3}, ν_{mn} (фиг. 2).

Анализ вышеприведенных формул показывает: если экстремальные упругие линейная Y_{mm} и сдвиговая Y_{mn} податливости исследуемой среды при $Y_{22} > Y_{11}$ имеют место при $\varphi > \pi/4$, то экстремум соответственных реономных параметров $\varkappa_{mm}$ и $\varkappa_{mn}$ наблюдается при $\varphi \leqslant \pi/4$. Для рассматриваемого стеклотекстолита (табл. 1, 2) указанные углы равны соответственно 48.3° и 44°. Отметим также практически полезную связь между реономным поведением модели при сдвиге в плоскости 12 и растяжением при $\varphi = \pi/4$ в направлении 44 (фиг. 2):

$$\varkappa_{44} = \varkappa_{12} - 0.25\, Y_{44}^{-1}\{Y_{11}(\varkappa_{12} - \varkappa_{11}) - 2\, Y_{22}[(\varkappa_{12} - \varkappa_{22})(1 - \nu_{21}) - \mu_{21}\nu_{21}]\}$$

Данное равенство ($\varkappa_{44} \sim 0.06$) удовлетворительно подтверждается экспериментом § 1 (фиг. 3).

Днепропетровский горный институт
Севастопольское ВВМИУ

Поступила 23 XI 1967

Վ. Ա. ՄԱՆԿՈՎՍԿԻ, Մ. Ի. ՌՈԶՈՎՍԿԻ

ԱՆԻԶՈՏՐՈՊ ԱՌԱՁԳԱ-ԺԱՌԱՆԳԱԿԱՆ ՄԻՋԱՎԱՅՐԵՐԻ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Ապակե տեքստոլիտի օրինակի վրա, առաջարկվում է օրթոտրոպ առաձգա-ժառանգական միջավայրի հաշվարկման սխեմա, ենթադրելով նյութի գծային և ոչ գծային սողքի գլխավոր չափերի նմանությունը։ Որպես կորիզներ օգտագործվում են կոտորակային կորիզի ընդհանրացված էքսպոնենցիալ ֆունկցիաները։

V. A. MANKOVSKY, M. J. ROSOVSKY

ON THE THEORY OF ANISOTROPIC ELASTICITY-HEREDITARY MEDIA

S u m m a r y

A calculating model of orthotropic elasticity-hereditary medium is suggested. Tissue glass reinforced plastics is taken as an example of this model.

A. R. Rzhanitsyn's kernel functions are used.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Королев В. И.* Слоистые анизотропные пластинки и оболочки из армированных пластмасс. Машиностроение, М., 1965.
2. *Киракосян Р. М.* О ползучести слоя стеклопластика при двухосном растяжении. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. XVIII, 1, 1965.
3. *Смирнова М. К.* и др. Прочность корпуса судна из стеклопластика. Судостроение, Л., 1965.
4. *Брызгалин Г. И.* К описанию анизотропной ползучести стеклопластиков. ПМТФ, 6, 1963.
5. *Kaye A.* Creep in an anisotropic medium. Brit. J. Appl. Phys., XV, 9, 1964.
6. *Колтунов М.А., Безухов В.Н.* Анализ ползучести ортотропного стеклопластика. Вестн. МГУ, мат.-мех., 6, 1963.
7. *Мартиросян М. М.* Описание ползучести стеклопластика СВАМ с помощью упруго-ползучего тела. Изв. АН АрмССР, механика, т. XIX, 6, 1966.
8. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. ГИТТЛ, М.—Л., 1950.
9. *Гуревич Г. И.* Об обобщении уравнения Максвелла на случай трех измерений с учетом малых деформаций упругого последействия. Тр. Ин-та Физики Земли АН СССР, 2(169), 1959.
10. *Слуцкий Е. Е.* Таблицы для вычисления неполной гамма-функции и функции вероятности χ^2. Изд. АН СССР, М.—Л., 1950.
11. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Наука, М., 1966.
12. *Смотрин Н. Т., Чебанов В. М.* Ползучесть СВАМ (5:1)—Б по различным направлениям в плоскости листа при малых напряжениях. Механика полимеров, 1, 1967.