ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

Р. М. КИРАКОСЯН

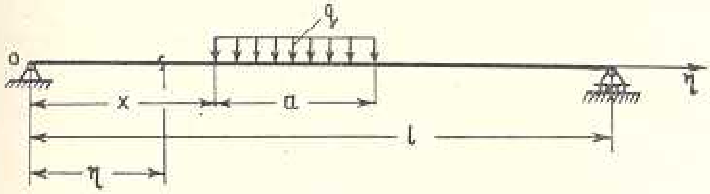
ОБ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОМ ИЗГИБЕ БАЛКИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

Задачи об упруго-пластических перемещениях балок при подвижных сосредоточенных силах рассматривались в работах Н. Л. Чернова ([1] и др). Настоящая работа посвящается упруго-пластическому изгибу балок при подвижных равномерно распределенных нагрузках.

Выясняется поведение упруго-пластических областей во время движения нагрузки и с помощью уравнений задачи упруго-пластического изгиба балки при ее статическом нагружении получаются дифференциальные уравнения поставленной задачи, которые легко интегрируемы в квадратурах. Приведен численный пример.

1. Постановка задачи

Рассмотрим балку длиной l и прямоугольным поперечным сечением высоты $2h$, свободно лежащую на двух опорах. Пусть балка несет равномерно распределенную нагрузку интенсивности q с длиной участка распределения $a < l/2$, положение которой будем определять абсциссой левого края участка ее распределения x (фиг. 1).



Фиг. 1.

В настоящей работе, пренебрегая влияниями касательных напряжений и сил инерции, в геометрически линейной постановке будем рассматривать задачу об упруго-пластическом изгибе балки, когда нагрузка от положения $x = -a$ движется в сторону другой опоры балки $\eta = l$.

2. Изгиб балки под действием статически приложенной (неподвижной) нагрузки

Известно [2], что в рамках принятых допущений изгиб упруго-пластически деформируемого участка статически нагруженной балки можно описать зависимостью между кривизной оси и изгибающим моментом балки при ее чистом изгибе

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} = f(M) \tag{2.1}$$

Здесь w — прогиб, M — изгибающий момент сечений балки.

Что касается изгиба упруго-деформируемой части балки, то для него имеем уравнение

$$\frac{d^2 w}{d\eta^2} = -\frac{M}{EJ} \tag{2.2}$$

где E — модуль Юнга материала, J — инерция поперечного сечения балки.

Очевидно, что решение задачи изгиба балки, имеющей одновременно упруго и упруго-пластически деформируемые части, сводится к интегрированию уравнений (2.1) и (2.2) в соответствующих промежутках с подходящим использованием формул изгибающих моментов

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{aq}{2l}(2l-2x-a)\eta, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant x \\ M_2 &= \frac{aq}{2l}(2l-2x-a)\eta - \frac{q}{2}(\eta - x)^2, \qquad x \leqslant \eta \leqslant x+a \\ M_3 &= \frac{aq}{2l}(a+2x)(l-\eta), \qquad x+a \leqslant \eta \leqslant l \end{aligned} \tag{2.3}$$

граничных условий свободного опирания краев, а также условий неразрывности балки.

Так как наибольший изгибающий момент получится в срединном сечении пролета балки $\eta = l/2$ при симметричном расположении нагрузки $x = (l-a)/2$, то для возможности появления упруго-пластических деформаций необходимо по крайней мере потребовать, чтобы

$$aqh(2l-a) > 8EJ\varepsilon_s \tag{2.4}$$

Максимальный изгибающий момент при данном расположении нагрузки (при фиксированном x) действует в сечении η^*, находящемся под нагрузкой

$$\eta^* = x + \frac{a}{2l}(2l-2x-a), \qquad (x < \eta^* < x+a) \tag{2.5}$$

и имеет значение

$$M_{max}\big|_{x=\text{const}} = \frac{aq(2l-a)}{8l^2}\left[a(2l-a) + 4x(l-a) - 4x^2\right] \tag{2.6}$$

Нетрудно убедиться в том, что в случае

$$a^2 qh(2l-a)^2 < 8EJ\varepsilon_s l^2 \tag{2.7}$$

при приложении нагрузки в непосредственной близости к опоре ($x = 0$) даже в сечении с максимальным изгибающим моментом $\eta^*|_{x=0}$ пластические деформации не образуются, а в противном случае образуется область упруго-пластических деформаций, включающая в себя сечение $\eta^*|_{x=0}$.

Очевидно, что при одновременном соблюдении условий (2.4) и (2.7) будет существовать некоторый участок

$$x_0 < \eta < l - x_0 \tag{2.8}$$

$$x_0 = \frac{l-a}{2} - \frac{l}{2}\sqrt{1 - \frac{8EJ\varepsilon_s}{aqh(2l-a)}}, \quad \left(0 < x_0 < \frac{l-a}{2}\right) \tag{2.9}$$

симметричный относительно середины пролета $\eta = l/2$, приложение нагрузки вне пределов которого (т. е. при $0 \leqslant x < x_0$ и $l - a - x_0 < x \leqslant l$) нигде не образует пластических деформаций, а в его пределах (т. е. при $x_0 < x < l - a - x_0$) в некоторой части балки

$$\eta_1 \leqslant \eta \leqslant \eta_2 \tag{2.10}$$

образует область упруго-пластических деформаций, включающую в себя соответствующие сечения максимальных моментов η^*. При этом возможны случаи, когда упруго-пластическая область или вообще не выходит, или местами частично выходит из-под участка распределения нагрузки $x \leqslant \eta \leqslant x + a$.

Имея в виду то обстоятельство, что изгибающий момент сечений $\eta = x$ и $\eta = x + a$ свое наибольшее значение получает при расположениях нагрузки $x = (2l - a)/4$ и $x = (2l - 3a)/4$ соответственно, легко заключить, что при

$$aqh(2l - a)^2 \leqslant 16EJ\varepsilon_s l \tag{2.11}$$

область упруго-пластических деформаций не выходит из-под нагрузки. В этом случае для граничных сечений η_1 и η_2 получим

$$\eta_{1,2} = x + \frac{a(2l - 2x - a)}{2l} \mp$$

$$\mp \frac{1}{2qhl}\sqrt{aq^2h^2(2l-2x-a)(2x+a)(2l-a) - 8EJ\varepsilon_s qhl^2} \tag{2.12}$$

$$(x \leqslant \eta_1 < \eta_2 \leqslant x + a)$$

Сравнительно сложно выглядит картина для остальных случаев, когда область упруго-пластических деформаций может слева или справа или одновременно и слева и справа выходить из-под участка распределения нагрузки. Для простоты, в дальнейшем будем рассматривать случаи нагрузок, ограниченных снизу и сверху неравенствами (2.4) и (2.11)*.

---

* В случае $a < l/2$ условие (2.11) является более сильным ограничением для нагрузки сверху, чем условие (2.7).

3. Изгиб балки под действием движущейся нагрузки

Из выражений изгибающих моментов (2.3) следует, что существует некоторое сечение под нагрузкой

$$\gamma_0 = \frac{lx}{l-a}, \quad (x \leqslant \gamma_0 < x + a) \tag{3.1}$$

которое при движении нагрузки является границей раздела областей разгрузки и нагружения. Таким образом, в сечениях балки

$$0 \leqslant \gamma < \frac{lx}{l-a} \tag{3.2}$$

происходит разгрузка, а в остальных сечениях

$$\frac{lx}{l-a} < \gamma \leqslant l \tag{3.3}$$

— нагружение.

С движением нагрузки (с возрастанием x) граница раздела областей разгрузки и нагружения γ_0 непрерывно перемещается в сторону движения нагрузки, в силу чего область разгрузки (3.2) односторонне распространяется, а область нагружения (3.3), наоборот, суживается.

Исследуя поведение изменения изгибающих моментов в произвольном фиксированном сечении балки γ во время движения нагрузки, заключаем, что наибольший изгибающий момент в данном сечении

$$M_0 = M_{\max}\big|_{\gamma=\text{const}} = \frac{aq\gamma(2l-a)}{2l^2}(l-\gamma) \tag{3.4}$$

возникает при

$$x = \frac{l-a}{l}\gamma, \quad \left(\gamma = \frac{lx}{l-a}\right) \tag{3.5}$$

т. е. при таком расположении нагрузки, при котором рассмотренное сечение балки является границей раздела областей разгрузки и нагружения. Таким образом, как и следовало ожидать, граница раздела областей разгрузки и нагружения γ_0 с собой несет максимальные для каждого сечения балки значения изгибающих моментов.

Сравнение значений абсцисс сечения максимальных моментов γ^* и границы раздела областей разгрузки и нагружения γ_0 приводит к неравенствам

$$\begin{gathered} \gamma_0 < \gamma^* \text{ при } 0 \leqslant x < \frac{l-a}{2} \\ \gamma_0 > \gamma^* \text{ при } \frac{l-a}{2} < x \leqslant l \end{gathered} \tag{3.6}$$

которые означают, что, пока нагрузка не приняла симметричного расположения относительно середины пролета балки $\eta = l/2$ (при $x < (l-a)/2$), сечение максимальных моментов η^* находится в области нагружения, после чего (при $x > (l-a)/2$), наоборот, оно находится в области разгрузки*.

Ясно, что предел упругих деформаций ε_s впервые достигается в крайних волокнах сечения максимального момента η^* при $x = x_0$. Но так как $x_0 < (l-a)/2$, из вышеизложенного следует, что при дальнейшем движении нагрузки в первичном упруго-пластическом сечении $\eta^*(x_0)$ некоторое время продолжится процесс *нагружения*. В результате этого вокруг сечения $\eta^*(x_0)$ образуется область упруго-пластических деформаций (2.10), которая с движением нагрузки распространяется налево, направо и в глубь балки. Очевидно, что такое трехстороннее распространение упруго-пластической области продолжится до тех пор, пока односторонне распространяющаяся область разгрузки не доходит до нее.

Из условий

$$\eta_0 = \eta_{1,2} \tag{3.7}$$

с учетом (2.12) и (3.1) для положений нагрузки, при которых граница раздела областей разгрузки и нагружения совпадает соответственно с левым и правым краями упруго-пластической области, получаем

$$x_{1,2} = \frac{l-a}{2}\left[1 \mp \sqrt{1 - \frac{8EJ\varepsilon_s}{aqh(2l-a)}}\right] \tag{3.8}$$

Таким образом, область разгрузки при $x = x_1 > x_0$ в сечении $\eta_1(x_1)$ доходит до левого края упруго-пластической области, после чего, распространяясь дальше, она включает в себя все новые и новые сечения упруго-пластического деформирования. При $x = (l-a)/2$ в сечении $\eta = l/2$ область разгрузки догоняет, а потом переходит сечения максимальных моментов η^*. Когда $x = x_2$ ($x_2 > x_1$), область разгрузки в сечении $\eta_2(x_2)$ догоняет и правый край упруго-пластического деформирования, тем самым прекращая дальнейшее ее распространение.

Очевидно, что каждое сечение η, находящееся в области разгрузки (3.2), разгружается от своего наибольшего значения изгибающего момента M_0 до того значения M, которое соответствует данному расположению нагрузки x.

Следовательно, размер разгрузки в сечениях $\eta < \eta_0$ будет

$$\Delta M_2 = M_0 - M_2 = \frac{q}{2l^2}\left[l^2(\eta - x)^2 + a\eta(2lx - 2l\eta + a\eta)\right] \tag{3.9}$$

$$\text{при } x < \eta < x + a$$

$$\Delta M_1 = M_0 - M_1 = \frac{aq}{2l^2}\left[2lx - \eta(2l-a)\right]\eta \quad \text{при } \eta < x \tag{3.10}$$

* Этот результат можно получить и из выражения максимальных моментов (2.6), откуда явно видно, что максимальный момент с движением нагрузки, пока $x < (l-a)/2$, возрастает, после чего начинает убывать.

Пользуясь вышеизложенным анализом поведений областей разгрузки и упруго-пластического деформирования во время движения нагрузки, перейдем к построению систем дифференциальных уравнений изгиба характерных участков балки при различных расположениях движущейся нагрузки.

Пусть нагрузка, удовлетворяющая условиям (2.4) и (2.11), из положения $x = -a$ движется в сторону другой опоры балки $\eta = l$. Ясно, что, пока $x < x_0$, балка будет изгибаться только упруго (причем, пока $x < 0$, она будет изгибаться под действием нагрузки с удлиняющимся участком распределения $a' = a + x$), в силу чего наблюдение за движением нагрузки имеет смысл лишь при $x > x_0$.

Так как при $x_0 < x < x_1$ упруго-пластически деформируемый участок балки (2.10) находится под нагрузкой и непрерывно нагружается, то изгиб этого участка опишется дифференциальным уравнением (2.1), где следует брать $M = M_2$.

Изгиб остальных, упруго-деформируемых, участков балки, для которых неважно в каких условиях (нагружения или разгрузки) они деформируются, опишется дифференциальным уравнением (2.2) с подходящим выбором формулы изгибающего момента. Следовательно, система дифференциальных уравнений задачи при расположении движущейся нагрузки $x_0 < x < x_1$ примет вид

$$(x_0 < x < x_1)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ} && 0 \leqslant \eta < x \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ} && x < \eta < \eta_1 \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_2) && \eta_1 < \eta < \eta_2 \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ} && \eta_2 < \eta < x + a \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_3}{EJ} && x + a < \eta \leqslant l
\end{aligned} \tag{3.11}$$

При расположениях нагрузки $x_1 < x < \dfrac{lx_2}{l-a}$ необходимо различать следующие два случая:

$$\frac{lx_1}{l-a} \geqslant x_2 \tag{3.12}$$

$$\frac{lx_1}{l-a} < x_2 \tag{3.13}$$

Для краткости рассмотрим только случай (3.12).

Тогда разгружаемая часть $\frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx}{l-a}$ упруго-пластически деформируемого участка балки при $x_1 < x < x_2$ целиком находится под нагрузкой и, следовательно, разгружается в размере ΔM_2. Имея в виду, что разгрузка является упругим процессом и то, что каждое упруго-пластическое сечение разгружается от значения кривизны $f(M_0)$, для этих сечений при $x_1 < x < x_2$ будем иметь

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_2}{EJ} \tag{3.14}$$

Ясно, что изгиб остальной нагружаемой части упруго-пластически деформируемого участка $\frac{lx}{l-a} < \eta < \eta_2$ опишется уравнением (2.1), а изгиб упруго деформируемых участков балки — уравнением (2.2). Следовательно, в случае (3.12), когда движущаяся нагрузка имеет расположение $x_1 < x < x_2$, система дифференциальных уравнений задачи будет

$$(x_1 < x < x_2)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, \quad 0 \leqslant \eta < x \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, \quad x < \eta < \frac{lx_1}{l-a} \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_2}{EJ}, \quad \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx}{l-a} \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_2), \quad \frac{lx}{l-a} < \eta < \eta_2 \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, \quad \eta_2 < \eta < x + a \\
&\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_3}{EJ}, \quad x + a < \eta \leqslant l
\end{aligned} \tag{3.15}$$

При $x_2 < x < \frac{lx_1}{l-a}$ упруго-пластический участок

$$\frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.16}$$

продолжает находиться под нагрузкой и *целиком* разгружается в размере ΔM_2. Имея в виду это обстоятельство, для системы дифференциальных уравнений задачи в данном случае получим

$$\left(x_2 < x < \frac{lx_1}{l-a} \right)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, \quad 0 \leqslant \eta < x$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, \quad x < \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_2}{EJ}, \quad \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.17}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^3} = -\frac{M_2}{EJ}, \quad \frac{lx_2}{l-a} < \eta < x + a$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_3}{EJ}, \quad x + a < \eta \leqslant l$$

Далее возможны два случая

$$\frac{lx_2}{l-a} + a \leqslant l \tag{3.18}$$

$$\frac{lx_2}{l-a} + a > l \tag{3.19}$$

В случае (3.18) при $\frac{lx_1}{l-a} < x < \frac{lx_2}{l-a}$ нагрузка не доходит до правой опоры балки $\eta = l$. В случае же (3.19) она при $x = l - a < \frac{lx_2}{l-a}$ доходит до этой опоры и в дальнейшем на балку действует с укорачивающимся участком распределения

$$a' = a - x \tag{3.20}$$

Отметим, что сечения упруго-пластического участка балки $\frac{lx_1}{l-a} < \eta \leqslant x$, которые освобождаются от нагрузки, будут разгружаться на ΔM_1.

Приведем системы дифференциальных уравнений задачи только для случая (3.18)

$$\left(\frac{lx_1}{l-a} < x < \frac{lx_2}{l-a} \right)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, \quad 0 \leqslant \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_1}{EJ}, \quad \frac{lx_1}{EJ} < \eta < x$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_2}{EJ}, \quad x < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.21}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, \quad \frac{lx_2}{l-a} < \eta < x + a$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_3}{EJ}, \quad x + a < \eta \leqslant l$$

$$\left(\frac{lx_2}{l-a} < x < l - a\right)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, \quad 0 \leqslant \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{\Delta M_1}{EJ}, \quad \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1}{EJ}, \quad \frac{lx_2}{l-a} < \eta < x \tag{3.22}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2}{EJ}, \quad x < \eta < x + a$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_3}{EJ}, \quad x + a < \eta \leqslant l$$

$$(l - a < x \leqslant l)$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1'}{EJ}, \quad 0 \leqslant \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{M_0 - M_1'}{EJ}, \quad \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.23}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_1'}{EJ}, \quad \frac{lx_2}{l-a} < \eta < x$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = -\frac{M_2'}{EJ}, \quad x < \eta \leqslant l$$

Здесь штрихом обозначены значения изгибающих моментов балки от нагрузки с длиной участка распределения a'.

Полагая в (3.23) $x = l$, получим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = 0, \quad 0 \leqslant \eta < \frac{lx_1}{l-a}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = f(M_0) + \frac{M_0}{EJ}, \quad \frac{lx_1}{l-a} < \eta < \frac{lx_2}{l-a} \tag{3.24}$$

$$\frac{d^2w}{d\eta^2} = 0, \quad \frac{lx_2}{l-a} < \eta \leqslant l$$

соответствующую случаю, когда нагрузка выходит за пределы балки. Аналогичным путем можно составить дифференциальные уравнения для остальных случаев.

Наконец, отметим, что все рассмотренные дифференциальные уравнения легко интегрируемы в квадратурах, так как их правые части являются известными функциями η и x. Отметим также, что к краевым условиям свободного опирания концов балки в каждом конкретном случае следует присоединить еще условия ее неразрывности (непрерывности w и $dw/d\eta$) в сечениях, разделяющих характерные участки балки.

Естественно, что вышеприведенные системы дифференциальных уравнений упруго-пластического изгиба балки при $x > x_1$ отличаются от соответствующих систем изгиба балки под действием неподвижной (статически приложенной) нагрузки. Эта разница обусловлена *только* тем, что в случае движущейся нагрузки существуют участки разгрузки, в сечениях которых кривизна оси балки за счет остаточных пластических деформаций больше, чем в случае неподвижной нагрузки. Исходя из этих рассуждений и имея в виду неразрывность балки, можно заключить, что при $x > x_1$ прогибы неопорных сечений балки в случае движущейся нагрузки больше, чем в случае неподвижной нагрузки. Вопрос о том, как именно зависят прогибы балки от способа ее нагружения, можно выяснить после окончательного решения вышеприведенных систем дифференциальных уравнений, что, по-видимому, возможно лишь численным путем.

Численный пример

Пусть материал балки таков, что для него справедливы соотношения теории малых упруго-пластических деформаций с линейным упрочнением [2]

$$
\begin{aligned}
&\sigma = E\varepsilon && 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_s \\
&\sigma = A + B\varepsilon && \varepsilon \geqslant \varepsilon_s \qquad (4.1)\\
&d\sigma = Ed\varepsilon && d\varepsilon < 0 \quad (\varepsilon > 0)
\end{aligned}
$$

Здесь σ, ε — напряжение и деформация, ε_s — предел упругих деформаций, E — модуль Юнга, B и $A = (E - B)\,\varepsilon_s$ — характеристики материала за пределом упругости.

Тогда нетрудно убедиться в том, что зависимость между кривизной и изгибающим моментом оси балки при чистом упруго-пластическом ее изгибе (2.1) является отрицательным решением кубического уравнения

$$
\left(\frac{d^2w}{d\eta^2}\right)^3 + \frac{3\,(M - Ah^2b)}{2Bh^3b}\left(\frac{d^2w}{d\eta^2}\right)^2 + \frac{A\varepsilon_s^2}{2Bh^3} = 0 \qquad (4.2)
$$

(b — ширина поперечного сечения).

Рассмотрим случай $x \geqslant l$, когда нагрузка выходит за пределы балки. Интегрируя уравнения (3.24) и удовлетворяя соответствующим условиям и при этом имея в виду симметричность функции

$$F(\eta) = f(M_0) + \frac{M_0}{EJ}$$

относительно середины пролета балки $\eta = l/2$, для прогибов получим

$$w = -\frac{C}{l\sqrt{1-\dfrac{8EJ\varepsilon_s}{aqh(2l-a)}}}\eta, \qquad 0 \leqslant \eta \leqslant \frac{lx_1}{l-a}$$

$$w = -\frac{C}{l\sqrt{1-\dfrac{8EJ\varepsilon_s}{aqh(2l-a)}}}\eta + R(\eta), \quad \frac{lx_1}{l-a} \leqslant \eta \leqslant \frac{lx_2}{l-a}$$

$$w = -\frac{C}{l\sqrt{1-\dfrac{8EJ\varepsilon_s}{aqh(2l-a)}}}(l-\eta), \quad \frac{lx_2}{l-a} \leqslant \eta \leqslant l$$

где приняты обозначения

$$R(\eta) = \int\limits_{\frac{lx_1}{l-a}}^{\eta}\left(\int\limits_{\frac{lx_1}{l-a}}^{\eta} F(\eta)\,d\eta\right)d\eta, \quad C = R(\eta)\Big|_{\eta=\frac{lx_2}{l-a}}$$

Для иллюстрации рассмотрим следующий числовой пример:

$$E = 10^6\ кг/см^2, \quad A = 990\ кг/см^2, \quad B = 10^4\ кг/см^2,$$

$$\varepsilon_s = 10^{-3}, \quad b = 1\ см, \quad h = 5\ см, \quad l = 300\ см, \quad a = 50\ см,$$

$$q = 6\ кг/см, \quad (EJ\varepsilon_s = 83333\ кг/см^2)$$

В нижеприведенной таблице представлены значения функции $R(\eta)$ для некоторых сечений промежутка $\frac{lx_1}{l-a} \leqslant \eta < l/2$.

$$(C = -0.079\ см)$$

η см	84.28	90.41	94.39	98.33	102.25	106.19	110.19	114.30	118.60	123.23	128.42	134.81	150
$R(\eta)\cdot 10^{-4}$ см	0	0.021	0.14	0.50	1.31	2.84	5.45	9.63	16.10	26.04	41.67	68.62	86.25

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 19 I 1968

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍՅԱՆ

ՇԱՐԺՎՈՂ ԲԵՌԻ ԱԶԴԵՑՈՒԹՅԱՆ ՏԱԿ ԳՏՆՎՈՂ ՀԵԾԱՆԻ ԱՌԱՁԳԱ-ՊԼԱՍՏԻԿԱԿԱՆ ԾՌՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Դիտարկվում է հեծանի առաձգա-պլաստիկական ծռման խնդիրը հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ, երբ բեռը դանդաղ շարժվում է հեծանի մի հենարանից դեպի մյուսը։ Պարզաբանելով հեծանի առաձգա-պլաստիկական տիրույթների վարքը բեռի շարժման ժամանակ, գծայնորեն ամրացվող նյութի փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների տեսության [2] հիման վրա, ստացվում են խնդրի դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնք հեշտ ինտեգրելի են քառակուսացման միջոցով։ Դիտարկված է թվային օրինակ։

R. M. KIRAKOSIAN

ON THE ELASTIC-PLASTIC BENDING OF A BEAM UNDER A MOVING LOAD

Summary

The problem of an elastic-plastic bending of a beam under the action of a uniformly distributed load is considered. The load moves slowly and unilaterally from one support of the beam to the other.

The behaviour of elastic-plastic regions of the beam at the time of motion of the load on the basis of the theory of some elastic-plastic deformations [2] of linear strengthening materials is considered. The differential equations of the problem are obtained, which is easily integrated by the quadrature. A numerical example is considered.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чернов Н. Л.* Об упруго-пластических перемещениях двутавровых балок при подвижных нагрузках. Прикл. механика, т. III, вып. 8, 1967.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. Гостехиздат, М.—Л., 1948.