ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 5—6, 1968 Механика

С. М. МХИТАРЯН

О НЕКОТОРЫХ ПЛОСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С УЧЕТОМ СИЛ СЦЕПЛЕНИЯ И СВЯЗАННЫХ С НИМИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

В настоящей работе эффективно решаются линейные интегральные уравнения первого рода

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\sin\dfrac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)\quad(\alpha<\pi)\quad(0.1)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\operatorname{sh}\dfrac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)\quad(\alpha<\infty)\quad(0.2)$$

$$(|\mu|<\infty)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\operatorname{ctg}\frac{|t-\tau|}{4}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)\quad(\alpha<\pi)\quad(0.3)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\operatorname{cth}\frac{|t-\tau|}{4}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\varphi(\tau)\,d\tau=f(t)\quad(\alpha<\infty)\quad(0.4)$$

Первым интегральным уравнением описывается плоская периодическая контактная задача теории упругости с учетом сил сцепления. Эта задача сведением к краевой задаче Римана—Гильберта рассматривалась в [1, 2, 3].

Третьим интегральным уравнением описывается плоская периодическая контактная задача с учетом сил сцепления, когда в одном периоде имеются два равных, кососимметрически нагруженных участка контакта. Эта задача без учета сил сцепления была рассмотрена в работе [4].

К решению последнего интегрального уравнения можно свести решение плоской контактной задачи с учетом сил сцепления с двумя равными, расположенными симметрично относительно начала координат и кососимметрично нагруженными участками контакта. Во всех этих задачах $0<\mu<\dfrac{\ln 3}{2\pi}$.

Решения интегральных уравнений* (0.1) — (0.4), свободные от сингулярных интегралов в смысле Коши, получены методом М. Г. Крейна**. С этой целью предварительно построены решения этих же уравнений при правых частях, равных единице.

Затем, отправляясь от результатов М. Г. Крейна [8], по обратным задачам спектральной теории дифференциальных уравнений, порождаемых эрмитовыми акселерантами, составляются соответствующие этим интегральным уравнениям дифференциальные системы.

Для произвольной двумерной вектор-функции из $L^2_n(0, T)$ получены формулы разложения по фундаментальным функциям канонических систем, эквивалентных этим дифференциальным системам.

Эти фундаментальные функции, по-видимому, образуют новый класс ортогональных, полных систем функций и выяснение некоторых вопросов, связанных с разложениями по этим функциям, подлежит дальнейшему исследованию.

Дифференцированием обеих частей уравнений (0.1) — (0.4) получаются сингулярные интегральные уравнения с ядром Гильберта и родственными ядрами:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{ctg}\frac{\tau-t}{2}\,\varphi(\tau)\,d\tau=\operatorname{th}\pi\mu\,\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}f'(t)\tag{0.1'}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\operatorname{cth}\frac{\tau-t}{2}\,\varphi(\tau)\,d\tau=\operatorname{th}\pi\mu\,\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}f'(t)\tag{0.2'}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\sin\dfrac{\tau-t}{2}}=\operatorname{th}\pi\mu\,\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}f'(t)\tag{0.3'}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\alpha}^{\alpha}\frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\operatorname{sh}\dfrac{\tau-t}{2}}=\operatorname{th}\pi\mu\,\varphi(t)+\frac{1}{\pi i}f'(t)\tag{0.4'}$$

Интегральные уравнения аналогичной структуры рассматриваются в работах [9, 10].

Решения интегральных уравнений (0.1) — (0.4) при $f(t)=\mathrm{const}$ являются обобщенными собственными функциями соответственно операторов, стоящих в левых частях (0.1′) — (0.4′). Последние рассматриваются в $L^2(-\alpha, \alpha)$.

---

* Решения интегральных уравнений (0.1), (0.2) и (0.4) при $\mu=0$ получены в [5, 6, 7]. Интегральное уравнение (0.3) при $\mu=0$ рассмотрено в [4].

** Этот общий метод решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода, впервые опубликованный в работах [5, 6], подробно изложен в книге [7].

Устанавливается связь обобщенных собственных функций в случаях* (0.3′) и (0.4′) с некоторыми дифференциальными уравнениями, отправляясь от которых выписываются формулы разложений произвольной функции из $L^2(-\alpha, \alpha)$ по этим функциям. Эти разложения аналогичны разложениям по обобщенным собственным функциям конечного преобразования Гильберта, исследованным в работе [11].

§ 1. В этом параграфе будут доказаны следующие важные соотношения:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=A_\mu(\alpha) \qquad (1.1)$$

$$(|t|<\alpha<\pi;\ |\mu|<\infty)$$

где

$$A_\mu(\alpha)=\frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\mu}\left[B_{\exp(2i\alpha)}\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ 0\right)+B_{\exp(2i\alpha)}\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ 0\right)+\right.$$

$$+2i\,\mathrm{Im}\,\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)-2\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)+2\Psi(1)-2\ln 2\sin\alpha-$$

$$\left.-2\pi i\,\mathrm{th}\,\pi\mu-i\pi\right]$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=\frac{\pi t}{\mathrm{ch}\,\pi\mu} \qquad (1.2)$$

$$(|t|<\alpha<\pi;\ |\mu|<\infty);$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\,\mathrm{th}\,\pi\mu\,\mathrm{sign}\,(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\mathrm{ch}\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\mathrm{sh}\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\mathrm{sh}\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=B_\mu(\alpha) \qquad (1.3)$$

$$(|t|<\alpha<\infty;\ |\mu|<\infty)$$

где

$$B_\mu(\alpha)=\frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\mu}\left\{\mathrm{Re}\,B_{\exp(2\alpha)}\left(\frac{1}{2}+i\mu,\ 0\right)+2i\,\mathrm{Im}\,\Psi\left(\frac{1}{2}+i\mu\right)-\right.$$

---

* В первых двух случаях дело обстоит сложнее и здесь не обсуждается.

$$-2\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)+2\Psi(1)-2\ln 2\operatorname{sh}\alpha-2\pi i\operatorname{th}\pi\mu\Big\}$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\operatorname{sh}\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\operatorname{sh}\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=\frac{\pi t}{\operatorname{ch}\pi\mu}\tag{1.4}$$

$$(|t|<\alpha<\infty;\ |\mu|<\infty)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\operatorname{ctg}\frac{|t-\tau|}{4}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\times$$

$$\times\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu}\left[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos\alpha)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)\right]\tag{1.5}$$

$$(|t|<\alpha<\pi;\ |\mu|<\infty)$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\operatorname{ctg}\frac{|t-\tau|}{4}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\times$$

$$\times\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=\frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu}\left[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)\right]\tag{1.6}$$

$$(|t|<\alpha<\infty;\ |\mu|<\infty)$$

В этих соотношениях $B_\gamma(x, y)$ означает неполную бэта-функцию [12], $\Psi(x)$ — пси функцию Эйлера [12], а $Q_\nu(x)$ — функцию Лежандра второго рода индекса ν.

Для доказательства соотношений (1.1) и (1.2) рассмотрим бесконечнозначную функцию $f(\zeta)=(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$ с точками ветвления $\zeta=a=e^{i\alpha}$ и $\zeta=\bar{a}=e^{-i\alpha}$ $(0<\alpha<\pi)$, лежащими на единичной окружности. Легко видеть, что в плоскости, разрезанной вдоль дуги $\bar{a}a$ окружности, можно выбрать однозначную аналитическую ветвь этой функции. Условимся выбирать ту ветвь этой функции, которая в окрестности бесконечно удаленной точки имеет разложение

$$f(\zeta)=\frac{1}{\zeta}+\frac{a_1}{\zeta^2}+\dots$$

Обозначив через s любую точку дуги $\bar{a}a$, к которой стремится точка ζ, на внешнем берегу разреза будем считать, что $\zeta-a$ и $\zeta-\bar{a}$ принимают соответственно значения $(a-s)e^{-\pi i}$ и $s-\bar{a}$, а на внутреннем берегу разреза — соответственно значения $(a-s)e^{\pi i}$ и $s-\bar{a}$.

Следовательно, выбранная нами ветвь функции $f(\zeta)$ на внешнем берегу разреза принимает значение $ie^{-\pi\mu}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$, а на внутреннем берегу разреза — значение* $(-i)e^{\pi\mu}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\times$ $\times(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$.

В области, ограниченной замкнутым контуром C вокруг разреза $\bar{a}a$ и окружностью Γ_R, мы вправе применить к выбранной ветви функции $f(\zeta)$ формулу Коши**

$$(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\left(-\oint\limits_{\Gamma_R}+\oint\limits_{C}\right)(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

где z — любая точка в упомянутой области.

Приняв во внимание поведение подынтегральной функции в окрестности бесконечно удаленной точки, можно показать, что при $R\to\infty$ первый интеграл исчезает и, следовательно,

$$(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{C}(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\frac{d\zeta}{\zeta-z}$$

Отсюда, стягивая контур C к резрезу $\bar{a}a$ и учитывая значения функции $f(\zeta)$ на внешнем и внутреннем берегах разреза, можем записать

$$\frac{\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\int\limits_{\bar{a}}^{a}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\frac{ds}{z-s}=(z-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(z-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$$

Далее, поступив как в работе [13], обе части этого соотношения проинтегрируем сперва по линии, соединяющей точку $\bar{a}$ и некоторую точку z, а затем по линии (a, z) и результаты сложим. Выполнение этих операций дает следующее соотношение:

$$\frac{2\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\int\limits_{\bar{a}}^{a}\ln(z-s)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}ds=F_{\pm}(z) \tag{1.7}$$

где

$$F_{\pm}(z)=\left(\int\limits_{\bar{a}}^{z}+\int\limits_{a}^{z}\right)(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\zeta+C_{\pm}$$

* Можно было бы эти значения получить, вычислив значения некоторой функции, в которую переходит функция $f(z)$ при конформном отображении единичного круга на верхнюю полуплоскость, на верхнем и нижнем берегах разреза по некоторому отрезку действительной оси.

** Здесь и в дальнейшем под символом $\oint$ будем понимать контурный интеграл, взятый по часовой стрелке.

Здесь произвольная постоянная C_+ соответствует случаю, когда линия интегрирования вместе с точкой z лежит вправо от разреза (например, в области, расположенной вправо от линии, состоящей из внешнего берега разреза и отрезков $(\infty, \bar{a})$, (a, ∞) прямой $x = \cos\alpha$), а C_- — случаю, когда линия интегрирования вместе с точкой z лежит влево от разреза (например, в области, расположенной влево от линии, состоящей из внутреннего берега разреза и тех же отрезков прямой $x = \cos\alpha$).

Наличие разных постоянных объясняется тем, что функция, стоящая в левой части соотношения (1.7), имеет на бесконечности точку ветвления.

Функции $F_\pm(z)$ представим в виде

$$F_\pm(z) = C_\pm + \int\limits_{l^\pm} (\zeta - a)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (\zeta - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} d\zeta + 2G(z) \tag{1.8}$$

где

$$G(z) = \int\limits_a^z (\zeta - a)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (\zeta - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} d\zeta$$

Интеграл в (1.8), учитывая значения подынтегральной функции на внешнем и внутреннем берегах разреза, по которым производится интегрирование, запишем в виде

$$\int\limits_{l^\pm} (\zeta - a)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (\zeta - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} d\zeta = \pm e^{\mp\pi\mu} \int\limits_{\bar{a}}^{a} (a - s)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (s - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} ds$$

Для вычисления последнего интеграла заметим, что по теореме Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\left(-\oint\limits_{\Gamma_R} + \oint\limits_{C}\right)(\zeta - a)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (\zeta - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} d\zeta = 0$$

Устремив R к бесконечности и стягивая контур C к разрезу, обнаружим, что упомянутый интеграл равен $\pi/\mathrm{ch}\,\pi\mu$. Поэтому соотношение (1. 8) можно переписать в виде

$$F_\pm(z) = C_\pm \pm i\frac{\pi e^{\mp\pi\mu}}{ch\pi\mu} + 2G(z) \tag{1.9}$$

Неизвестные пока постоянные $C_\pm$ определим из сравнения поведения при $z \to \infty$ левой и правой частей в соотношении (1.7). Легко видеть, что поведение левой части определяется соотношением

$$\ln(z - s) = \ln z + 0(1), \quad z \to \infty \tag{1.10}$$

Чтобы выяснить поведение правой части, преобразуем выражение функции $G(z)$. Положив $\frac{1}{2} - i\mu = \gamma$, эту функцию представим в виде

$$G(z) = \int_{a}^{z} \frac{1}{\zeta - a} \left(\frac{\zeta - a}{\zeta - \bar{a}} \right)^{\gamma} d\zeta$$

В результате замены

$$\frac{\zeta - a}{\zeta - \bar{a}} = w$$

и выполнения простых операций выражение $G(z)$ принимает вид

$$G(z) = \ln(z - \bar{a}) - \ln(a - \bar{a}) + \frac{1}{\gamma} \int_{0}^{\left(\frac{z-a}{z-\bar{a}}\right)^{\gamma}} \frac{1 - w^{\frac{1}{\gamma} - 1}}{1 - w^{\frac{1}{\gamma}}} dw$$

Отсюда легко получим, что

$$G(z) = \ln z - \ln(a - \bar{a}) - \Psi\left(\frac{1}{2} - i\mu\right) + \Psi(1) + 0(1), \quad z \to \infty \tag{1.11}$$

Принимая во внимание (1.9), (1.10) и (1.11), сравним поведение при $z \to \infty$ обеих частей соотношения (1.7). Это сравнение дает нам постоянные

$$\begin{aligned} C_{+} &= -\frac{i\pi e^{-\pi\mu}}{\operatorname{ch} \pi\mu} + 2\ln(a - \bar{a}) + 2\Psi\left(\frac{1}{2} - i\mu\right) - 2\Psi(1) \\ C_{-} &= \frac{i\pi e^{\pi\mu}}{\operatorname{ch} \pi\mu} + 2\ln(a - \bar{a}) + 2\Psi\left(\frac{1}{2} - i\mu\right) - 2\Psi(1) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Далее, обозначив через σ любую точку на внешнем (внутреннем) берегу разреза по дуге $\bar{a}a$, к которой стремится точка z и выбрав такую ветвь логарифма, что

$$\ln(z - s) \to \ln(\sigma - s), \text{ если } s \in \bar{a}\sigma$$

$$\ln(z - s) \to \ln(s - \sigma) - (+)\, i\pi, \text{ если } s \in \sigma a$$

из соотношения (1. 7) получим

$$\frac{2 \operatorname{ch} \pi\mu}{\pi} \left[\int_{\bar{a}}^{\sigma} \ln(\sigma - s)(a - s)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (s - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} ds + \right.$$

$$+ \int_{\sigma}^{a} \ln(s - \sigma)(a - s)^{-\frac{1}{2} - i\mu} (s - \bar{a})^{-\frac{1}{2} + i\mu} ds -$$

$$-i\pi\int_{\sigma}^{a}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds\Bigg]=$$

$$=ie^{-\pi\mu}\left(\int_{\bar{a}}^{\sigma}+\int_{a}^{\sigma}\right)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds+C_{+}$$

$$\frac{2\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\Bigg[\int_{\bar{a}}^{\sigma}\ln(\sigma-s)\,(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds+$$

$$+\int_{\sigma}^{a}\ln(s-\sigma)\,(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds+$$

$$+i\pi\int_{\sigma}^{a}(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds\Bigg]=$$

$$=-ie^{\pi\mu}\left(\int_{\bar{a}}^{\sigma}+\int_{a}^{\sigma}\right)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds+C_{-}$$

Сложив эти соотношения и приняв во внимание (1.12), можем записать

$$\frac{4\operatorname{ch}\pi\mu}{\pi}\Bigg[\int_{\bar{a}}^{\sigma}\ln(\sigma-s)\,(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds+$$

$$+\int_{\sigma}^{a}\ln(s-\sigma)\,(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds\Bigg]=$$

$$=-2i\operatorname{sh}\pi\mu\left(\int_{\bar{a}}^{\sigma}-\int_{a}^{\sigma}\right)(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\bar{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}\,ds+$$

$$+\frac{2\pi i\operatorname{sh}\pi\mu}{\operatorname{ch}\pi\mu}+4\ln(a-\bar{a})+4\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)-4\Psi(1)$$

Положив в последнем соотношении $\sigma=e^{it}$, $s=e^{i\tau}$ и $a=e^{i\alpha}$, после элементарных операций придем к следующему:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha}\Bigg[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\Bigg]\times$$

$$\times\cos\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau+$$

$$+i\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\left[\ln\frac{1}{2\sin\frac{|t-\tau|}{2}}-\frac{i\pi}{2}\operatorname{th}\pi\mu\operatorname{sign}(t-\tau)\right]\times$$

$$\times\sin\left(\frac{\tau}{2}-i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau=$$

$$=\frac{i\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu}t+\frac{C_\mu}{2}-\frac{i\pi^2\operatorname{sh}\pi\mu}{\operatorname{ch}^2\pi\mu}-\frac{2\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu}\ln 2\sin\alpha+\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)-\Psi(1)\quad(1.13)$$

где

$$C_\mu=i\int\limits_{-\alpha}^{\alpha}\tau e^{\mu\alpha+\frac{i\tau}{2}}\left(\sin\frac{\alpha-\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+\tau}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}d\tau$$

Чтобы вычислить эту действительную постоянную, переходим обратно к дуге $\overline{a}a$ единичной окружности, в результате чего будем иметь

$$C_\mu=2\int\limits_{\overline{a}}^{a}\ln s\,(a-s)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(s-\overline{a})^{-\frac{1}{2}+i\mu}ds$$

Сравнив это выражение с соотношением, которое получается из (1.7) с C_∞, если в последнем положить $z=0$, и учитывая (1. 9), находим

$$C_\mu=\frac{2\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu}\left[\ln 2\sin\alpha+\Psi\left(\frac{1}{2}-i\mu\right)-\Psi(1)-\frac{i\pi}{2}+\right.$$

$$\left.+B_{\exp(2i\alpha)}\left(\frac{1}{2}-i\mu,\ 0\right)\right]$$

Наконец, отделяя в (1.13) действительную и мнимую части, получим соотношения (1.1) и (1.2).

Рассматривая функцию $f(\zeta)=(\zeta-a)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta-a^{-1})^{-\frac{1}{2}+i\mu}$ ($a=e^\alpha$, $\alpha<\infty$) в плоскости, разрезанной вдоль дуги $a^{-1}a$ кривой $y=e^x$, совершенно аналогичным образом докажем соотношения (1. 3) и (1.4).

В остальных двух случаях только наметим путь доказательства. Для доказательства соотношения (1.6) рассматривается бесконечная функция $f(\zeta)=(\zeta^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu}(\zeta^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$ с точками ветвления $\zeta=\pm a$, $\zeta=\pm b$, лежащими на действительной оси. Затем, в плоскости с выключенными отрезками $[-a,-b]$ и $[b,a]$ выбирается определенная ветвь этой функции. В области, ограниченной замкнутыми контурами вокруг разрезов и окружностью Γ_R достаточно большого радиуса, к ней применяется теорема Коши. Таким путем устанавливается справедливость соотношения

$$\int_b^a \left[\ln \frac{x+s}{|x-s|} - \frac{i\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu \operatorname{sign}(x-s) \right] (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu} ds =$$

$$= \frac{\pi}{\operatorname{ch} \pi\mu} \int_0^b (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (b^2-s^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu} ds +$$

$$+ \frac{i\pi}{2} \operatorname{th} \pi\mu \int_b^a (a^2-s^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (s^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu} ds \qquad (b<x<a)$$

Экспоненциальной заменой переменных и последующими преобразованиями из последнего соотношения получается соотношение (1.6).

Для доказательства соотношения (1.5) рассматривается многозначная функция $f(\zeta) = (\zeta^2-a^2)^{-\frac{1}{2}-i\mu} (\zeta^2-b^2)^{-\frac{1}{2}+i\mu}$ с точками ветвления $\zeta = \pm a$, $\zeta = \pm b$ ($a = e^{i\alpha}$, $b = e^{i\beta}$; $0<\alpha, \beta<\pi$), лежащими на единичной окружности. Затем, аналогичным образом устанавливается соотношение (1.5).

§ 2. Перейдем к построению решений интегральных уравнений (0.1)—(0.4) при произвольной правой части и установлению связи как этих, так и уравнений (0.3′)—(0.4′) с дифференциальными уравнениями.

Эти решения, как уже упоминалось, будут построены методом М. Г. Крейна. Согласно этому методу применительно к уравнениям с эрмитовыми ядрами, если для любого u $(-\alpha<u<\alpha)$ известны решения $g(t, u)$ уравнения

$$\int_{-\alpha}^{u} K(t-\tau)\, g(\tau, u)\, d\tau = 1 \qquad (K(t) = \overline{K(-t)}) \tag{2.1}$$

то решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} K(t-\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau = f(t)$$

при произвольной функции из определенного класса может быть получено по формуле [7]

$$\varphi(t) = \left[\frac{1}{M_1'(u)} \int_{-\alpha}^{u} \overline{g(\tau, u)} f(\tau)\, d\tau \right]_{u=\alpha} g(t, \alpha) -$$

$$- \int_t^{\alpha} g(t, u) \frac{d}{du} \left[\frac{1}{M_1'(u)} \frac{d}{du} \int_{-\alpha}^{u} g(\tau, u) f(\tau)\, d\tau \right] du \tag{2.2}$$

где

$$M_1(u) = \int_{-\alpha}^{u} g(\tau, u)\, d\tau \tag{2.3}$$

Но решения $g(t, \alpha) \equiv q(t, \alpha)$ интегральных уравнений

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} K(t-\tau)\, q(\tau, \alpha)\, d\tau = 1 \tag{2.4}$$

где $K(t)$ означает одно из четырех ядер в уравнениях (0.1)—(0.4), согласно соотношениям (1.1), (1.3), (1.5) и (1.6) соответственно имеют вид

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \frac{1}{A_\mu(\alpha)} \cos\left(\frac{t}{2} - i\mu\alpha\right)\left(\sin\frac{\alpha-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\\
&2) \quad \frac{1}{B_\mu(\alpha)} \operatorname{ch}\left(\frac{t}{2} - i\mu\alpha\right)\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}\\
&3) \quad \frac{\pi\left(\sin\frac{\alpha-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\sin\frac{\alpha+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\operatorname{ch}\pi\mu\left[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos\alpha) + Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)\right]}\\
&4) \quad \frac{\pi\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu}\left(\operatorname{sh}\frac{\alpha+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu}}{\operatorname{ch}\pi\mu\left[Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch}\alpha) + Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)\right]}
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

Произведя в (2. 1) и (2. 3) подстановки $t \to t - \dfrac{u-\alpha}{2}$, $\tau \to \tau - \dfrac{u-\alpha}{2}$, убедимся, что

$$g(t, u) = q\left(t - \frac{u-\alpha}{2},\ \alpha\right), \qquad M_1(u) = 2M\left(\frac{u+\alpha}{2}\right) \tag{2.6}$$

где

$$M(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{-\alpha} q(\tau, \alpha)\, d\tau$$

Для $M(\alpha)$, соответственно, будем иметь следующие выражения:

$$
\begin{aligned}
&1) \quad \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu\, A_\mu(\alpha)}, \qquad 2) \quad \frac{\pi}{\operatorname{ch}\pi\mu\, B_\mu(\alpha)}\\
&3) \quad \frac{P_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos\alpha)}{Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos\alpha) + Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

$$F(\lambda) = \int\limits_0^T (f_1(t), f_2(t))\, H(t) \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} \qquad (2.12)$$

Если $\sigma(\lambda)$ $(\sigma(\lambda) = \sigma(\lambda - 0),\ \sigma(0) = 0,\ -\infty < \lambda < \infty)$ — ортогональная спектральная функция дифференциальной системы (2. 9), то имеет место формула обращения

$$\begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F(\lambda) \begin{pmatrix} \Phi_1(t) \\ \Phi_2(t) \end{pmatrix} d\sigma(\lambda) \qquad (2.13)$$

При помощи соотношения (2.7), (2.10) и (2.11) можем выписать в интересующих нас случаях формулы обобщенного преобразования Фурье (2.12) и (2.13).

В частности, если в соотношениях (2.7), (2.10) и (2.11) в случае 4) положить $\mu = 0$, то можно показать, что формулы (2.12) и (2.13) представляют собой известные формулы преобразования Мелера-Фока.

Наконец, перейдем к интегральным уравнениям * (0.1′)—(0.4′). Дифференцирование соотношений (1.1), (1.3), (1.5) и (1.6) дает обобщенные собственные функции стоящих в правых частях (0.1′)—(0.4′) самосопряженных операторов. Обобщенные собственные функции указанных операторов даются соответственно выражениями из (2.5).

В случаях 3) и 4) легко показать, что обобщенные собственные функции $h(t, \mu)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению типа

$$-ip(t)\frac{d}{dt}[p(t)\,h(t, \mu)] = \xi(\mu)\,h(t, \mu) \quad (\alpha < t < \beta;\ \sigma < \mu < \tau), \qquad (2.14)$$

где $p(t) > 0$, а $\xi(\mu)$ — монотонно возрастающая функция. Эти функции соответственно указанным случаям имеют вид

$$\sqrt{\frac{2\sin\frac{\alpha - t}{2}\sin\frac{\alpha + t}{2}}{\sin\alpha}}, \qquad \xi(\mu) = \mu \quad (-\alpha < t < \alpha;\quad -\infty < \mu < \infty)$$

$$\sqrt{\frac{2\,\mathrm{sh}\frac{\alpha - t}{2}\,\mathrm{sh}\frac{\alpha + t}{2}}{\mathrm{sh}\,\alpha}}, \qquad \xi(\mu) = \mu \quad (-\alpha < t < \alpha;\quad -\infty < \mu < \infty)$$

Решением дифференциального уравнения (2.14) будет

$$h(t, \mu) = \frac{\sqrt{\xi'(\mu)}}{p(t)}\, e^{i\xi(\mu)\int \frac{dt}{p^2(t)}}$$

Далее, как в работе [11], воспользуемся формулами обращения Фурье-Планшереля в $L^2(-\infty, \infty)$

* Подробное изложение результатов, относящихся к этим уравнениям, содержится в [14].

Соответствующие $\chi(\alpha, \lambda)$ будут:

1) $$\frac{\lambda\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\mu\, A_\mu(\alpha)}\left[e^{i\lambda\alpha}F\left(-\lambda,\ \frac{1}{2}+i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2i\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\,e^{-i\lambda\alpha}F\left(\lambda,\ \frac{1}{2}-i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2i\alpha}\right)\right]$$

2) $$\frac{\lambda\pi}{2\,\mathrm{ch}\,\pi\mu\, B_\mu(\alpha)}\left[e^{i\lambda\alpha}F\left(-i\lambda,\ \frac{1}{2}+i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2\alpha}\right)+\right.$$
$$\left.+\,e^{-i\lambda\alpha}F\left(i\lambda,\ \frac{1}{2}-i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2\alpha}\right)\right] \tag{2.11}$$

3) $$\frac{\lambda e^{-\mu\alpha}\,e^{-\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)i\alpha}}{Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\cos\alpha)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\cos\alpha)}\,F\left(\frac{1}{2}+\lambda,\ \frac{1}{2}-i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2i\alpha}\right)$$

4) $$\frac{\lambda e^{-i\mu\alpha}\,e^{-\left(\frac{1}{2}+i\lambda\right)\alpha}}{Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\mathrm{ch}\,\alpha)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\mathrm{ch}\,\alpha)}\,F\left(\frac{1}{2}+i\lambda,\ \frac{1}{2}-i\mu;\ 1;\ 1-e^{-2\alpha}\right)$$

Чтобы записать формулу разложения произвольной двумерной вектор-функции из $L_n^2(0, T)$ по фундаментальным функциям дифференциальной системы (2.9), эту систему представим в виде

$$\frac{d\chi}{d\alpha}=\lambda p\Theta$$

$$\frac{d\Theta}{d\alpha}=-(\lambda+2l)\frac{\chi}{p},\qquad x(0,\lambda)=0,\qquad \Theta(0,\lambda)=1$$

Известным способом [7] последнюю систему можно преобразовать к каноническому виду

$$\frac{d}{d\alpha}\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}=\lambda JH(\alpha)\begin{pmatrix}\Phi_1\\ \Phi_2\end{pmatrix}$$

где

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\qquad H(\alpha)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{p}+V(\alpha)p & V(\alpha)p\\ V(\alpha)p & p\end{pmatrix}$$

$$V(\alpha)=-2\int_0^\alpha\frac{l(t)}{p(t)}\,dt$$

Строим обобщенное преобразование Фурье [7, 8] двумерной вектор-функции $\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{pmatrix}$ из $L_n^2(0, T)$

$$4)\quad \frac{P_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)}{Q_{-\frac{1}{2}-i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)+Q_{-\frac{1}{2}+i\mu}(\operatorname{ch}\alpha)} \tag{2.7}$$

Приняв во внимание (2.5), (2.6), (2.7) и (2.2), нетрудно выписать формулы решений интегральных уравнений (0.1)—(0.4) при произвольной правой части.

Далее, воспользовавшись результатами работы [8], установим связь между интегральными уравнениями (0.1)—(0.4) и некоторыми дифференциальными системами.

Пусть $K(t)=\overline{K(-t)}$ $(-2T<t<2T)$ такая функция, что при любом α $(0\leqslant\alpha<T)$ интегральное уравнение (2.4) имеет единственное интегрируемое решение. Подчинив $K(t)$ определенным дополнительным условиям (см. [8]), из результатов той же работы [8], в частности, можно получить следующее утверждение.

Если для любого комплексного λ положить

$$\chi(\alpha,\lambda)=\frac{1}{2}\int_{-\alpha}^{\alpha}q(t,\alpha)\,e^{-i\lambda t}dt \tag{2.8}$$

то оказывается, что функция $\chi(\alpha,\lambda)$ является решением дифференциальной системы*

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{p(\alpha)}\frac{d\chi}{d\alpha}\right)+[\lambda^2+2\lambda l(\alpha)]\frac{\chi}{p(\alpha)}=0;\qquad \chi(0,\lambda)=0$$

$$\lim_{\alpha\downarrow 0}\left(\frac{1}{p}\frac{d\chi}{d\alpha}\right)=\lambda \tag{2.9}$$

где

$$p(\alpha)=M'(\alpha),\quad l(\alpha)=-\frac{d}{d\alpha}\operatorname{Arg}q(\alpha,\alpha)\quad(0<\alpha<T)$$

Приведем соответственно случаям в (2.5) выражения $l(\alpha)$:

$$1)\quad -\frac{2\mu\sin\alpha+\operatorname{sh}2\mu\alpha}{4\left(1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{th}^2\mu\alpha\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{ch}^2\mu\alpha}-\mu\operatorname{ctg}\alpha$$

$$2)\quad \frac{2\mu\operatorname{sh}\alpha+\sin 2\mu\alpha}{4\left(1+\operatorname{th}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\mu\alpha\right)\operatorname{ch}^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\mu\alpha}-\mu\operatorname{cth}\alpha \tag{2.10}$$

$$3)\quad -\mu\operatorname{ctg}\alpha,\qquad 4)\quad -\mu\operatorname{cth}\alpha$$

---

* Из результатов работы [8] эта дифференциальная система получается, исходя из интегрального уравнения второго рода. Однако, она справедлива и для определенных классов интегральных уравнений первого рода. В обсужденных нами примерах ее справедливость может быть установлена и непосредственной проверкой.

М. Г. Крейн любезно предоставил возможность автору познакомиться с излагаемым результатом по одной его неопубликованной работе, а затем указал на возможность ее вывода из [8].

$$F(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-N}^{N} e^{-iuv} f(v)\, dv$$

$$f(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-N}^{N} e^{iuv} F(u)\, du$$

Отметим также равенство Планшереля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(u)|^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} |f(v)|^2 dv$$

Предположим, что функции

$$u = \xi(\mu), \qquad v = \int \frac{dt}{p^2(t)} \tag{2.15}$$

преобразуют интервалы (σ, τ) и (α, β) в интервал $(-\infty, \infty)$. Тогда, произведя в формулах обращения Фурье-Планшереля замену переменных (2.15), получим формулу разложения произвольной функции из $L^2(-\alpha, \alpha)$ по фундаментальным функциям дифференциального уравнения (2.14).

В интересующем нас случае 3) эти формулы разложения имеют вид

$$\Phi(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{\delta\to 0,\ \delta>0}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-\alpha+\delta}^{\alpha-\delta} \left(\sin\frac{\alpha-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \left(\sin\frac{\alpha+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu} \varphi(t)\, dt$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underset{N\to\infty}{\mathrm{l.i.m}} \int_{-N}^{N} \left(\sin\frac{\alpha-t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}-i\mu} \left(\sin\frac{\alpha+t}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+i\mu} \Phi(\mu)\, d\mu$$

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} |\varphi(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi(\mu)|^2 d\mu$$

Аналогичные формулы могут быть записаны в случае 4).

Коль скоро известны обобщенные собственные функции и формулы разложения по этим функциям, решение интегральных уравнений (0.3′) и (0.4′) могут быть получены по общей формуле для резольвенты.

В заключение отметим, что исследование указанных здесь плоских контактных задач теории упругости можно далее провести известным способом [15,16].

Автор выражает сердечную благодарность чл.-корр. АН УССР М. Г. Крейну за руководство работой.

Автор благодарит также Г. Я. Попова за интерес к работе.

Результаты работы были доложены на III Всесоюзном съезде по теоретической и прикладной механике.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР
Одесский инженерно-строительный
институт

Поступила 4 IV 1968

Ս. Մ. ՄԽԻԹԱՐՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅՈՒՆ՝ ՀԱՐԱԿՑՄԱՆ ՈՒԺԵՐԻ ՀԱՇՎԱՌՈՒՄՈՎ ՀՊՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԱՐԹ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՈՒ ՆՐԱՆՑ ՀԵՏ ԿԱՊՎԱԾ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ԵՎ ԴԻՖԵՐԵՆՑԻԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատության մեջ դիտարկվում է առաձգականության տեսության՝ հարակցման ուժերի հաշվառումով հպման մի քանի խնդիրներ նկարագրող գծային ինտեգրալ հավասարումների նոր դաս, (0.1)—(0.4), որոնց Կոշու իմաստով ինտեգրալներից զերծ փակ լուծումները կառուցվում են Մ. Գ. Կրեյնի առաջարկած մեթոդով։

Ընդսմին, առաջին ինտեգրալ հավասարումով նկարագրվում է հպման հարթ պարբերական խնդիրը։

Երրորդ ինտեգրալ հավասարումով նկարագրվում է հպման հարթ պարբերական խնդիրը, երբ մեկ պարբերության մեջ կան երկու համահավասար շեղ-համաչափ բեռնավորված հպման տեղամասեր։

Չորրորդ ինտեգրալ հավասարման լուծումը կարելի է հանգեցնել կոորդինատների սկզբնակետի նկատմամբ համաչափ դասավորված, բայց շեղ-համաչափ բեռնավորված երկու համահավասար տեղամասով հպման հարթ խնդրի հետազոտությանը։

Հիշատակված ինտեգրալ հավասարումները, այնուհետև, կապվում են մի քանի տիպի դիֆերենցիալ հավասարումների եզրային խնդիրների հետ, որոնց լուծումները, ըստ երևույթին, կազմում են օրթոգոնալ լրիվ ֆունկցիաների նոր դաս։ Այդ կապը հիմնվում է Մ. Գ. Կրեյնի՝ էրմիտյան օպերատորներից ծնված դիֆերենցիալ հավասարումների սպեկտրալ տեսության հակադարձ խնդիրներին վերաբերող արդյունքների վրա։

Մյուս տիպի դիֆերենցիալ հավասարումները, որոնց հետ դիտարկվող ինտեգրալ հավասարումները առնչվում են, կապված են Հիլբերտի հայտնի կորիզով ու մերձավոր կորիզներով ինտեգրալ օպերատորների $(0.1'')$—$(0.4'')$ ընդհանրացված սեփական ֆունկցիաների հետ։

S. M. MKHITARIAN

ON SOME PLANE CONTACT PROBLEMES OF THE THEORY OF ELASTICITY WITH COHESIVE FORCES TAKEN INTO ACCOUNT THE INTEGRAL AND DIFFERENTIAL EQUATIONS CONNECTED WITH THEM

Summary

In this work the solution of the integral equations of the first kind (0. 1)—(0. 4) by the Krein method are effectively constructed in a closed form.

By means of these integral equations, some plane mixed boundary problems of the theory of elasticity (contact problems) with consideration of cohesive forces are described.

Taking into consideration the results of M. G. Krein, the differential systems are given and their solutions form the full orthogonal systems in space $L^2(0, T)$.

The generalized eigenfunctions for the operators, on the left hand side of (0.1′)—(0.4′) are found.

In the last two cases (0. 3′) and (0. 4′) the formulas of the expansion of function in $L^2(-\alpha, \alpha)$ by the generalized eigenfunctions of the corresponding operators are written down. For finite Hilbert transformations, these questions have been investigated by Koppelman and Pincus.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. „Наука", 1966.
2. *Брилла И.* Периодические смешанные задачи для анизотропных пластинок. Приложения т. ф. в мех. сплош. ср. IUTAM, т. I, „Наука", 1965.
3. *Черский Ю. И.* Сведение периодических задач математической физики к особым уравнениям с ядром Коши. Докл. АН СССР, т. 140, №1, 1961.
4. *Попов Г. Я.* По поводу одной плоскости контактной задачи для упругой полуплоскости. Изв. АН СССР, сер. физ.-мат. наук, т. 18, №4, 1965.
5. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, т. 94, №6, 1954.
6. *Крейн М. Г.* Об одном новом методе решения линейных интегральных уравнений первого и второго рода. Докл. АН СССР, т. 100, №3, 1955.
7. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве. „Наука", 1967.
8. *Крейн М. Г.* Континуальные аналоги предложений о многочленах, ортогональных на единичной окружности. Докл. АН СССР, т. 105, №4, 1955.
9. *Ахиезер Н. И.* О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов. Изв. АН СССР, сер. мат., т. 9, №4, 1945.
10. *Чибрикова Л. И.* О решении некоторых полных сингулярных, интегральных уравнений. Краевые зад. т. анал. ф-ий. Изд. Казанского ун-та, т. 122, №3, 1962.
11. *Koppelman W.* and *Pincus I. D.* Spectral representations for finite Hilbert Transformations. Math. Z., Bd 71, H. 4, 1959.

12. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

13. *Попов Г. Я.* К решению плоской контактной задачи теории упругости при наличии сил сцепления или трения. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 16, №2, 1963.

14. *Мхитарян С. М.* О спектральных разложениях интегральных операторов, аналогичных конечному преобразованию Гильберта. Матем. исследования, Кишинев, т. 4, вып. 1, 1969.

15. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. Гостехиздат, 1953.

16. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, 1949.