

А. Г. БАГДОЕВ, А. А. ГУРГЕНЯН

О ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ  
 ОКРЕСТНОСТЕЙ УДАРНЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТИ

Пусть плоская ударная волна набегаает на клин конечного раствора  $2\Phi$  в направлении его оси. Выберем ось  $OX$  по оси клина, ось  $OY$  перпендикулярно вверх. Точку  $O$  совместим с вершиной клина. Впереди ударной волны жидкость покоится, причем давление  $P$  принято равным нулю.

В линейной постановке в области  $ABD$  давление постоянно и равно  $2P_1$  где  $P_1$  — давление на падающей волне.

Решение линейной задачи в области  $DBB'D'$  дано в [1] и имеет вид

$$P' = 1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{(1 - \bar{\rho}^{2\lambda}) \cos \lambda\pi}{-(1 + \bar{\rho}^{2\lambda}) \sin \lambda\pi - 2\bar{\rho}^\lambda \sin \lambda(\theta - \pi)} \right\} + \\
 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{-(1 - \bar{\rho}^{2\lambda}) \cos \lambda\pi}{(1 + \bar{\rho}^{2\lambda}) \sin \lambda\pi - 2\bar{\rho}^\lambda \sin \lambda(\theta - \pi)} \right\} \quad (1)$$

Здесь  $P' = \frac{P}{P_1}$ ,  $\lambda = \frac{\pi}{2\pi - 2\Phi}$ , а координаты  $\bar{\rho}$ ,  $\theta$  связаны с  $x$ ,  $y$  преобразованием Чаплыгина

$$\bar{x} = \frac{x}{a_0 t}, \quad \bar{y} = \frac{y}{a_0 t}, \quad \bar{\rho} = r \cos \theta, \quad \theta = r \sin \theta$$

$\bar{\rho} = \frac{1 - \sqrt{1 - r^2}}{r}$ , где  $t$  — время,  $a_0$  — скорость звука в невозмущенной жидкости.

Вблизи участка  $BCB'$  отраженной волны, имеющей в линейной постановке уравнение  $r = 1$ , обозначая  $\alpha = 1 - r$ , можно найти

$$\bar{\rho} = 1 - \sqrt{2} \sqrt{\alpha}$$

$$P' = 1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{\sqrt{2} \sqrt{\alpha} 2\lambda \cos \lambda\pi}{-(2 - 2\lambda \sqrt{2} \sqrt{\alpha}) \sin \lambda\pi - 2(1 - \lambda \sqrt{2} \sqrt{\alpha}) \sin \lambda(\theta - \pi)} \right\} + \\
 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left\{ \frac{-\sqrt{2} \sqrt{\alpha} 2\lambda \cos \lambda\pi}{(2 - 2\lambda \sqrt{2} \sqrt{\alpha}) \sin \lambda\pi - 2(1 - \lambda \sqrt{2} \sqrt{\alpha}) \sin \lambda(\theta - \pi)} \right\} \quad (2)$$

или учитывая, что

$$\begin{aligned} \cos \lambda \pi &= -\sin \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi}, & \sin \lambda \pi &= \cos \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi} \\ \sin \lambda (\theta - \pi) &= -\cos \frac{\pi (\theta - \Phi)}{2\pi - 2\Phi} \end{aligned}$$

и, объединяя арктангенсы, получить

$$\frac{P}{P_1} = 1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4\sqrt{2}\sqrt{\alpha} \frac{2\pi}{2\pi - 2\Phi} \sin \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi} \cos \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi}}{4 \cos^2 \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi} - 4 \cos^2 \frac{\pi (\theta - \pi)}{2\pi - 2\Phi}} \quad (3)$$

причем при  $\theta > 2\Phi$  аргумент арктангенса больше нуля, а при  $\theta < 2\Phi$  аргумент меньше нуля и следует полагать  $\operatorname{arctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arctg} \alpha$  (последнее относится к окрестности линии  $BD$ , где

$$\frac{P}{P_1} = 2 - \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2}\sqrt{\alpha} \frac{2\pi}{2\pi - 2\Phi} \sin \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi} \cos \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi}}{-\cos^2 \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi} + \cos^2 \frac{\pi (\theta - \Phi)}{2\pi - 2\Phi}} \quad (4)$$

Вблизи линии  $BC$  при конечных  $\theta - 2\Phi$  из выражения (3) получится

$$\frac{P}{P_1} = 1 + f(\theta) \sqrt{\alpha} \quad (5)$$

где

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2} \frac{2\pi}{2\pi - 2\Phi} \sin \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi} \cos \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi}}{\cos^2 \frac{\pi \Phi}{2\pi - 2\Phi} - \cos^2 \frac{\pi (\theta - \Phi)}{2\pi - 2\Phi}}$$

Для получения решения нелинейной задачи вблизи  $BC$  можно применить метод замены в линейном решении (5) характеристической переменной  $\alpha$  через нелинейную характеристическую переменную. В результате решение на фронте ударной волны  $BC$  примет вид

$$\frac{P}{P_1} = 1 + \frac{3}{2} (n+1) \gamma f^2(\theta) \quad (6)$$

где  $\gamma = \frac{P_1}{Bn}$ ,  $\rho$  — плотность,  $B$ ,  $\rho_0$ ,  $n$  — постоянные, причем уравнение

политропы для жидкости взято в виде  $P = B \left[ \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)^n - 1 \right]$ .

Функция  $f(\theta)$  в решении (6) вблизи точки  $B$  неограниченно возрастает и (6) не имеет там места.

Вблизи точки  $B$  по (4) легко найти

$$\frac{P}{P_1} = 1 + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\alpha}}{\theta - 2\Phi} \quad (7)$$

причем  $1 - r \sim \gamma$ ,  $\theta - 2\Phi \sim \sqrt{\gamma}$ .

Заметим, что решение (6), которое справедливо для ударной волны, движущейся по покоящейся жидкости, будет иметь место в системе координат, связанной с постоянным течением за падающей ударной волной  $AN$ ;

$$x_1 = x - V_1 t, \quad y_1 = y$$

где  $\gamma_1 = \frac{P_1}{Bn} a_1$ ,  $a_1$  — скорость звука постоянного течения.

Если ввести полярные координаты  $\frac{x_1}{t} = r_1 \cos \theta_1$ ,  $\frac{y_1}{t} = r_1 \sin \theta_1$ , то

$$r_1 \cos \theta_1 = r \cos \theta - v_1, \quad r_1 \sin \theta_1 = r \sin \theta$$

и приближенно можно найти

$$r_1 = r \left( 1 - \frac{v_1}{r} \cos \theta \right), \quad \theta_1 - \theta = \frac{v_1 \sin \theta}{r} \quad (8)$$

Вводя новые переменные по формулам

$$r_1 - a_1 = a_1 \frac{n+1}{2} \gamma \delta, \quad \theta_1 - 2\Phi = \sqrt{\frac{n+1}{2} \gamma} Y, \quad \frac{P}{P_1} - 1 = \mu \quad (9)$$

решение линейной задачи (7) можно записать

$$\mu = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \sqrt{-\delta}}{Y}, \quad \delta = -\frac{1}{2} Y^2 \operatorname{tg}^2 \mu \pi$$

Поскольку  $a_1 = a_0 \left( 1 + \frac{n-1}{2} \gamma \right)$ , где  $a_0$  — скорость звука в невозмущенной жидкости, согласно (8 и 9)

$$r = a_0 \left( 1 + \frac{n+1}{2} \gamma \delta + \gamma \cos \theta_0 + \frac{n-1}{2} \gamma \right)$$

что выражает координату  $r$  неподвижной системы координат через  $\delta$ ,  $Y$  в окрестности точки  $B$ , где  $\theta_0 = 2\Phi$ .

Чтобы вывести уравнение нелинейного движения в окрестности точки  $B$ , введем потенциал скорости  $\tilde{\varphi} = v_1 x + \varphi$ , где  $\varphi$  — потенциал возмущенного движения относительно подвижных осей  $r_1$ ,  $\theta_1$ . Тогда для радиальной и трансверсальной составляющей скорости можно найти

$$\frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial r} = v_1 \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad \frac{\partial \tilde{\varphi}}{\partial \theta} = -v_1 r \sin \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \quad (10)$$



Подставим эти выражения в уравнение для потенциала скоростей, имеющее вблизи точки  $B$  вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \left( \left( v_1 \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial r} - r \right)^2 - a^2 \right) - \frac{a^2}{r^2} \left( v_1 r \cos \theta + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) - \frac{a^2}{r} \left( v_1 \cos \theta + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad (11)$$

где  $a^2 = a_1^2 + a_1(n-1) \frac{\partial \varphi}{\partial r}$  выражает скорость звука  $a$  за ударной волной  $BC$  через скорость звука  $a_1$  постоянного течения.

Если подставить (10) в (11) и в обозначениях (9) учесть приближенно, что  $\theta_1 = \theta$ , и дополнительно обозначить

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \gamma \mu, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} = \gamma^2 \left| \sqrt{\frac{n+1}{2}} \nu \right. \quad (12)$$

легко получить для  $\mu$  и  $\nu$  уравнения [5]

$$(\mu - \delta) \frac{\partial \mu}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \mu + \frac{1}{2} \frac{\partial \nu}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \mu}{\partial Y} = \frac{\partial \nu}{\partial \delta} \quad (13)$$

Если подставить во второе уравнение

$$\mu = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2} \sqrt{1-\delta}}{Y}$$

легко найти

$$\nu = \left( \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 \mu \pi - \mu \right) Y \quad (14)$$

причем  $\mu$  и  $\nu$  удовлетворяют линеаризованному первому уравнению (13).

Решение нелинейной системы (13) можно искать в виде (14), а для  $\mu(\delta, Y)$  или  $\delta(\mu, Y)$  легко найти

$$\delta = -\frac{1}{2} Y^2 \operatorname{tg}^2 \mu \pi + \mu + \frac{1}{2\pi} \sin 2\mu \pi + B \sin^2 \mu \pi \quad (15)$$

Ударная волна определится уравнением

$$\frac{\partial \delta}{\partial Y} = -\sqrt{2\delta - \mu} \quad (16)$$

при граничных условиях для точки  $B$ .

Точка  $B$  найдется из пересечения параболической линии  $BD$  и ударной волны  $AB$ .

Уравнение параболической линии

$$\left( \frac{x}{t} - v_x \right)^2 + \left( \frac{y}{t} - v_y \right)^2 = a^2$$

если ввести полярные координаты и учесть, что в постоянном течении  $ABD$   $v_x = v \cos \Phi$ ,  $v_y = v \sin \Phi$ , запишется в виде

$$r = a_0 \left[ 1 + \frac{n-1}{2} \frac{P}{Bn} + \frac{v}{a_0} \cos(\theta - \Phi) \right] \quad (17)$$

причем для связи скорости  $v$  и давления  $P$  в области  $ABD$  следует написать условия на падающей и отраженной ударной волне.

Записывая скорость точки  $A$  вдоль стенки через скорости ударных волн

$$\frac{a_0 \left( 1 + \frac{n+1}{4} \frac{P_1}{Bn} \right)}{\cos \Phi} = \frac{a_0 \left( 1 + \frac{n+1}{4} \frac{P + P_1}{Bn} \right)}{\cos \beta} \quad (18)$$

где  $\beta$  угол  $AB$  с нормалью к стенке  $AM$ , приближенно можно найти

$$\beta = \Phi - \frac{n+1}{4} \gamma \frac{P}{Bn} \operatorname{ctg} \Phi \quad \text{или} \quad \beta = \Phi$$

Записывая условие равенства касательных составляющих скорости к ударной волне  $AB$

$$v_1 \sin(\Phi + \beta) = v \sin \beta \quad (19)$$

и уравнение импульсов

$$a_0 \frac{P - P_1}{Bn} = v \cos \beta - v_1 \cos(\beta + \Phi) \quad (20)$$

можно найти приближенно

$$v = 2v_1 \cos \Phi, \quad \frac{P}{Bn} = 2\gamma \quad (21)$$

Подставляя (21) в (17), вблизи точки  $B$  ( $\theta = 2\Phi + \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma Y$ ) можно получить  $r = a_0(1 + \gamma n + \gamma \cos \theta_0)$ , или в обозначениях (9)

$$\delta = \frac{2}{n+1} + \frac{n-1}{n+1} \mu \quad (22)$$

причем  $\mu = 1$ , поскольку вблизи точки  $B$   $\frac{P}{Bn} = \gamma + \frac{1}{a_0} \frac{\partial p}{\partial r}$  и  $\delta = 1$ .

Уравнение отраженной ударной волны  $AB$  имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{y}{t} - a_0 \left( 1 + \frac{n+1}{4} \gamma \right) \operatorname{tg} \Phi = \\ = - \left( \frac{x}{t} - a_0 - a_0 \gamma \frac{n+1}{4} \right) \operatorname{ctg} \left( 2\Phi - \frac{n+1}{4} \frac{P}{Bn} \operatorname{ctg} \Phi \right) \end{aligned} \quad (23)$$





$$\Phi = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma Y_0, \quad \beta = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma Y_1,$$

можно найти [5]

$$Y_1 = \frac{Y_0 + \sqrt{Y_0^2 - 4}}{2}, \quad \mu_0 = 1 + \frac{2Y_0}{Y_0 + \sqrt{Y_0^2 - 4}} \quad (27)$$

Отметим, что здесь уже линейное отражение не имеет места и при

$$Y_1 = Y_0, \quad \mu_0 > 2$$

Если ввести переменные  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$

$$\theta = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma Y, \quad r = a \left( 1 + \frac{n+1}{2} \gamma \delta \right)$$

уравнение отраженной ударной волны запишется

$$\Phi \theta + \beta \theta - \Phi^2 - \beta \Phi = -\frac{n+1}{2} \gamma \delta + \frac{\theta^2}{2} + \frac{n+1}{4} \gamma$$

Точка пересечения ударной волны с параболической линией  $\delta = \mu$  имеет вид [2]

$$\theta = \Phi + \beta + \sqrt{(\Phi + \beta)^2 - 2\Phi(\Phi + \beta) + (n+1)\gamma\mu - \frac{n+1}{2}\gamma}$$

или

$$Y = Y_0 + Y_1 - \sqrt{\mu_0 - 1} \quad (28)$$

При  $Y = Y_0$  точка  $B$  находится на стенке и область  $ABD$  отсутствует.

Для определения решения в окрестности точки  $B$  на линии  $BC$  отметим, что, поскольку отражение существенно нелинейно, следует искать решение уравнения (13), переходящее при выходе из волновой зоны, т. е. при больших  $\delta$ , не в обычное линейное решение (7), а в решение линейной задачи с граничным условием  $\mu = \mu_0$  на  $BD$

$$\mu = 1 + \frac{\mu_0 - 1}{\pi} \arctg \frac{\sqrt{2} \sqrt{x}}{\theta - \theta_B} \quad (29)$$

где  $Y_B$  дается (28). Тогда решение уравнения (28) запишется

$$\begin{aligned} \delta = & -\frac{1}{2} (Y - Y_B)^2 \operatorname{tg}^2 \frac{\pi(\mu - 1)}{\mu_0 - 1} + \mu + \frac{\mu_0 - 1}{2\pi} \sin 2\pi \frac{\mu - 1}{\mu_0 - 1} + \\ & + B \sin^2 \frac{\pi(\mu - 1)}{\mu_0 - 1} \end{aligned} \quad (30)$$

Для смыкания с (6) при  $Y > Y_B$  лучше брать (15), а при  $Y < Y_B$  — решение (30).

Из условия сохранения касательной составляющей скорости жидкости к ударной волне в точке  $B$  следует

$$\nu = -Y_B + (\mu_0 - 1)^{\frac{3}{2}} \quad (31)$$

Тогда

$$\nu = \left( \frac{1}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi(\mu - 1)}{\mu_0 - 1} - \nu \right) Y + C$$

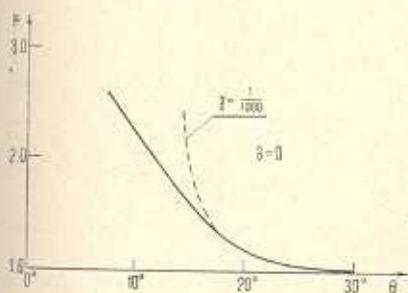
где  $C$  находится из условия (31).

Решение на ударной волне  $BC$  найдется из уравнения

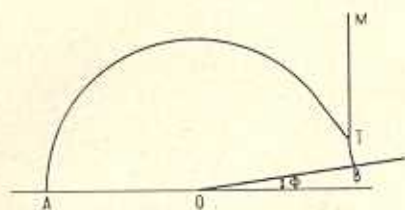
$$\frac{\partial \xi}{\partial Y} = -\sqrt{2\xi - \mu - 1} \quad \text{при условиях } Y = Y_B, \mu = \mu_0 \quad (32)$$

Решение уравнений (30, 32) при значении  $Y_B = Y_0$  дано на фиг. 3, а при значении  $\Phi = 15^\circ$  приводится на фиг. 2 (линия  $AA'$ ) для сопоставления с решением при конечном  $\Phi$ .

В случае  $Y_0 < 2$  по (27) регулярное отражение становится невозможным. Картина отражения в этом случае дается фиг. 4, где  $MT$  — падающая волна,  $AT$  — отраженная волна и  $BT$  — маховская волна.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

В случае сильной ударной волны решение в области  $BTA$  дано в [3].

Если ввести преобразование Чаплыгина и обозначить  $\xi = \bar{\rho} e^{i\psi}$ , после конформного преобразования получим

$$Z = e^{i\psi} \left( i - \frac{2 \sin \psi}{\xi - e^{i\psi}} \right), \quad z_1 = \frac{1}{2} \left( Z^2 + \frac{1}{Z^2} \right)$$

$$e^{i\psi} = k + ik', \quad z_1 = x_1 + iy_1$$

Решение вблизи отраженной волны  $AT$ , где  $r \approx 1$ , можно записать в виде

$$r = 1 - \alpha, \quad \bar{\rho} = 1 - \sqrt{2} \sqrt{\alpha}, \quad Z^2 = -\frac{\sin^2 \frac{\psi + \theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta - \psi}{2}} + A \sqrt{2} \sqrt{\alpha}$$



$$A = \sin \psi \frac{\sin \frac{\psi + \theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta - \psi}{2}}, \quad x_1 = -\frac{1}{2} \left( \frac{\sin^2 \frac{\psi + \theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta - \psi}{2}} + \frac{\sin^2 \frac{\theta - \psi}{2}}{\sin^2 \frac{\theta + \psi}{2}} \right)$$

$$y_1 = \frac{A}{2} \left( \frac{\sin^4 \frac{\theta - \psi}{2}}{\sin^4 \frac{\theta + \psi}{2}} - 1 \right) \sqrt{2} \sqrt{\alpha}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} + i \frac{\partial P}{\partial x_1} =$$

$$= -C\Phi \frac{[D(x_1 - x_0) - 1] 2 \sin^2 \frac{\psi + \theta}{2} \sin^2 \frac{\theta - \psi}{2}}{(x_1 - x_0) \left( \sin^4 \frac{\psi + \theta}{2} - \sin^4 \frac{\theta - \psi}{2} \right) (\alpha + \sqrt{1 - x_1})(\beta + \sqrt{1 - x_1})}$$

где [3]  $C, D, \alpha, \beta, k, k', x_0$  — постоянные, выражающиеся через интенсивность волны  $MT$  и угол  $\Phi$ .

Из полученного выражения следует

$$\frac{P - P_1}{P_1} = C\Phi \frac{[D(x_1 - x_0) - 1] \sin \frac{\theta - \psi}{2} 2 \sin \psi \sin^2 \frac{\psi + \theta}{2}}{(x_1 - x_0) \sin \frac{\theta + \psi}{2} \left( \sin \frac{\theta - \psi}{2} + \sin \frac{\theta + \psi}{2} \right)^4} \sqrt{2\alpha} \quad (33)$$

где в коэффициентах положено  $\alpha = \sqrt{2}$ ,  $\beta = \sqrt{2}$ , что верно для слабой ударной волны.

Из (33) видно, что для произвольной волны в точке  $T$  пересечения ударных волн, где  $\psi = \theta$ , коэффициент при  $\sqrt{\alpha}$  равен нулю. Это означает, что интенсивность ударной волны  $AT$  обращается в нуль в точке  $T$ , т. е. переход по  $MTB$  непрерывен в точке  $T$ . Решение на  $AT$  вдали от точки  $T$  может быть найдено по формуле (6), где согласно (33) для слабой ударной волны [3]

$$C = \frac{80\sqrt{2}\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{3\pi}, \quad D = \frac{3}{40\varepsilon^2}, \quad k = 1 - \varepsilon, \quad k' = \sqrt{2\varepsilon}$$

$\varepsilon = M - 1$ ,  $M$  — число Маха падающей волны.

Тогда из (33), пренебрегая  $\frac{1}{D(x_1 - x_2)}$ , получим

$$\frac{P}{P_1} = 1 + \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2\alpha}\Phi}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (34)$$

То же выражение получится из обычного линейного решения (5) для малых  $\Phi$ .

Таким образом, предельный переход  $\Phi \rightarrow 0$ ,  $M \rightarrow 1$  [3] дает вдали от точки  $T$  тот же результат, что и обратный предельный переход.

Вблизи точки  $T$  имеет место неравномерность предельных переходов, что отражается на различии характера решения при регулярном отражении, когда давление вдоль  $AT$  возрастает и нерегулярном, когда ударная волна  $AT$  затухает в точке  $T$ . Для определения решения на отраженной волне  $AT$  запишем уравнение падающей волны  $MT$  в координатах  $\delta$ ,  $Y$ , где  $r = 1 + \frac{n+1}{2} \gamma \delta$ ,  $\theta - 2\Phi = \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma Y$ , в виде

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Y^2$$

Если ввести переменные  $\frac{P}{Bn} = \gamma \mu$ ,  $\frac{1}{a_c} v_r = \gamma \mu$ ,  $\frac{1}{a_0} v_\theta = \gamma^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n+1}{2}} \nu$ , то решение уравнений (13), переходящее для больших  $\delta$  в (34), ищется в виде (15) с  $B = 9.77$  из условия равенства 0 касательной составляющей к  $MT$ , причем точка  $T$  находится совместным решением уравнений  $MT$  и  $AT$

$$\delta = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} Y^2, \quad \delta = \mu, \quad \mu = 1, \quad \text{тогда } Y = -1$$

Дифференциальное уравнение ударной волны имеет вид

$$\frac{\partial \delta}{\partial Y} = \sqrt{2\delta - \mu - 1}$$

Результаты расчетов приведены на фиг. 5, где решение по формуле (15), верное для всех  $\Phi < \sqrt{\frac{n+1}{2}} \gamma$ , соединяется с решением по формулам (34,6).

Линия  $AT$  совпадает в точке  $T$  со звуковой волной  $\delta = \mu$ , поскольку можно показать [2], что переход  $AT$  непрерывен в  $T$ .

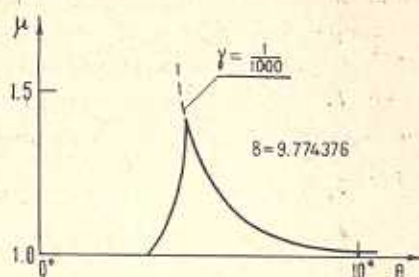
Расчет маховской волны  $BT$  произведен в [2], причем получить решение, переходящее в линейное, здесь не удается.

При прохождении ударной волны около выпуклого угла фиг. 6 решение дано в [3], причем в линейной постановке на  $BRP = 0$ , а в нелинейном случае давление на ударной волне  $BT$  может быть найдено по указанным методам.

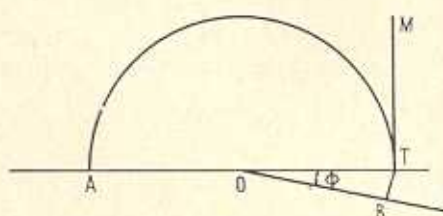
Таким образом, определено нелинейное решение на отраженной ударной волне для регулярного и нерегулярного отражения. Однако, решение (14), (15) удовлетворяет лишь в нулевом порядке условиям (16) и условию сохранения касательной составляющей скорости частицы к ударной волне.



Поскольку этот вопрос возникает и в задаче о движении жидкости под действием давления, где картина движения изображена на фиг. 9 и в окрестности  $B$  решение дается (14), (15), имеет смысл рассмотреть сразу обе задачи.



Фиг. 5.



Фиг. 6.

В задаче о давлении асимптотическое одномерное решение вблизи  $BB_1$  (6) в переменных

$$\frac{x}{t} = r \cos \theta, \quad \frac{y}{t} = r \sin \theta, \quad r = a_0 \left( 1 + \frac{n+1}{2} \gamma \delta \right), \quad \frac{P}{P_1} = \mu,$$

$$v_r = a_0 \gamma \mu, \quad v_\theta = \sqrt{\frac{n+1}{2} \gamma \delta} v, \quad \theta - \theta_0 = \sqrt{\frac{n+1}{2} \gamma} Y$$

вблизи  $B_1$  ( $Y = -1$ ) запишется в виде

$$\mu = \frac{2}{\pi^2 Y^2} + \frac{\sqrt{2}}{\pi Y} \sqrt{\frac{2}{\pi^2 Y^2} - \delta}, \quad \mu = \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} \quad (35)$$

и если учесть, что потенциал  $\varphi$  равен нулю при  $\delta = \frac{3}{4} \frac{2}{\pi^2 Y^2}$ , получим

$$\varphi = \frac{2\delta}{\pi^2 Y^2} - \frac{8}{3\pi^4 Y^4} - \frac{8}{3\pi^4 Y^4} \left( 1 - \frac{\delta Y^2 \pi^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \quad (36)$$

Решение (35) верно лишь для  $Y > 0$ , а в область, где  $Y < 0$ , оно продолжается посредством нелинейного решения (15).

Интересно, что если вычислить

$$v = -\frac{4\delta}{\pi^2 Y^3} + \frac{32}{3\pi^4 Y^3} + \frac{32}{3\pi^4 Y^3} \left( 1 - \frac{\delta Y^2 \pi^2}{2} \right)^{\frac{3}{2}} + \frac{4\delta}{\pi^2 Y^3} \left( 1 - \frac{\delta Y^2 \pi^2}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

то оно совпадает с решением  $v = \frac{\pi^2}{3} \mu^3 Y$ , являющимся асимптотикой решения (14) при малых  $\mu$ .

В области, примыкающей к  $BC$ , имеет место для конечных  $Y+1 < 0$  одномерное решение, которое вблизи  $B$  запишется

$$\mu = 1 + \frac{2}{\pi^2 Y^2} + \frac{1}{\pi} \frac{\sqrt{2}}{Y} \sqrt{\frac{2}{\pi^2 Y^2} - (\delta - 1)} \quad (37)$$



$$\varphi = \left(1 + \frac{2}{\pi^2 Y^2}\right) \delta - \frac{2}{\pi^2 Y^2} - \frac{1}{\pi^4} \frac{8}{3 Y^4} - \frac{1}{\pi} \frac{2\sqrt{2}}{3 Y} \left(\frac{2}{\pi^2 Y^2} - \delta + 1\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} Y^2 \quad (37)$$

где постоянная для потенциала находится по условию на  $BC$   $\delta = 1$ ,  $\varphi = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} Y^2$ . Если найти  $v = \frac{\partial \varphi}{\partial Y}$ , то оно совпадает с асимптотической

неоднородного решения (14) при  $\delta \rightarrow 1$ ,  $v = -Y + \frac{\pi^2}{3} (\mu - 1)^3 Y$ .

Таким образом, нелинейное решение (14), (15) вблизи  $B$  переходит в одномерные решения (6) вблизи  $BB_1$  при большом  $Y > 0$  и в (37) вблизи  $BC$  при  $Y \ll -1$ . Условие  $v = \mu \sqrt{2\delta - \mu}$  на  $BB_1$  однако, в первом порядке не удовлетворяется, поскольку вблизи  $B$  по (15)

$$\mu = 1 + \mu_1, \quad v = -Y + v_1, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial Y} = 0, \quad \frac{\partial \mu_1}{\partial \delta} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial Y} = 0, \quad \frac{d\delta}{dY} = -\sqrt{2\delta - \mu}$$

Если решение не имеет особенности в  $B$  при  $\delta = 1$ ,  $Y = -1$ , то из поведения потенциала вблизи параболической линии  $BC$  [4]  $\varphi \sim \frac{1}{4} \delta_1^2$

можно заключить, что имеет место указанное несоответствие. Поэтому необходимо ввести особенность [4] в точке  $B$  для  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2}$ . Если

искать решение уравнения

$$(\mu_1 - \delta_1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \delta_1^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \delta_1} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial Y^2} = 0, \quad \mu_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial \delta_1}, \quad v_1 = \frac{\partial \varphi_1}{\partial Y} \quad (38)$$

при  $Y > -1$  в виде

$$\varphi_1 = R(\rho) (Y + 1)^{3k - \rho} + F(\rho) (Y + 1)^{2k}, \quad \rho = -\frac{\delta_1}{(Y + 1)^k}, \quad \delta_1 = \delta - 1 \quad (39)$$

и предположить  $\rho = 2$ ,  $k < 2$ , можно получить уравнения

$$R''(k^2 \rho^2 - 2R') - 5k(k-1)\rho R' + 3(k-1)(3k-2)R = 0 \quad (40)$$

$$F'' k^2 \rho^2 - k\rho(3k-1)F' + 2k(2k-1)F - R' - 2R'F'' + 2\rho R'' - 2F'R'' = 0 \quad (41)$$

Следует отметить, что подробно разобранные в [4] случаи  $k > 2$  не удовлетворили условиям получения решения в окрестности  $B$ , непрерывного при  $Y = -1$  и удовлетворяющего условию на  $BB_1$

$$v = \mu \sqrt{2\delta - \mu} \quad (42)$$

При  $Y < -1$  можно искать решение в виде

$$\varphi_1 = R_1(\rho_1) (-Y-1)^{3k-2} + F_1(\rho_1) (-Y-1)^{2k}, \quad \rho_1 = -\frac{\delta_1}{(-Y-1)^k}$$

причем, в силу четности по  $Y$  уравнения (38) для  $R_1, F_1$  получаются уравнения (40), (41). (При подходе к  $B$  по линиям  $\rho = \text{const}$  при  $Y = -1 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \delta_1^2} = \infty$ ).

Для малых  $\rho_1$ , соответствующих решению вблизи  $BC$ , из решения вблизи параболической линии можно найти  $\varphi_1 = \frac{1}{4} \delta_1^2 - \frac{1}{6} \frac{\delta_1^3}{(Y+1)^2}$ . Таким образом, для малых  $\rho_1$  приближенно

$$F_1(\rho_1) = \frac{1}{4} \rho_1^2, \quad R_1(\rho_1) = \frac{1}{6} \rho_1^3$$

Для  $\rho_1 \rightarrow \infty$ , если искать степенные решения уравнений (40), (41), можно получить

$$F_1(\rho_1) = B_1 \rho_1^2 - B_2 \rho_1^{\frac{2k-1}{k}}$$

$$R_1(\rho_1) = -C_1 \rho_1^{\frac{3k-3}{k}} + C_2 \rho_1^{\frac{3k-2}{k}} \quad (43)$$

$$\varphi_1 = C_1 (-\delta_1)^{\frac{3k-3}{k}} (Y+1) + C_2 (-\delta_1)^{\frac{3k-2}{k}} + B_1 \delta_1^2 + B_2 (-\delta_1)^{\frac{2k-1}{k}} (Y+1)$$

причем (43) удовлетворяет линейному одномерному варианту (38). Поскольку на  $BB_1$ , где в первом порядке  $\delta_1 = -(Y+1)$ , при  $k > 1$   $\rho$  велико, достаточно в области  $Y > -1$  взять решение для больших  $\rho$ . Из условия непрерывного сопряжения с (43) следует взять

$$F(\rho) = B_1 \rho^2 + B_2 \rho^{\frac{2k-1}{k}}, \quad R(\rho) = C_1 \rho^{\frac{3k-3}{k}} + C_2 \rho^{\frac{3k-2}{k}} \quad (44)$$

откуда получится выражение  $\varphi_1$  (43). Следует отметить, что условия на  $BB_1$  (16), (42)

$$\frac{d\delta_1}{dY} = -\sqrt{1+2\delta_1-\mu_1}, \quad -Y + \nu_1 = (1+\mu_1)\sqrt{1+2\delta_1-\mu_1} \quad (45)$$

в первом порядке дают  $\delta_1 = -(Y+1)$ ,  $\nu_1 = \frac{1}{2} \mu_1$ . Тогда  $\nu_1$  должно быть того же порядка, что и  $\mu_1$ . Из условия удовлетворения асимптотики, выражаемой (15), согласно которой  $\mu_1 = \frac{1}{2} \delta_1$  вблизи  $B$ , в выражениях, получаемых из (43),

$$\begin{aligned} \mu_1 &= 2B_1\delta_1 - B_2 \frac{2k-1}{k} (-\delta_1)^{\frac{k-1}{k}} (Y+1) - \\ &- \frac{3k-2}{k} C_2 (-\delta_1)^{\frac{2k-2}{k}} - \frac{3k-3}{k} (-\delta_1)^{\frac{2k-3}{k}} C_1 (Y+1) \\ \nu_1 &= C_1 (-\delta_1)^{\frac{3k-3}{k}} + B_2 (-\delta_1)^{\frac{2k-1}{k}} \end{aligned}$$

следует считать первое слагаемое в  $\mu_1$  главным и приравнять порядки  $\nu_1$  и  $\mu_1$ . Тогда получится  $k = \frac{3}{2}$ ,  $C_2 = 0$ ,  $B_1 = \frac{1}{4}$ . Решение примет вид

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \delta_1 - C_1 (Y+1) - \frac{4}{3} B_2 (-\delta_1)^{\frac{1}{3}} (Y+1), \quad \nu = -C_1 \delta_1 + B_2 (-\delta_1)^{\frac{4}{3}}$$

Из условия на  $BB_1$  (45) ( $\nu_1 = \frac{1}{2} \mu_1$  при  $\delta_1 = -Y-1$ ) следует  $C_1 = -\frac{1}{6}$ . Вблизи  $B$  из (45) получится

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \delta_1 + \frac{1}{6} (Y+1), \quad \nu_1 = \frac{1}{6} \delta_1, \quad \delta_1 = -(Y+1) + \frac{5}{12} (Y+1)^2$$

При  $k = \frac{3}{2}$  имеется точное решение (40), удовлетворяющее начальному условию  $R_1(\rho_1) = \frac{1}{6} \rho_1^3$  [4]

$$\begin{aligned} R(\rho_1) &= -\frac{1}{2c^3} \frac{9}{10} \{ (\sqrt{1+c^3\rho_1^3} + c\rho_1)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{1+c^3\rho_1^3} - c\rho_1)^{\frac{1}{3}} \}^3 + \\ &+ \frac{1}{2c^3} \frac{27}{20} c\rho_1 \{ (\sqrt{1+c^3\rho_1^3} + c\rho_1)^{\frac{1}{3}} - (\sqrt{1+c^3\rho_1^3} - c\rho_1)^{\frac{1}{3}} \}^2 \end{aligned} \quad (46)$$

Асимптотическое поведение (46)

$$\text{при } \rho_1 \rightarrow 0 \quad R(\rho_1) = \frac{1}{6} \rho_1^3 + \frac{1}{9} c\rho_1^4 \quad (47)$$

$$\text{при } \rho_1 \rightarrow \infty \quad R(\rho_1) = \frac{1}{2c^2} \frac{3}{5} \rho_1 - \frac{1}{45c^3}$$

Если сравнить с (43), снова получится  $C_2 = 0$ , причем  $C_1 = -\frac{3}{10c^2}$ . Тогда  $c = \frac{3}{\sqrt{5}}$ . Решение при  $Y > -1$  непрерывно перейдет в реше-



ние при  $Y < -1$ . Решение (46), как показывает (47) при малом  $\rho_1$ , должно давать для (40) особую точку  $\frac{4}{9}\rho_1^2 - 2R' = 0$ ,  $\rho_1 R' - R = 0$ .

Для учета степеней  $(-\delta_1)^{\frac{1}{3}}$  в решении (43) следует искать решение (38) в виде

$$\varphi_1 = R(\rho)(Y+1)^{\frac{5}{3}} + F(\rho)(Y+1)^3 + G(\rho)(Y+1)^{\frac{7}{3}} \quad Y > -1$$

$$\varphi_1 = R_1(\rho_1)(-Y-1)^{\frac{5}{3}} + F_1(\rho_1)(-Y-1)^3 + G_1(\rho_1)(-Y-1)^{\frac{7}{3}} \quad Y < -1$$

Тогда для  $R, R_1, F, F_1$  получаются снова уравнения (40), (41). Для  $G$  получится уравнение

$$\frac{9}{4}\rho^2 G'' - \frac{27}{4}\rho G' + \frac{35}{4}G - F' - 2R'G'' + 2\rho F'' - 2F'F'' - 2G'R'' = 0$$

Асимптотика для больших  $\rho$  соответствует линейному однородному уравнению и имеет вид

$$G = A_1 \rho^{\frac{7}{3}} + A_2 \rho^{\frac{5}{3}}, \quad G_1 = A_1 \rho_1^{\frac{7}{3}} - A_2 \rho_1^{\frac{5}{3}}$$

Тогда

$$\varphi_1 = \frac{1}{6}\delta_1(Y+1) + \frac{1}{4}\delta_1^2 + B_2(-\delta_1)^{\frac{1}{3}}(Y+1) + A_1(-\delta_1)^{\frac{2}{3}} + \\ + A_2(-\delta_1)^{\frac{5}{3}}(Y+1)$$

и с точностью до  $(Y+1)^{\frac{1}{3}}$

$$\mu = \frac{1}{6}(Y+1) + \frac{1}{2}\delta_1 - \frac{4}{3}B_2(-\delta_1)^{\frac{1}{3}}(Y+1) - \frac{7}{3}A_1(-\delta_1)^{\frac{1}{3}} \quad (48a)$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{6}\delta_1 + B_2(-\delta_1)^{\frac{1}{3}}$$

Условия (45) дают

$$\delta_1 = -(Y+1) + \frac{5}{12}(Y+1)^2 + \gamma_1(Y+1)^{\frac{2}{3}}$$

$$\gamma_1 = -\frac{2}{7}B_2 - \frac{1}{2}A_1, \quad B_2 = -\frac{7}{10}A_1$$

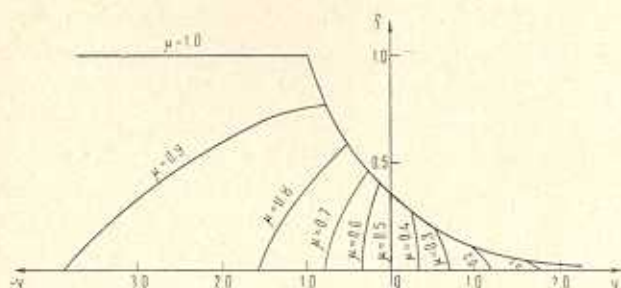
Для определения постоянной  $B_2$  следует решить уравнение (41)

$$F'' \frac{9}{4}\rho_1^2 - F' \frac{21}{4}\rho_1 + 6F = \Phi, \quad \Phi = R' - 2\rho_1 R'' - 2R'F'' + 2R''F' \quad (48)$$

Если подставить сюда  $R$  (46), то получится довольно громоздкое уравнение. Если же считать  $\Phi$  известной, то вариацией постоянных получится

$$F = \left( \frac{2}{3} \int_0^{\rho_1} \frac{\Phi}{\rho^3} d\rho + C_1 \right) \rho^2 + \left( -\frac{2}{3} \int_0^{\rho_1} \frac{\Phi}{\rho^{\frac{7}{3}}} d\rho + C_2 \right) \rho^{\frac{4}{3}}$$

где  $C_1, C_2$  — постоянные.



Фиг. 7.

Подставляя сюда известное начальное условие (47)  $R = \frac{1}{6} \rho_1^3 + \frac{1}{9} \rho_1^5$  и  $F = \frac{1}{4} \rho_1^2 + m \rho_1^4$ , где постоянное  $m$  подлежит определению,

можно найти значения постоянных  $C_2 = 0$ ,  $C_1 = \frac{1}{4}$ ,  $m = \frac{5}{36}$ . Значение

$C_2 \neq 0$  получится только при  $F = \rho_1^{\frac{4}{3}}$ , что противоречит  $F \sim \rho_1^2$ . Полученное уравнение для  $F$  есть интегральное уравнение. Однако, для принятой здесь точности, можно для больших  $\rho_1$  подставить в левую часть асимптотику для  $F$ , а в правой части интегрировать от 0 до  $a$ , подставляя  $\Phi$  при  $\rho_1 \rightarrow 0$ , и интегрировать от  $a$  до  $\infty$ , подставляя  $\Phi$  для  $\rho_1 \rightarrow 0$ . Следует учесть, что из (48) при  $\rho_1 \rightarrow 0$ ,  $\Phi = \frac{5}{3} \rho_1^4$ , при  $\rho_1 \rightarrow \infty$ ,

$$\Phi = \frac{1}{3} - \frac{4}{27} \frac{B_2}{\rho_1^{\frac{2}{3}}}$$

Тогда получится уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \rho_1^2 - B_2 \rho_1^4 &= \frac{1}{4} \rho_1^2 + \frac{2}{3} \rho_1^2 \int_0^a \frac{5}{3} \rho_1 d\rho + \frac{2}{3} \rho_1^2 \int_a^\infty \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{27} \frac{B_2}{\rho_1^{\frac{2}{3}}} \right) \frac{1}{\rho_1^2} d\rho_1 - \\ &- \frac{2}{3} \rho_1^4 \int_0^a \frac{5}{3} \rho_1^{\frac{5}{3}} d\rho_1 - \frac{2}{3} \rho_1^4 \int_a^\infty \left( \frac{1}{3} - \frac{4}{27} \frac{B_2}{\rho_1^{\frac{2}{3}}} \right) \frac{1}{\rho_1^{\frac{4}{3}}} d\rho_1 \end{aligned}$$

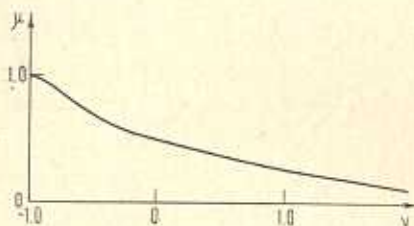
Отсюда, приравнявая коэффициенты при  $\rho_1^2$  и  $\rho_1^{\frac{4}{3}}$ , будем иметь

$$B_2 = \frac{5}{12} a^{\frac{8}{3}} - \frac{1}{6a^{\frac{4}{3}}} + \frac{4}{81} \frac{B_2}{a^2}, \quad \frac{5}{9} a^2 - \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{27} \frac{B_2}{a^{\frac{8}{3}}} = 0$$

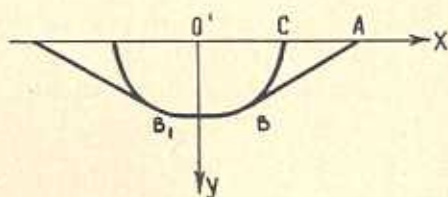
С большой точностью можно считать  $a = \frac{2}{3}$ ,  $B_2 = -\frac{41}{288} \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ .

Таким образом, определено решение в окрестности  $B$ , удовлетворяющее в некотором порядке условиям на  $BB_1$  и уравнению (38), а также сопрягающееся с асимптотикой вблизи  $\delta_1 = 0$ ,  $Y = -1$ . Для лучшего удовлетворения всех этих условий необходимо взять более высокие степени  $Y + 1$  в  $\varphi_1$ . Решение (48а) для  $\mu$  и  $\nu$ , верное вблизи  $Y = -1$ ,  $\delta = 1$ , плавно сопрягается с решением (15) при некотором значении  $Y_0$ ,  $\mu_0$ , если выбрать  $B = 0.6$ ,  $Y_0 = -0.92$ ,  $\mu_0 = 0.967$ . Результаты расчетов по (15) с начальным условием  $Y = -0.92$ ,  $\mu = 0.967$  даны на фиг. 8. Касательная составляющая скорости к ударной волне всюду, кроме небольшой окрестности  $\mu = 0.5$ , очень мала. В малой окрестности  $\mu = 0.5$

$$\mu = 0.5 \quad \frac{\nu - \mu \sqrt{2\delta - \mu}}{\nu} \sim 0.5.$$



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Следует заметить, что хотя решение (15), представленное на фиг. 3, удовлетворяет в  $B$  условию  $\nu = \mu \sqrt{2\delta - \mu}$  лишь в 0 порядке, само это условие подбором постоянной  $B$  на всей ударной волне  $BB_1$  удовлетворено с достаточной точностью и можно, вообще говоря, при расчетах обойтись без особой точки в  $B$ .

Задача о движении жидкости под действием давления может быть рассмотрена для вязкой жидкости. Решение уравнения малых возмущений

$$\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} = \left( a_0^2 + \frac{4}{3} \nu \frac{\partial}{\partial t} \right) \Delta P \quad (49)$$

после преобразования Лапласа записывается в виде

$$R = \sqrt{(x - x_1)^2 + y^2 + z^2}$$

$$\bar{P} = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \iint \frac{\bar{P}_1 e^{-\frac{s}{a_0} R}}{R} dx_1 dz e^{-\frac{2}{3} \frac{\nu s^2}{a_0^2} R} \quad (50)$$

где  $\bar{P}_1$  — преобразование граничного давления  $P_1$  и предположено  $\nu \approx \gamma^2$ ,



$s \approx \gamma^{-1}$ ,  $\frac{\gamma s}{a_0^2}$  мало. Отсюда, учитывая, что вблизи  $B$  правая часть, если в ней полагать  $v = 0$ , дает известное решение идеальной жидкости, можно получить  $x = r \cos \theta$ ,  $y = r \sin \theta$ ,

$$P = \frac{P_1}{\pi} \int_{\frac{r}{a_0}}^{\frac{r}{a_0}} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{t - \frac{r}{a_0} - \tau_1} \sqrt{2}}{(\theta - \theta_0) \sqrt{t}} \frac{e^{-\frac{\tau_1^2}{4v}}}{4 \frac{6v}{a_0^2} t} \frac{d\tau_1}{\sqrt{4\pi \frac{4v}{a_0^2} t}} \quad (51)$$

причем решение для идеальной жидкости взято в окрестности  $B$ , что возможно, поскольку заметно отличны от нуля под интегралом лишь значения] функции при  $\tau_1 \approx t - \frac{r}{a_0}$ . При  $t = \frac{r}{a_0}$  арктангенс терпит скачок от 0 при  $\theta > \theta_0$  до  $\pi$  при  $\theta < \theta_0$ , но  $P$  и его производные непрерывны. Для случая  $v = 0$  в линейной задаче потенциал  $\tilde{\varphi}_0$  имеет вид  $\tilde{\varphi}_0 = \frac{n+1}{2} \gamma^2 t a_0^2 \varphi_0$ ,  $\varphi_0 = -\frac{1}{\pi} \left( -\delta + \frac{Y^2}{2} \right) \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\delta} \sqrt{2}}{Y} + \frac{\sqrt{-\delta}}{\pi} \frac{Y}{\sqrt{2}}$  (52)

где смысл  $\delta$ ,  $Y$  указан ранее. Тогда, поскольку потенциал  $\tilde{\varphi}$  удовлетворяет (49) и дается сверткой  $\tilde{\varphi}_0$  с выражением, содержащим  $v$  в (51), решение для потенциала  $\tilde{\varphi}$  запишется

$$\tilde{\varphi} = \frac{n+1}{2} \gamma^2 t a_0^2 \varphi, \quad \varphi = t \int_{-\infty}^{-\delta} \varphi_0(-\delta - \tau, Y) \frac{e^{-\alpha \tau^2}}{\sqrt{\frac{8}{3} \pi \frac{v}{a_0^2} t}} d\tau, \quad (53)$$

$$\alpha = \frac{\left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \gamma^2}{\frac{8}{3} \frac{v}{a_0^2}}$$

Если в (49) перейти к переменным  $t$ ,  $\delta$ ,  $Y$ ,  $\varphi$ , оно запишется в порядке  $\gamma$  в виде

$$2t \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t \partial \delta} - 2\delta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2} + \frac{\partial \varphi}{\partial \delta} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial Y^2} - \frac{4}{3} \frac{v}{\left( \frac{n+1}{2} \right)^2 \gamma^2 t a_0^2} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \delta^3} = 0 \quad (54)$$

В нелинейном случае в коэффициент при  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \delta^2}$  добавится  $2\mu$ . По определению  $\varphi_0$  есть решение уравнения

$$(-\delta - \tau) \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \delta^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \delta} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial Y^2} = 0 \quad (55)$$

Поскольку рассматривается обобщенное решение, при проверке удовлетворения уравнения (54) решением (53) в качестве пределов интегрирования можно взять  $-\infty, \infty$ . Если учесть еще, что  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial \tau^2}$ , после интегрирования по частям

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^3 \varphi_0}{\partial \xi^3} e^{-\alpha \tau^2} d\tau = \alpha t \int_{-\infty}^{\infty} 2\tau \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} e^{-\alpha \tau^2} d\tau$$

и подстановки (53) в (54) в силу (55) получится уравнение

$$\sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} - t \alpha \tau^2 \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial \xi^2} \right) e^{-\alpha \tau^2} d\tau = 0$$

которое удовлетворяется, поскольку подинтегральное выражение можно записать в виде

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{\partial \varphi_0}{\partial \xi} \tau e^{-\alpha \tau^2} \right)$$

При произвольном граничном давлении  $P(x, 0, t) = P_1 P_0(\xi)$ , где  $\xi = \frac{x}{t}$ ,  $\eta = \frac{y}{t}$  решение в  $ABC$  будет простой волной

$$(\xi - v_x) \cos \varphi + (\eta - v_y) \sin \varphi = a, \quad \varphi = \text{const}$$

Параболическая линия  $\xi = v_x + a \cos \varphi$ ,  $\eta = v_y + a \sin \varphi$  в случае  $a'(\varphi) > 0$  лежит впереди огибающей указанных прямых

$$\xi = v_x + a \cos \varphi - \frac{n+1}{n-1} a' \sin \varphi, \quad \eta = v_y + a \sin \varphi + \frac{n+1}{n-1} a' \cos \varphi$$

а при  $a'(\varphi) < 0$  лежит на втором листе, после касания прямых с огибающей.

Институт математики и механики  
АН Армянской ССР

Поступила 11 VII 1967

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈՍՎ, Ա. Ա. ԳՈՐԳԵՆՅԱՆ

ՀԵՂՈՒԿՈՒԹ ՆԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՇՐՋԱԿԱՅՔԵՐԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ԵՐԿՈՒ  
ՈԶ-ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԳԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ի մ

Գրատարկվում է թույլ հարվածային ալիքների անդրադարձումը կոշտ անկյունից: Վերջավոր անկման անկյան համար, որոշված են գծային և ոչ-գծային

լուծումները անդրադարձող հարվածային ալիքի վրա, որը միացվում է միա-  
շափի լուծման հետ:

Նույն հարցը դիտարկվում է հարվածային ալիքի փոքր անկման անկյուն-  
ների համար:

Ուսումնասիրված է լուծումը, անդրադարձող ճակատների վրա ոչ-սեղու-  
յար անդրադարձման խնդրում, որտեղ ի տարբերություն սեղույյար խնդրի  
ճնշումը անդրադարձող ճակատի վրա աճում է՝ ճակատների միացման կետին  
մոտենալիս:

A. G. BAGDOEV, A. A. GURGENIAN

## ON THE TWO NONLINEAR PROBLEMS FOR THE DETERMINATION OF THE VICINITY OF SHOCK WAVES IN FLUID

### S u m m a r y

The problem of a weak shock reflection near the finite or small angles is considered. The solution of the linear and nonlinear problems near the reflected sonic wave is obtained and is joined with the one-dimensional solution. The investigation includes both cases of regular and irregular reflection.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Сагомонян А. Я. Пространственные задачи по неустановившемуся движению сжимаемой жидкости. Изд. МГУ, 1962.
2. Шиндяпин Г. П. О нерегулярном отражении слабых ударных волн от жесткой стенки. ПМТФ, № 2, 1964.
3. Lighthill Y. M. The diffraction of blast. Proceedings of the Royal Society, vol. 198, 1949.
4. Булах Б. М. Некоторые вопросы теории конических течений. ПММ, т. 25, № 2, 1961.
5. Рыжов О. С., Христианович С. А. О нелинейном отражении слабых ударных волн. ПММ, т. 22, № 5, 1958.