

С. Х. ГЕВОРКЯН

## ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ РЕШЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Задаче кручения составного призматического стержня посвящены работы [1—7] и другие. Исследованию плоской задачи теории упругости анизотропного однородного тела посвящены работы Д. И. Шермана [8], С. Г. Лехницкого [9], Г. Н. Савина [10], С. Г. Михлина [11], А. А. Баблюяна, В. С. Тонояна [12] и других.

В настоящей статье методами, развитыми в работах [13—14], исследуются особенности напряжений около угловой точки: а) поперечного сечения скручиваемого стержня, составленного из двух различных анизотропных тел; б) в плоской задаче ортотропного однородного тела, когда окрестность угловой точки свободна от внешней нагрузки.

Рассматриваемые задачи приводятся к трансцендентным уравнениям относительно порядка особенности, зависящего от величин углов и деформативных характеристик составляющих тело материалов.

§ 1. Рассмотрим задачу о кручении неоднородного призматического стержня, составленного из двух тел, обладающих цилиндрической анизотропией следующего вида: одно из главных направлений анизотропии совпадает с осью  $z$  и в каждой точке имеется плоскость упругой симметрии, совпадающая с поперечным сечением стержня, остальные два главных направления анизотропии составляют фиксированный угол  $\theta_{i0} \left( \theta_{i0} + \frac{\pi}{2} \right)$  ( $i = 1, 2$ ) с направлением радиуса-вектора  $r$ . Допустим, что линия раздела областей поперечного сечения, соответствующих материалам двух тел, выходит на контур поперечного сечения. Ветви контура поперечного сечения и линию раздела около угловой точки примем прямолинейными. В случае криволинейности их можно заменить касательными. От этого характер напряженного состояния в бесконечно малой окрестности угловой точки не изменится.

Поместим начало полярной системы координат  $r, \theta$  в угловой точке контура поперечного сечения, причем отсчет угла  $\theta$  будем производить от направления линии раздела (фиг. 1).

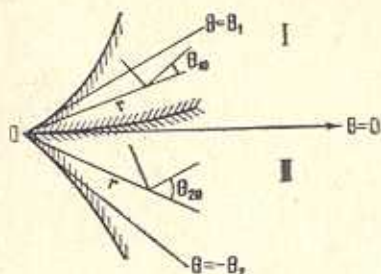
Из обобщенного закона Гука имеем

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(i)} &= a_{45}^{(i)} \tau_{\theta z}^{(i)} + a_{45}^{(i)} \tau_{rz}^{(i)} \\ \tau_{rz}^{(i)} &= a_{45}^{(i)} \tau_{\theta z}^{(i)} + a_{55}^{(i)} \tau_{rz}^{(i)} \quad (i = 1, 2) \end{aligned}$$

Коэффициенты  $a_{44}^{(i)}$ ,  $a_{45}^{(i)}$ ,  $a_{55}^{(i)}$  определяются формулами

$$\begin{aligned} a_{44}^{(i)} &= a_{44}^{(i0)} \cos^2 \theta_{i0} + a_{55}^{(i0)} \sin^2 \theta_{i0} \\ a_{45}^{(i)} &= \frac{1}{2} (a_{44}^{(i0)} - a_{55}^{(i0)}) \sin 2\theta_{i0} \\ a_{55}^{(i)} &= a_{44}^{(i0)} \sin^2 \theta_{i0} + a_{55}^{(i0)} \cos^2 \theta_{i0} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $a_{44}^{(i0)}$ ,  $a_{55}^{(i0)}$  — упругие постоянные по главным направлениям анизотропии.



Фиг. 1.

Когда  $\theta_{i0} = 0$  или  $\frac{\pi}{2}$ , получим ортотропные тела с цилиндрической анизотропией.

Функцию напряжений  $\Psi(r, \theta)$ , удовлетворяющую в областях I и II дифференциальному уравнению [9]

$$a_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - 2a_{45}^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \theta} + a_{55}^{(i)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + a_{44}^{(i)} \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} = -2\omega \quad (1.2)$$

$(i=1, 2)$

где  $\omega$  — относительный угол закручивания, и условию

$$\Psi(r, \theta) = 0 \quad (1.3)$$

на контуре поперечного сечения, представим в виде

$$\Psi(r, \theta) = \begin{cases} \Psi_1(r, \theta) & 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ \Psi_2(r, \theta) & -\theta_2 \leq \theta \leq 0 \end{cases} \quad (1.4)$$

Из условий непрерывности на линии раздела областей функций напряжений  $\Psi$  и перемещения  $\omega$  вдоль оси стержня и из (1.3) имеем

$$\begin{aligned} \Psi_1(r, \theta_1) &= 0, \quad \Psi_2(r, -\theta_2) = 0, \quad \Psi_1(r, 0) = \Psi_2(r, 0) \\ &- \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} (a_{44}^{(1)} + a_{45}^{(1)}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} (a_{45}^{(1)} + a_{55}^{(1)}) = \\ &= - \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} (a_{44}^{(2)} + a_{45}^{(2)}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} (a_{45}^{(2)} + a_{55}^{(2)}) \quad \text{при } \theta = 0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

Функции  $\Psi_i (i = 1, 2)$  можно представить в виде

$$\Psi_i(r, \theta) = r^{\lambda_i} \Theta_i(\theta) + \Psi_{i0}(r, \theta) \quad (i = 1, 2) \quad (1.6)$$

где  $\Psi_{i0}(r, \theta)$  — частное решение граничной задачи (1.2), (1.5).

Подставив (1.6) в (1.2) и разделив затем на  $r^{\lambda_i - 2}$ , получим дифференциальное уравнение

$$a_{55}^{(i)} \Theta_i'' - 2\lambda_i a_{45}^{(i)} \Theta_i' + \lambda_i^2 a_{44}^{(i)} \Theta_i = 0$$

решением которого является

$$\Theta_i(\theta) = e^{\lambda_i \beta_i \theta} (A_i \cos \lambda_i \beta_i \theta + B_i \sin \lambda_i \beta_i \theta) \quad (i = 1, 2) \quad (1.7)$$

где

$$\alpha_i = \frac{a_{45}^{(i)}}{a_{55}^{(i)}}, \quad \beta_i = \frac{\sqrt{a_{44}^{(i)} a_{55}^{(i)} - a_{45}^{(i)2}}}{a_{55}^{(i)}}, \quad (i = 1, 2) \quad (1.8)$$

Удовлетворив граничным условиям (1.5), из (1.6)–(1.8) получим

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$$

$$A_1 \cos \lambda \beta_1 \theta_1 + B_1 \sin \lambda \beta_1 \theta_1 = 0$$

$$A_2 \cos \lambda \beta_2 \theta_2 - B_2 \sin \lambda \beta_2 \theta_2 = 0 \quad (1.9)$$

$$A_1 - A_2 = 0, \quad A_1 M_1 + B_1 N_1 - A_2 M_2 - B_2 N_2 = 0$$

где

$$M_i = \alpha_i (a_{45}^{(i)} + a_{55}^{(i)}) - (a_{44}^{(i)} + a_{55}^{(i)}) \quad (1.10)$$

$$N_i = \beta_i (a_{45}^{(i)} + a_{55}^{(i)}) \quad (i = 1, 2)$$

Из условия существования нетривиального решения  $\lambda$  однородной системы (1.9) линейных алгебраических уравнений относительно  $A_1, A_2, B_1, B_2$  получим трансцендентное уравнение для определения  $\lambda$ .

$$(M_2 - M_1) \sin \lambda \beta_1 \theta_1 \sin \lambda \beta_2 \theta_2 + N_1 \sin \lambda \beta_2 \theta_2 \cos \lambda \beta_1 \theta_1 + \\ + N_2 \sin \lambda \beta_1 \theta_1 \cos \lambda \beta_2 \theta_2 = 0 \quad (1.11)$$

Частное решение  $\Psi_{i0}(r, \theta)$  можно представить в виде

$$\Psi_{i0}(r, \theta) = r^2 e^{2\alpha_i \theta} (A_{i0} \cos 2\beta_i \theta + B_{i0} \sin 2\beta_i \theta) - \frac{r^2 \omega}{2a_{44}^{(i)}} \quad (1.12)$$

где коэффициенты  $A_{i0}, B_{i0}$  определяются из (1.5).

Общее решение граничной задачи (1.2), (1.5) можно представить в виде „ряда Фурье“

$$\Psi_i(r, \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{(i)} \Psi_i^{(k)} + \Psi_{i0} \quad (i = 1, 2)$$

по собственным функциям



$$\Psi_i^{(k)}(r, \theta) = r^{\lambda_k} e^{\lambda_k \beta_i \theta} (A_i \cos \lambda_k \beta_i \theta + B_i \sin \lambda_k \beta_i \theta) \quad (i=1, 2; k=1, 2, \dots)$$

соответствующим собственным значениям  $\lambda_k$ , определенным из уравнения (1.11), все корни которого, как это нетрудно показать, действительны.

Компоненты напряжения  $\tau_{rz}$  и  $\tau_{\theta z}$  определяются по формулам

$$\tau_{rz} = \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta z} = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \quad (1.13)$$

Из представления функций  $\Psi_i(r, \theta)$  в виде (1.6) и (1.13) видно, что если  $0 < \lambda < 1$ , при приближении к угловой точке контура напряжения неограниченно возрастают. Порядок особенности в этом случае равен  $\lambda - 1$ . Поэтому задача о выявлении особенностей напряжений сводится к исследованию в интервале (01) существования корней трансцендентного уравнения (1.11).

Рассмотрим частные случаи.

1. Составляющие стержень материалы одинаковы. Тогда

$$M_2 = M_1, \quad N_2 = N_1, \quad \beta_2 = \beta_1 = \beta_0 = \sqrt{\frac{\alpha_{44}^0}{\alpha_{55}^0}}$$

и уравнение (1.11) примет вид

$$N_1 \sin \lambda \beta_0 (\theta_1 + \theta_2) = 0 \quad (1.14)$$

Из (1.14) видно, что при

$$\beta_0 (\theta_1 + \theta_2) > \pi \quad (1.15)$$

напряжения имеют особенность. Когда главные направления анизотропии совпадают с координатными линиями, условие (1.15) принимает вид

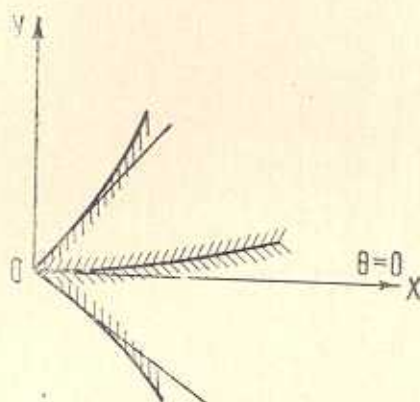
$$\sqrt{\frac{\alpha_{44}^0}{\alpha_{55}^0}} (\theta_1 + \theta_2) > \pi \quad (1.15a)$$

Формулы (1.15) и (1.15a) показывают, что, в зависимости от главных упругих постоянных и угла  $\theta_{i0}$ , особенности могут появляться на выступающих углах  $\theta_1 + \theta_2 < \pi$  и не появляться на входящих углах  $\theta_1 + \theta_2 > \pi$ . Этот результат можно было получить при помощи аффинного преобразования в полярной системе координат.

2. Допустим, что  $\theta_1 < \pi$  и  $\alpha_{ij}^{(1)}$  такие, что в угловой точке контура поперечного сечения однородного стержня напряжения имеют особенность. При помощи численного примера покажем, что увеличение данного угла за счет другого материала может привести к устранению особенности.

Пусть  $\theta_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $\theta_{10} = \theta_{20} = 0$ ,  $a_{44}^{(1)} = 37 \frac{\text{сМ}^2}{\text{кг}}$ ,  $a_{55}^{(1)} = 1 \frac{\text{сМ}^2}{\text{кг}}$ , тогда при  $\theta_2 < \frac{\pi}{2}$  и  $a_{44}^{(2)} = 1 \frac{\text{сМ}^2}{\text{кг}}$ ,  $a_{55}^{(2)} = 16 \frac{\text{сМ}^2}{\text{кг}}$ , напряжения в угловой точке контура поперечного сечения не имеют особенностей.

§ 2. Рассмотрим характер напряженного состояния вблизи угловой точки контура поперечного сечения скручиваемого призматического стержня, составленного из двух ортотропных материалов, когда направление касательной линии раздела в этой точке не совпадает с главными направлениями анизотропии составляющих материалов (фиг. 2).



Фиг. 2.

Функцию напряжений  $\Psi(x, y)$  представим в виде

$$\Psi(x, y) = \begin{cases} \Psi_1(x, y) & y \geq 0 \\ \Psi_2(x, y) & y \leq 0 \end{cases}$$

где  $\Psi_i(x, y)$  ( $i = 1, 2$ ) удовлетворяют уравнению

$$a_{44}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x^2} - 2a_{45}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial x \partial y} + a_{55}^{(i)} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} = -2\omega \quad (2.1)$$

и граничным условиям, аналогичным условиям (1.5)

$$-a_{45}^{(1)} \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + a_{55}^{(1)} \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = -a_{45}^{(2)} \frac{\partial \Psi_2}{\partial x} + a_{55}^{(2)} \frac{\partial \Psi_2}{\partial y} \quad \text{при } y = 0 \quad (2.2)$$

$$\Psi_1(x, 0) = \Psi_2(x, 0), \quad \Psi_1(x, k_1 x) = 0, \quad \Psi_2(x, k_2 x) = 0$$

где  $k_1, k_2$  — угловые коэффициенты касательных ветвей контура.

При помощи аффинного преобразования рассматриваемую задачу приведем к соответствующей задаче для составного изотропного стержня с несколько измененными контурными условиями.

В данном случае это преобразование имеет вид

$$x'_i = x + \alpha_3^{(i)} y, \quad y'_i = \beta_3^{(i)} y \quad (i = 1, 2) \quad (2.3)$$

где

$$\alpha_3^{(i)} = \frac{a_{45}^{(i)}}{a_{55}^{(i)}}, \quad \beta_3^{(i)} = \frac{\sqrt{a_{44}^{(i)} a_{55}^{(i)} - a_{45}^{(i)^2}}}{a_{55}^{(i)}} \quad (2.3)$$

индексы 1, 2 относятся к верхней и нижней полуплоскостям соответственно (фиг. 2).

Введем полярную систему координат, связанную с  $(x', y')$  соотношением

$$x'_i = r \cos \theta, \quad y'_i = r \sin \theta$$

Уравнение (2.1) и граничные условия (2.2) для функций  $\Psi_i$  в новой системе координат примут вид

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial \theta^2} = -2C_i \omega \quad (2.1a)$$

$$\begin{aligned} & (-\alpha_3^{(1)} + \alpha_{55}^{(1)} \alpha_3^{(1)}) \frac{\partial \Psi_1}{\partial r} + \alpha_{55}^{(1)} \frac{\beta_3^{(1)}}{r} \frac{\partial \Psi_1}{\partial \theta} = \\ & = (-\alpha_3^{(2)} + \alpha_{55}^{(2)} \alpha_3^{(2)}) \frac{\partial \Psi_2}{\partial r} + \alpha_{55}^{(2)} \frac{\beta_3^{(2)}}{r} \frac{\partial \Psi_2}{\partial \theta} \quad \text{при } \theta = 0 \end{aligned} \quad (2.2a)$$

$$\Psi_1(r, 0) = \Psi_2(r, 0), \quad \Psi_1(r, \theta_1) = 0, \quad \Psi_2(r, -\theta_2) = 0$$

где

$$C_i = \frac{a_{55}^{(i)}}{a_{44}^{(i)} a_{55}^{(i)} - a_{45}^{(i)^2}}$$

$$\theta_i = \arctg \frac{K_i \beta_3^{(i)}}{1 - K_i \alpha_3^{(i)} \alpha_{55}^{(i)}}$$

Представим функции  $\Psi_i(r, \theta)$  в виде

$$\Psi_i(r, \theta) = r^{\lambda_i} (A_i \cos \lambda_i \theta + B_i \sin \lambda_i \theta) + \Psi_{i0} \quad (2.4)$$

где  $\Psi_{i0}$  — частное решение уравнения (2.1a), удовлетворяющее условиям (2.2a).

Подставляя (2.4) в (2.2a), получим

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda, \quad A_1 - A_2 = 0, \quad A_1 \cos \lambda \theta_1 + B_1 \sin \lambda \theta_1 = 0 \\ A_2 \cos \lambda \theta_2 - B_2 \sin \lambda \theta_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$(-\alpha_3^{(1)} + \alpha_{55}^{(1)} \alpha_3^{(1)}) A_1 + \beta_3^{(1)} \alpha_{55}^{(1)} B_1 - (-\alpha_3^{(2)} + \alpha_{55}^{(2)} \alpha_3^{(2)}) A_2 + \beta_3^{(2)} \alpha_{55}^{(2)} B_2 = 0$$

Условие существования нетривиального решения системы (2.5) можно представить в виде

$$(\mu + 1) \sin \lambda (\theta_1 + \theta_2) + (\mu - 1) \sin \lambda (\theta_1 - \theta_2) + \nu \sin \lambda \theta_1 \sin \lambda \theta_2 = 0$$

где

$$(2.6)$$



$$\mu = \frac{a_{55}^{(1)} \beta_3^{(1)}}{a_{55}^{(2)} \beta_3^{(2)}} = \frac{\sqrt{a_{44}^{(1)} a_{55}^{(1)} - a_{45}^{(1)2}}}{\sqrt{a_{44}^{(2)} a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)2}}}$$

$$\nu = \frac{2(a_{45}^{(1)} - a_{45}^{(2)})}{a_{55}^{(2)} \beta_3^{(2)}} = \frac{2(a_{45}^{(1)} - a_{45}^{(2)})}{\sqrt{a_{44}^{(2)} a_{55}^{(2)} - a_{45}^{(2)2}}}$$

Аналогично вышесказанному, в угловой точке контура поперечного сечения напряжения имеют особенность, если трансцендентное уравнение относительно  $\lambda$  (2.6) имеет корни в интервале (01).

В частном случае, когда составляющие стержень материалы одинаковы

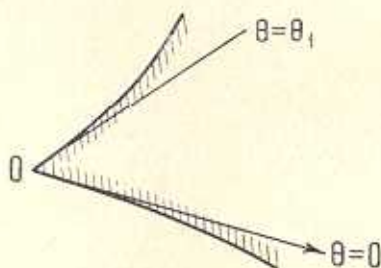
$$\alpha_3^{(1)} = \alpha_3^{(2)}, \quad \beta_3^{(1)} = \beta_3^{(2)}, \quad \mu = 1, \quad \nu = 0 \quad (2.7)$$

уравнение (2.5) принимает вид

$$\sin \lambda (\theta_1 + \theta_2) = 0$$

откуда видно, что при  $\theta_1 + \theta_2 > \pi$  напряжения имеют, а при  $\theta_1 + \theta_2 < \pi$  не имеют особенностей в угловой точке. Можно показать, что аффинное преобразование (2.3) при условии (2.7) выступающие (входящие) углы оставляет выступающими (входящими). Таким образом, у однородного анизотропного стержня, как и у изотропного, напряжения в угловой точке имеют особенность только на входящих углах.

§ 3. Пусть поперечное сечение цилиндрически ортотропного призматического тела, подвергнутого плоской деформации, на контуре имеет угловую точку (фиг. 3).



Фиг. 3.

Замена ветвей контура касательными не влияет на характер решения рассматриваемой задачи вблизи этой точки. Поместим начало полярной системы координат  $r, \theta$  в угловой точке контура поперечного сечения.

Функция напряжений  $F(r, \theta)$  удовлетворяет уравнению [9]

$$L_4(F) = a_3 \frac{\partial^4 F}{\partial r^4} + a_5 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^4 F}{\partial r^2 \partial \theta^2} + a_1 \frac{1}{r^4} \frac{\partial^4 F}{\partial \theta^4} + 2a_3 \frac{1}{r} \frac{\partial^3 F}{\partial r^3} -$$

$$- a_5 \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 F}{\partial r \partial \theta^2} - a_1 \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + (2a_1 + a_3) \frac{1}{r^4} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + a_1 \frac{1}{r^3} \frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad (3.1)$$

где

$$a_1 = \frac{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}{a_{33}}, \quad a_2 = \frac{a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}}{a_{33}}$$

$$a_3 = \frac{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}{a_{33}}, \quad a_4 = a_{66}, \quad a_5 = a_4 + 2a_2$$

Компоненты напряжений определяются формулами

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}, \quad \tau_{r\theta} = - \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{F}{r} \right) \quad (3.2)$$

Функцию  $F(r, \theta)$  представим в виде

$$F(r, \theta) = r^{\lambda+1} \Theta(\theta) \quad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (3.1), получим дифференциальное уравнение относительно  $\Theta(\theta)$

$$b_1 \Theta^{IV} + b_2 \Theta^{II} + b_3 \Theta = 0$$

где

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = \lambda^2 a_5 + 2a_1, \quad b_3 = \lambda^4 a_3 - \lambda^2 (a_3 - a_1) + a_1$$

общее решение которого можно представить в виде

$$\Theta(\theta) = A \operatorname{ch} \alpha \theta \cos \beta \theta + B \operatorname{sh} \alpha \theta \cos \beta \theta + C \operatorname{ch} \alpha \theta \sin \beta \theta + D \operatorname{sh} \alpha \theta \sin \beta \theta \quad (3.4)$$

где  $\alpha, \beta$  определяются из соотношения

$$z = \pm (\alpha \pm i\beta) =$$

$$= \pm \sqrt{\frac{-\lambda^2 a_5 - 2a_1 \pm \sqrt{\lambda^4 (a_3 - 4a_1 a_3) + 4(a_1 a_5 + a_1 a_3 + a_1^2) \lambda^2}}{2a_1}}$$

Допустим, что края  $\theta = 0$  и  $\theta = \theta_1$  свободны

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = 0, \quad \theta = \theta_1 \quad (3.5)$$

Удовлетворив условиям (3.5), на основании (3.2), (3.3), (3.4) получим

$$A = 0, \quad \alpha B + \beta C = 0$$

$$B \operatorname{sh} \alpha \theta_1 \cos \beta \theta_1 + C \operatorname{ch} \alpha \theta_1 \sin \beta \theta_1 + D \operatorname{sh} \alpha \theta_1 \sin \beta \theta_1 = 0$$

$$B(-\beta \operatorname{sh} \alpha \theta_1 \sin \beta \theta_1 + \alpha \cos \beta \theta_1 \operatorname{ch} \alpha \theta_1) + C(\beta \operatorname{ch} \alpha \theta_1 \cos \beta \theta_1 + \alpha \operatorname{sh} \alpha \theta_1 \sin \beta \theta_1) + \\ + D(\beta \operatorname{sh} \alpha \theta_1 \cos \beta \theta_1 + \alpha \operatorname{ch} \alpha \theta_1 \sin \beta \theta_1) = 0 \quad (3.6)$$

Условие существования нетривиального решения системы (3.6) имеет вид

$$\alpha^2 \sin^2 \beta \theta_1 = \beta^2 \operatorname{sh}^2 \alpha \theta_1 \quad (3.7)$$

Из выражений для функции напряжений и компонент напряжений видно, что если  $0 < \operatorname{Re} \lambda < 1$ , то в угловой точке напряжения имеют



особенность порядка  $Re \lambda$  — 1. Значения  $\lambda$  определяем из трансцендентного уравнения (3.7).

Автор выражает признательность К. С. Чобаняну за постановку задачи и за ценные советы в ходе решения.

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 26 XII 1967

Ս. Խ. ԳԵՎՈՐԿՅԱՆ

ԼՈՐԾՈՒՄՆԵՐԻ ԵՂԱԿՐՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ՈՐՍՈՒՄՆԱՍԻՐՈՒԹՅՈՒՆԸ  
ԱՆԻՉՈՏՐՈՊ ՄԱՐՄԵՆՆԵՐԻ ԱՌԱՉԳԱՆԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՄԻ  
ՔԱՆԻ ԿՆՏԻՐՆԵՐՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու մ

Ներկա հոդվածում [13—15] աշխատանքների մեթոդներով, ուսումնասիրված են՝ երկու տարրեր անիզոտրոպ նյութերից բաղկացած, բազադրյալ ոլորվող ձողի ընդլայնական հատույթի անկյունային կետի մոտ լարումների եզակիությունները: Ուսումնասիրված են նաև՝ օրթոտրոպ համասեռ մարմնի հարթ խնդրի լուծումների եզակիությունները, երբ անկյունային կետի շրջակայքը ազատ է արտաքին բեռից:

Դիտարկված խնդիրները բերվում են անկյունների մեծություններից և նյութերի դեֆորմացիոն հատկություններից կախված եզակիության կարգի նկատմամբ տրանսցենդենտ հավասարումների:

S. SH. GEVORKIAN

THE INVESTIGATION OF SINGULARITIES IN THE SOLUTIONS OF SOME PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR ANISOTROPIC SOLIDS

S u m m a r y

In this paper we investigate the singularities of stresses at the corner points:

a) the cross section of a twisted rod of two different anisotropic bodies;

b) in the plane problem of orthotropic homogeneous solids when the neighbourhood of an angular point is free from an external load.

The problems considered are reduced to the transcendental equations.

The relation of the order of singularity from the magnitude of angles and elastic moduls of materials are considered.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мухелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1954.
2. *Чобанян К. С.* Применение функции напряжений в задаче о кручении призматических стержней, составленных из различных материалов. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат., ест. и техн. наук, т. VIII, № 2, 1955, 17—30.
3. *Веква И. Н., Рухадзе А. К.* Кручение и изгиб поперечной силой бруса, составленного из двух материалов, ограниченных конфокальными эллипсами. ПММ, т. I, вып. 2, 1933, 167—178.
4. *Бори К. И.* Studii și cercetări științ. Acad RPR Fil. Lași Mat., VIII, № 2, 1957, 163—190.
5. *Чжоу Хюэй-юань.* Acta mech. sinica, 3, № 2, 1959.
6. *Хатиашвили Г. М.* Задача Альмаиеси-Митчеля для составного бруса. Тр. Вычисл. центра АН Груз. ССР, т. II, 1961.
7. *Саркисян В. С.* Кручение неортотропных составных призматических стержней. Докл. АН АрмССР, т. X, № 22, 1965.
8. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости для анизотропной среды. Труды Сейсмологического института АН СССР, № 86, 1938.
9. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. ГИТА, М.—Л., 1950.
10. *Савин Г. Н.* Основная плоская статическая задача теории упругости для анизотропной среды. Труды института строительной механики УАН, № 32, 1938.
11. *Михлин С. Г.* Плоская деформация в анизотропной среде. Труды Сейсмологического института АН СССР, № 76, 1936.
12. *Баблоян А. А., Тоноян В. С.* Плоская задача для ортотропной пластинки в виде кольцевого сектора. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, № 5, 1964.
13. *Williams M. L.* The stresses Around a Fault or Crack in Dissimilar Media. Bulletin of the Seismological Society of America, vol. 49, 1959, 199—204.
14. *Чобанян К. С.* Об особенностях распределения напряжений около угловых точек линии раздела и контура сечения скручиваемого составного стержня. Доклад на общем годичном собрании АН АрмССР, 1966.