ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 4, 1968 Механика

А. С. ХАЧИКЯН

РАВНОВЕСИЕ НЕОДНОРОДНОЙ УПРУГОЙ ПЛОСКОСТИ С ТОНКОСТЕННЫМ УПРУГИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

Равновесие однородной упругой плоскости с прямолинейным тонким включением было рассмотрено в работе [1]. Ниже рассматривается равновесие двух однородных полуплоскостей с различными упругими постоянными, соединенных между собой тонким упругим включением (слой клея).

1. Рассмотрим находящееся в условиях плоской деформации упругое тело, состоящее из двух однородных полупространств с различными упругими постоянными, соединенных между собой тонким упругим слоем. Согласно [1] на границе включения имеем

$$\sigma_{y2}-\sigma_{y1}+\frac{T}{\rho}=0, \qquad \tau_{xy2}-\tau_{xy1}+\frac{\partial T}{\partial x}=0 \tag{1.1}$$

$$u_1=u_2, \qquad v_1=v_2 \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{T(1-\nu^2)}{2hE_{\text{вк}}} \tag{1.3}$$

Здесь и в дальнейшем индекс 1 относится к нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z<0$, индекс 2—к верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$, τ_{xyi}, $\sigma_{yi}\,(i=1,\ 2)$ — касательные и нормальные напряжения, u_i, v_i — составляющие вектора перемещений, $E_{\text{вк}}$, $\nu_{\text{вк}}$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала включения, $2h$ — толщина включения, ρ — радиус кривизны средней линии включения,

$$T=\int_{-h}^{h}\sigma_x dy$$

Пренебрегая членами порядка $1/\rho$ и используя (1.3), условия (1.1) приведем к виду

$$\sigma_{y2}-\sigma_{y1}=0, \qquad \tau_{xy1}-\tau_{xy2}=k\frac{d^2u_1}{dx^2} \tag{1.4}$$

$$k=\frac{2hE_{\text{вк}}}{1-\nu_{\text{вк}}^2}=\frac{4h\mu_{\text{вк}}}{1-\nu_{\text{вк}}} \tag{1.5}$$

2. Пусть на конечном расстоянии от начала координат на рассматриваемую плоскость действует уравновешенная система n сосре-

доточенных сил $X_j + iY_j$ $(j = 1, 2, \cdots, n)$, приложенных в точках z_j соответственно. Допустим, что первые m сил $(m \leqslant n)$ приложены в точках нижней полуплоскости $\operatorname{Im} z < 0$, остальные $n - m$ приложены в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$.

Компоненты тензора напряжений и компоненты вектора смещений через две функции комплексного переменного выражаются формулами [2]

$$
\begin{aligned}
\sigma_{yi} - i\tau_{xyi} &= \Phi_{0i}(z) + \overline{\Phi_{0i}(z)} + z\,\overline{\Phi'_{0i}(z)} + \overline{\Psi_{0i}(z)} \\
2\mu_i (u'_i + iv'_i) &= \varkappa_i \Phi_{0i}(z) - \overline{\Phi_{0i}(z)} - z\overline{\Phi'_{0i}(z)} - \overline{\Psi_{0i}(z)}
\end{aligned}
\qquad (i = 1, 2) \qquad (2.1)
$$

где

$$
u'_i = \frac{\partial u_i}{\partial x}, \qquad v'_i = \frac{\partial v_i}{\partial x}, \qquad \varkappa_i = 3 - 4\nu_i
$$

μ_i — модуль сдвига материала соответствующей полуплоскости.

Функции Φ_{0i} и Ψ_{0i} имеют вид [2]

$$
\begin{aligned}
\Phi_{01}(z) &= -\sum_{j=1}^{m} \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{z - z_j} + \Phi_1(z) \\
\Psi_{01}(z) &= \sum_{j=1}^{m} \frac{\varkappa_1 (X_j - iY_j)}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\bar z_j (X_j + iY_j)}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{(z - z_j)^2} + \Psi_1(z)
\end{aligned}
\qquad (2.2)
$$

$$
\begin{aligned}
\Phi_{02}(z) &= -\sum_{j=m+1}^{n} \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{z - z_j} + \Phi_2(z) \\
\Psi_{02}(z) &= \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\varkappa_2 (X_j - iY_j)}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\bar z_j (X_j + iY_j)}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{(z - z_j)^2} + \Psi_2(z)
\end{aligned}
\qquad (2.3)
$$

Определим функцию $\Phi_1(z)$ в верхней, а $\Phi_2(z)$ в нижней полуплоскостях формулами [2]

$$
\begin{aligned}
\Phi_1(z) &= -\bar\Phi_1(z) - z\bar\Phi'_1(z) - \bar\Psi_1(z) \quad \text{при } z \text{ в } S^+ \\
\Phi_2(z) &= -\bar\Phi_2(z) - z\bar\Phi'_2(z) - \bar\Psi_2(z) \quad \text{при } z \text{ в } S^-
\end{aligned}
\qquad (2.4)
$$

Определяя из (2.4) $\Psi_i(z)$ и используя (2.2), (2.3), выражения (2.1) приведем к виду

$$
\begin{aligned}
\sigma_{yi} - i\tau_{xyi} &= \Phi_i(z) - \Phi_i(\bar z) + (z - \bar z)\,\overline{\Phi'_i(z)} + A_i(z) \\
2\mu_i (u'_i + iv'_i) &= \varkappa_i \Phi_i(z) + \Phi_i(\bar z) - (z - \bar z)\,\overline{\Phi'_i(z)} + B_i(z)
\end{aligned}
\qquad (2.5)
$$

где

$$A_1(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(1-\varkappa_1) X_j + i(1+\varkappa_1) Y_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_j} -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{z - z_j} + \sum_{j=1}^{m} \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{z - z_j}{(\bar{z} - \bar{z}_j)^2}$$

$$A_2(z) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{(1-\varkappa_2) X_j + i(1+\varkappa_2) Y_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_j} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \frac{X_j + iY_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{z - z_j} + \sum_{j=m+1}^{n} \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{z - z_j}{(\bar{z} - \bar{z}_j)^2} \tag{2.6}$$

$$B_1(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{(1-\varkappa_1) X_j - i(1+\varkappa_1) Y_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_j} -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \frac{\varkappa_1 (X_j + iY_j)}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=1}^{m} \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\varkappa_1)} \frac{z - z_j}{(\bar{z} - \bar{z}_j)^2}$$

$$B_2(z) = \sum_{j=m+1}^{n} \frac{(1-\varkappa_2) X_j - i(1+\varkappa_2) Y_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{\bar{z} - \bar{z}_j} -$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\varkappa_2 (X_j + iY_j)}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{1}{z - z_j} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{X_j - iY_j}{2\pi(1+\varkappa_2)} \frac{z - z_j}{(\bar{z} - \bar{z}_j)^2}$$

На основании (2.5) для предельных значений напряжений и производных перемещений по x на действительной оси находим

$$\sigma_{y1} - i\tau_{xy1} = \Phi_1^-(t) - \Phi_1^+(t) + A_1(t)$$

$$\sigma_{y2} - i\tau_{xy2} = \Phi_2^+(t) - \Phi_2^-(t) + A_2(t)$$

$$2\mu_1(u_1' + iv_1') = \varkappa_1 \Phi_1^-(t) + \Phi_1^+(t) + B_1(t) \tag{2.7}$$

$$2\mu_2(u_2' + iv_2') = \varkappa_2 \Phi_2^+(t) + \Phi_2^-(t) + B_2(t)$$

Внося в граничные условия (1.2), (1.4) выражения для компонентов тензора напряжений и производных компонентов вектора перемещений из (2.7), получаем следующие четыре задачи сопряжения относительно некоторых комбинаций граничных значений искомых функций

$$\Phi_2^+(t) + \Phi_1^+(t) - \overline{\Phi_2^-(t)} - \overline{\Phi_1^-(t)} - (\Phi_2^-(t) + \Phi_1^-(t) - \overline{\Phi_2^+(t)} - \overline{\Phi_1^+(t)}) =$$

$$= A_1(t) + \overline{A_1(t)} - A_2(t) - \overline{A_2(t)}$$

$$\varepsilon\varkappa_2 \Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) - \varepsilon\overline{\Phi_2^-(t)} + \varkappa_1 \overline{\Phi_1^-(t)} - (\varkappa_1 \Phi_1^-(t) - \varepsilon\Phi_2^-(t) + \tag{2.8}$$

$$+ \varepsilon\varkappa_2 \overline{\Phi_2^+(t)} - \overline{\Phi_1^+(t)}) = \varepsilon\overline{B_2(t)} - \varepsilon B_2(t) + B_1(t) - \overline{B_1(t)}$$

$$\varepsilon\varkappa_2\Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) + \varepsilon\overline{\Phi_2^-(t)} - \varkappa_1\overline{\Phi_1^-(t)} - (\varkappa_1\Phi_1^-(t) - \varepsilon\Phi_2^-(t) -$$

$$- \varepsilon\varkappa_2\overline{\Phi_2^+(t)} + \overline{\Phi_1^+(t)}) = B_1(t) + \overline{B_1(t)} - \varepsilon B_2(t) - \varepsilon\overline{B_2(t)}$$

$$k_1\Phi_1'^+(t) + k_1\varkappa_1\overline{\Phi_1'^-(t)} - \Phi_1^+(t) - \Phi_2^+(t) - \overline{\Phi_1^-(t)} - \overline{\Phi_2^-(t)} + \tag{2.8}$$

$$+ (\Phi_1^-(t) + \Phi_2^-(t) + \overline{\Phi_1^+(t)} + \overline{\Phi_2^+(t)} + k_1\varkappa_1\Phi_1'^-(t) +$$

$$+ k_1\overline{\Phi_1'^+(t)}) = A_2(t) - \overline{A_2(t)} - A_1(t) + \overline{A_1(t)} - k_1B_1'(t) - k_1\overline{B_1'(t)}$$

где

$$\varepsilon = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \qquad k_1 = \frac{ki}{2\mu_1} \tag{2.9}$$

При принятых условиях функции $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ на бесконечности ведут себя как $\frac{1}{z^2}$.

Решив задачи сопряжения (2.8), для комбинаций граничных значений искомых функций получим

$$\Phi_2^+(t) + \Phi_1^+(t) - \overline{\Phi_2^-(t)} - \overline{\Phi_1^-(t)} = D_1^+(t)$$

$$\varepsilon\varkappa_2\Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) - \varepsilon\overline{\Phi_2^-(t)} + \varkappa_1\overline{\Phi_1^-(t)} = D_2^+(t)$$

$$\varepsilon\varkappa_2\Phi_2^+(t) - \Phi_1^+(t) + \varepsilon\overline{\Phi_2^-(t)} - \varkappa_1\overline{\Phi_1^-(t)} = D_3^+(t) \tag{2.10}$$

$$k_1\Phi_1'^+(t) + k_1\varkappa_1\overline{\Phi_1'^-(t)} - \Phi_1^+(t) - \Phi_2^+(t) - \overline{\Phi_1^-(t)} - \overline{\Phi_2^-(t)} = D_4^+(t)$$

где

$$D_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_1(t) + \overline{A_1(t)} - A_2(t) - \overline{A_2(t)}}{t - z}\,dt$$

$$D_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon\overline{B_2(t)} - \varepsilon B_2(t) + B_1(t) - \overline{B_1(t)}}{t - z}\,dt$$

$$D_3(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{B_1(t) + \overline{B_1(t)} - \varepsilon B_2(t) - \varepsilon\overline{B_2(t)}}{t - z}\,dt \tag{2.11}$$

$$D_4(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_2(t) - \overline{A_2(t)} - A_1(t) + \overline{A_1(t)} - k_1B_1'(t) - k_1\overline{B_1'(t)}}{t - z}\,dt$$

Определение функции $\overline{\Phi_1^-(t)}$ приводит систему (2.10) к линейному дифференциальному уравнению

$$\overline{\Phi_1'^-(t)} + B_0\overline{\Phi_1^-(t)} = D(t) \tag{2.12}$$

где

$$D(t)=A_0\Big[D_1^+(t)+D_1^-(t)-\frac{1}{\varepsilon}D_2(t)+\frac{1}{\varepsilon}D_3^+(t)-$$

$$-\left(D_3^-(t)-\frac{\varkappa_2+1}{\varkappa_2-1}D_2^+(t)+\frac{2\varkappa_2\varepsilon}{\varkappa_2-1}D_1^+(t)\right)\frac{k_1(\varkappa_2-1)}{2(\varkappa_2\varepsilon+1)}\Big]$$

$$A_0=\frac{1}{k_1}\frac{\varepsilon\varkappa_2+1}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)} \tag{2.13}$$

$$B_0=\frac{-2}{\varepsilon k_1}\frac{(\varepsilon+\varkappa_1)(\varepsilon\varkappa_2+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}$$

Решение уравнения (2.12) с учетом условий на бесконечности имеет вид

$$\overline{\Phi_1^-(t)}=e^{-B_0t}\int\limits_{-\infty}^{t}D(t)e^{B_0t}dt \tag{2.14}$$

Используя (2.14) и (2.10), найдем граничные значения всех искомых функций. Функции Φ_1 и Φ_2 выражаются интегралом типа Коши

$$\Phi_l(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_l^+(t)-\Phi_l^-(t)}{t-z}dt \tag{2.15}$$

Компоненты тензора напряжений и вектора перемещений могут быть найдены по формулам (2.15), (2.5), (2.6).

3. Рассмотрим частный случай, когда на упругую плоскость действуют сосредоточенные силы $2iP$, $-iP$, $-iP$ в точках $z_1(0;-il)$, $z_2(-a;ib)$, $z_3(a;ib)$ соответственно. Решением системы уравнений (2.10) будут функции

$$\overline{\Phi_1^-(t)}=e^{-B_0t}A_0\Big[L_1\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{e^{B_0t}}{t-z_1}dt+L_2\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{e^{B_0t}}{t-\bar z_2}dt+$$

$$+L_3\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{e^{B_0t}}{t-\bar z_3}dt\Big]-A_0\Big[\frac{R_1}{t-z_1}+\frac{R_2}{(t-z_1)^2}+\frac{R_3}{t-\bar z^2}+\frac{R_4}{(t-\bar z_2)^2}+$$

$$+\frac{R_5}{t-\bar z_3}+\frac{R_6}{(t-\bar z_3)^2}\Big] \tag{3.1}$$

$$\Phi_1^-(t)=\frac{\varkappa_2(\varepsilon+\varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\overline{\Phi_1^-(t)}+\frac{\varkappa_1(\varkappa_2-1)-\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_1}{t-z_1}+$$

$$+\frac{\varkappa_2(\varepsilon-1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_1(z_1-\bar z_1)}{(t-z_1)^2}+\frac{2\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2}{t-\bar z_2}+\frac{\varepsilon(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2(z_2-\bar z_2)}{(t-\bar z_2)^2}+$$

$$+\frac{2\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2}{t-\bar z_3}+\frac{\varepsilon(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2(z_3-\bar z_3)}{(t-\bar z_3)^2}$$

$$\Phi_2^+(t)=\frac{\varepsilon+\varkappa_1}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2+1)}\overline{\Phi_1^-(t)}+\frac{\varkappa_1(1-2\varepsilon)-\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2+1)}\frac{c_1}{t-z_1}+$$

$$+\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2+1)}\frac{c_1(z_1-\bar z_1)}{(t-z_1)^2}+\frac{\varkappa_2(2-\varepsilon)+1}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2}{t-\bar z_2}+$$

$$+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2(z_2-\bar z_2)}{(t-\bar z_2)^2}+\frac{\varkappa_2(2-\varepsilon)+1}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2}{t-\bar z_3}+\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon\varkappa_2+1}\frac{c_2(z_3-\bar z_3)}{(t-\bar z_3)^2} \tag{3.2}$$

$$\overline{\Phi_2^-(t)}=\frac{\varkappa_1}{\varepsilon}\overline{\Phi_1^-(t)}+\frac{\varkappa_1}{\varepsilon}\frac{c_1}{t-z_1}-\frac{1}{\varepsilon}\frac{c_1(z_1-\bar z_1)}{(t-z_1)^2}+\frac{c_2\varkappa_2}{t-\bar z_2}+\frac{c_2\varkappa_2}{t-\bar z_3}.$$

где

$$c_1=\frac{2iP}{2\pi(1+\varkappa_1)},\qquad c_2=\frac{iP}{2\pi(1+\varkappa_2)} \tag{3.3}$$

$$L_1=\frac{2c_1}{\varepsilon}\left[\varkappa_1-\frac{2(z_1-\bar z_1)}{k_1\varepsilon}\frac{(\varepsilon+\varkappa_1)(\varkappa_1+1)(\varepsilon\varkappa_2+1)^2}{(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1))^2}-\varkappa_1\varepsilon-2(\varepsilon+\varkappa_1)\right]$$

$$L_j=\frac{2c_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}\left[\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1-1)-\varkappa_1(\varkappa_2-1)+\right. \tag{3.4}$$

$$\left.+\frac{(\varepsilon\varkappa_2+1)(\varkappa_1+\varepsilon)^2}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}\frac{2(z_j-\bar z_j)}{k_1\varepsilon}\right]\quad(j=2;\ 3)$$

$$R_1=\frac{2c_1(z_1-\bar z_1)}{\varepsilon}\frac{(\varepsilon\varkappa_2+1)(\varkappa_1+\varepsilon)\varepsilon-2(\varkappa_2+1)(\varkappa_1+\varepsilon)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}+$$

$$+\frac{c_1k_1(\varkappa_1(\varkappa_2+1)-\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1))}{\varepsilon\varkappa_2+1}$$

$$R_2=-c_1k_1(z_1-\bar z_1)\frac{\varkappa_2+1}{\varepsilon\varkappa_2+1},\qquad R_4=c_2\varepsilon k_1(z_2-\bar z_2)\frac{\varkappa_2+1}{\varepsilon\varkappa_2+1} \tag{3.5}$$

$$R_3=\frac{2c_2k_1\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}+\frac{2c_2(z_2-\bar z_2)(\varkappa_2+1)(\varepsilon+\varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}$$

$$R_5=\frac{2c_2k_1\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}+\frac{2c_2(z_3-\bar z_3)(\varkappa_2+1)(\varepsilon+x_1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}$$

$$R_6=c_2\varepsilon k_1(z_3-\bar z_3)\frac{\varkappa_2+1}{\varepsilon\varkappa_2+1}$$

Для касательных напряжений на границе включения из формул (2.7), (3.1)—(3.5) получим

$$\tau_{xy1}=\frac{\varkappa_1\varkappa_2+2\varepsilon\varkappa_2+1}{k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1))}\left\{\cos Bt\left[L_1\left(\int_{-\infty}^{t}\frac{t\sin Bt}{t^2+l^2}\,dt-\right.\right.\right.$$

$$-l\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{t^2+l^2}\,dt\Bigg)+L_2\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t+a)\sin Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt-b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_3\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t-a)\sin Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt-b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt\Bigg)\Bigg]-$$

$$-\sin Bt\Bigg[L_1\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{t\cos Bt}{t^2+l^2}\,dt+l\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{t^2+l^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_2\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t+a)\cos Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt+b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_3\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t-a)\cos Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt+b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt\Bigg)\Bigg]\Bigg\}-\frac{iE_1t}{t^2+l^2}+$$

$$+\frac{2lE_2t}{(t^2+l^2)^2}-\frac{iE_3(t+a)}{(t+a)^2+b^2}+\frac{2bE_4(t+a)}{((t+a)^2+b^2)^2}-$$

$$-\frac{iE_5(t-a)}{(t-a)^2+b^2}+\frac{2bE_6(t-a)}{((t-a)^2+b^2)^2}$$

$$-\tau_{xy1}=\frac{\varkappa_1\varkappa_2\varepsilon+2\varkappa_1+\varepsilon}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2+1)}\Bigg\{\cos Bt\Bigg[L_1\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{t\sin Bt}{t^2+l^2}\,dt-$$

$$-l\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{t^2+l^2}\,dt\Bigg)+L_2\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t+a)\sin Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt-b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_3\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t-a)\sin Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt-b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\cos Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt\Bigg)\Bigg]-$$

$$-\sin Bt\Bigg[L_1\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{t\cos Bt}{t^2+l^2}\,dt+l\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{t^2+l^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_2\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t+a)\cos Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt+b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{(t+a)^2+b^2}\,dt\Bigg)+$$

$$+L_3\Bigg(\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{(t-a)\cos Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt+b\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{\sin Bt}{(t-a)^2+b^2}\,dt\Bigg)\Bigg]\Bigg\}-$$

$$-\frac{iN_1 t}{t^2+l^2}+\frac{2lN_2 t}{(t^2+l^2)^2}-\frac{iN_3(t+a)}{(t+a)^2+b^2}+\frac{2bN_4(t+a)}{((t+a)^2+b^2)^2}-$$

$$-\frac{iN_5(t-a)}{(t-a)^2+b^2}+\frac{2bN_6(t-a)}{((t-a)^2+b^2)^2}$$

где

$$E_1=\frac{c_1(\varkappa_1\varkappa_2+2\varkappa_2\varepsilon+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}\left[\frac{\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_1)-\varkappa_1(\varkappa_2+1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}+\right.$$

$$\left.+\frac{4il(\varkappa_1+1)(\varepsilon\varkappa_2+1)}{k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1))}\right]+\frac{c_1(\varkappa_1\varkappa_2(1-2\varepsilon)+1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}$$

$$E_2=\frac{2ilc_1}{\varepsilon\varkappa_2+1}\left[\frac{(\varkappa_2+1)(\varkappa_1\varkappa_2+2\varkappa_2\varepsilon+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}+2\varkappa_2\varepsilon-\varkappa_2+1\right]$$

$$E_3=E_5=\frac{2c_2(\varkappa_1\varkappa_2+2\varkappa_2\varepsilon+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(1+\varkappa_2)}\left[\frac{2ib(\varkappa_2+1)(\varepsilon+\varkappa_1)}{k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1))}-\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\right]+\frac{2c_2\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}$$

$$E_4=E_6=\frac{2ibc_2\varepsilon(1+\varkappa_2)(1-\varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}$$

$$N_1=\frac{c_1(\varkappa_1\varkappa_2\varepsilon+2\varkappa_1+\varepsilon)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}\left[\frac{\varepsilon\varkappa_2(1+\varkappa_1)-\varkappa_1(\varkappa_2+1)}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2+1)}+\right.$$

$$\left.+\frac{4il(\varkappa_1+1)(\varepsilon\varkappa_2+1)}{\varepsilon k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1))}\right]+c_1\frac{2\varkappa_1-\varepsilon+\varepsilon\varkappa_1(\varkappa_2-2)}{\varepsilon(\varepsilon\varkappa_2+1)}$$

$$N_2=\frac{2ilc_1(1-\varkappa_2)(\varkappa_1+1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}$$

$$N_3=N_5=\frac{c_2(\varkappa_1\varkappa_2\varepsilon+2\varkappa_1+\varepsilon)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)}\left[\frac{4ib(\varkappa_2+1)(\varepsilon+\varkappa_1)}{\varepsilon k_1(\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1))}-\right.$$

$$\left.-\frac{2\varkappa_2(1+\varkappa_2)}{\varepsilon\varkappa_2+1}\right]+\frac{2c_2(\varkappa_2+1)}{\varepsilon\varkappa_2+1}$$

$$N_4=N_6=\frac{2ibc_2(1+\varkappa_2)(\varepsilon\varkappa_1+\varepsilon+2\varkappa_1)}{\varepsilon\varkappa_2(\varkappa_1+1)+\varkappa_1(\varkappa_2+1)},\qquad B_0=iB$$

Вычислены значения касательных напряжений τ_{xy1} и τ_{xy2} в некоторых точках при различных значениях ε и k_1.

Вычисления проводились при следующих значениях исходных параметров:

$$\nu_1=\nu_2=\nu_{\text{вк}}=1/3,\qquad a=b=l=1 \text{ ед. длины.}$$

Интегралы были вычислены на ЭВМ „Наири“ с точностью $0.1\cdot10^{-4}$.

Значения величин $\frac{0.3i\tau_{xy1}}{Pk_1}$ и $\frac{0.3i\tau_{xy2}}{Pk_1}$ при $k_1 = 0.3i$ ед. длины приведены в табл. 1, а значения величин $\frac{1.5i\tau_{xy1}}{Pk_1}$ и $\frac{1.5i\tau_{xy2}}{Pk_1}$ при $k_1 = 1.5i$ ед. длины—в табл. 2.

Таблица 1

Величина	t / z	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0
$\frac{0.3i\tau_{xy2}}{pk_1}$	0.20	−0.100	−0.138	−0.160	−0.227	−0.166	−0.029	−0.001	−0.020	−0.021
	0.40	−0.073	−0.117	−0.174	−0.239	−0.154	0.006	−0.009	−0.048	−0.002
	1.00	−0.050	−0.096	−0.139	−0.197	−0.122	0.020	0.004	0.013	0.009
	1.20	−0.055	0.105	−0.146	−0.194	−0.101	0.043	0.013	0.004	−0.001
	2.00	−0.047	−0.090	−0.125	−0.173	−0.067	0.061	0.016	0.006	0.015
$\frac{0.3i\tau_{xy1}}{pk_1}$	0.20	−0.071	−0.145	−0.206	−0.258	−0.179	−0.028	−0.013	−0.002	−0.002
	0.40	−0.075	−0.151	−0.203	−0.253	−0.164	−0.012	−0.000	0.017	−0.002
	1.00	−0.082	−0.156	−0.210	−0.252	−0.126	0.037	0.015	−0.006	−0.008
	1.20	−0.073	−0.139	−0.189	−0.238	−0.131	0.028	0.018	0.001	0.008
	2.00	−0.071	−0.136	−0.187	−0.254	−0.117	0.041	0.023	0.008	−0.023

Таблица 2

Величина	t / z	0.1	0.2	0.3	0.5	1.0	2.0	3.0	4.0	6.0
$\frac{1.5i\tau_{xy1}}{pk_1}$	0.20	−0.078	−0.147	−0.201	−0.255	−0.182	−0.033	−0.011	−0.004	−0.001
	0.40	−0.080	−0.152	−0.214	−0.262	−0.179	−0.020	−0.003	−0.001	0.000
	1.00	−0.084	−0.159	−0.218	0.273	−0.176	−0.001	0.008	0.006	0.002
	1.20	−0.085	−0.161	−0.187	−0.275	−0.175	0.003	0.010	0.006	0.003
	2.00	−0.088	−0.166	−0.226	−0.284	−0.175	0.010	0.015	0.010	0.005
$\frac{1.5i\tau_{xy1}}{pk_1}$	0.20	−0.067	−0.128	−0.179	−0.237	−0.149	−0.003	−0.011	−0.009	−0.004
	0.40	−0.060	−0.116	−0.147	−0.218	−0.120	0.025	−0.004	−0.004	−0.004
	1.00	0.048	−0.093	−0.131	−0.176	−0.072	0.059	0.011	0.000	−0.001
	1.20	−0.046	0.088	−0.124	−0.167	−0.063	0.064	0.013	0.003	0.000
	2.00	−0.039	−0.075	−0.105	−0.140	−0.037	0.078	0.020	0.005	0.000

Как видно из таблиц, на линиях контакта включения и полуплоскостей возникают касательные напряжения значительной величины.

Автор выражает признательность К. С. Чобаняну за постановку задачи и ценные указания в ходе решения.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 26 XII 1967

Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ԲԱՐԱԿԱՊԱՏ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՆԵՐԴՐՎԱԾՔՈՎ ԱՆՀԱՄԱՍԵՌ ՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՀԱՎԱՍԱՐԱԿՇՌՈՒԹՅՈՒՆԸ

Ամփոփում

Դիտարկված է բարակապատ առաձգական ներդրվածքով (սոսնձի շերտ) միակցված և կենտրոնացված ուժերի՝ հավասարակշռված սիստեմի, ազդեցության տակ գտնվող, տարբեր առաձգական հաստատուններ ունեցող, երկու կիսահարթությունների առաձգական հավասարակշռությունը։

Ուսումնասիրված է շոշափող լարումների բաշխումը ներդրվածքի եզրում՝ երեք կենտրոնացված ուժերի ազդեցության դեպքում։

A. S. KHACHIKIAN

EQUILIBRIUM OF NON-HOMOGENEOUS ELASTIC PLANE WITH A THIN-WALLED ELASTIC INCLUSION

Summary

The elastic equilibrium of the two half-planes with different constants combined by thin-walled inclusion (layer of glue) under the action of concentrated forces is considered.

The behavior of the tangent stresses near the inclusion in case of three concentrated forces is investigated.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чобанян К. С., Хачикян А. С.* Плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным гибким включением. Известия АН АрмССР, Механика, т. XX, № 6, 1967.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
3. *Черепанов Г. П.* О напряженном состоянии в неоднородной пластинке с разрезами. Известия АН СССР, ОТН, „Механика и машиностроение", № 1, 1962.
4. Таблицы интегральной показательной функции. Изд-во АН СССР, М., 1954.