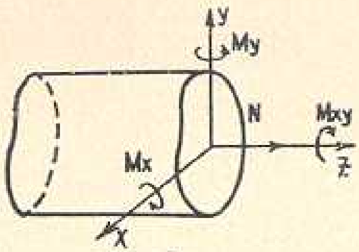
ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

М. А. ЗАДОЯН

ЗАДАЧА УСТАНОВИВШЕЙСЯ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ ПРИ СОВМЕСТНОМ РАСТЯЖЕНИИ, ИЗГИБЕ И КРУЧЕНИИ

Рассматривается задача установившейся ползучести призматического стержня, на торцах которого действуют растягивающие силы N, изгибающие и крутящие моменты M_x, M_y, M_{xy} (фиг. 1). Для стержней с узким прямоугольным сечением при совместном воздействии растяжения и изгиба такая задача решена до конца Л. М. Качановым [1]. Предельное состояние призматического стержня из идеально жестко-пластического материала при совместном растяжении, изгибе и кручении ранее исследовано Р. Хиллом [2].



Фиг. 1.

Приведем общие уравнения теории установившейся ползучести [1]: уравнения равновесия

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}=0 \qquad (x,\ y,\ z) \tag{1}$$

соотношения между компонентами напряжений и скоростей деформации

$$\sigma_x-\sigma=f(\xi_i)\,\xi_x, \qquad \tau_{xz}=f(\xi_i)\,\gamma_{ixz} \tag{2}$$

причем

$$\sigma_i=f(\xi_i)\,\xi_i \tag{3}$$

Здесь σ_i и ξ_i — интенсивности касательных напряжений и скоростей деформации

$$\begin{gathered}\sigma_i=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{xz}^2)}\\ \xi_i=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\xi_x-\xi_y)^2+(\xi_y-\xi_z)^2+(\xi_z-\xi_x)^2+6(\gamma_{ixy}^2+\gamma_{iyz}^2+\gamma_{ixz}^2)}\end{gathered} \tag{4}$$

Скорости деформации выражаются через скорости перемещения соотношениями

$$\xi_x=\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad 2\gamma_{ixy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \qquad (x,\ y,\ z) \tag{5}$$

Иногда вместо (2)—(3) даются зависимости

$$\xi_x = F(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma), \qquad \eta_{xz} = F(\sigma_i)\,\tau_{xz} \tag{6}$$

$$\xi_i = F(\sigma_i)\,\sigma_i \tag{7}$$

Исходя из характера течения, принимаем тензор скоростей деформации независящим от продольной координаты z. Тогда скорости перемещения представим в виде [3]

$$u = u_0(x,\ y) + \left(2\eta_{xz} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) z - \frac{\partial \xi_z}{\partial x}\frac{z^2}{2} \tag{8}$$

$$v = v_0(x,\ y) + \left(2\eta_{yz} - \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) z - \frac{\partial \xi_z}{\partial y}\frac{z^2}{2} \tag{9}$$

$$w = w_0(x,\ y) + \xi_z\, z \tag{10}$$

где u_0, v_0, w_0 — произвольные функции x и y. Отсюда находим соотношения

$$\xi_x = \frac{\partial u_0}{\partial x}, \qquad \xi_y = \frac{\partial v_0}{\partial y}, \qquad 2\eta_{xy} = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \tag{11}$$

и систему уравнений

$$\frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \xi_z}{\partial x \partial y} = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta_{xz} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(2\eta_{yz} - \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) = 0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(2\eta_{xz} - \frac{\partial w_0}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(2\eta_{yz} - \frac{\partial w_0}{\partial y}\right) = 0 \tag{14}$$

откуда заключаем, что

$$\xi_z = Ax + By + C \tag{15}$$

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} = 2\eta_{xz} - Dy - \alpha, \qquad \frac{\partial w_0}{\partial y} = 2\eta_{yz} + Dx - \beta \tag{16}$$

где A, B, C, D, α, β — произвольные постоянные.

На боковой поверхности стержня $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Примем, что эти напряжения равны нулю и по всему объему тела. Тогда

$$\xi_x = \xi_y = -\frac{1}{2}\xi_z, \qquad \eta_{xy} = 0 \tag{17}$$

Сравнивая соотношения (11) и (17), находим

$$\begin{aligned} u_0 &= -\frac{A}{4}(x^2 - y^2) - \frac{B}{2}xy - \frac{C}{2}x + Dy + g \\ v_0 &= -\frac{B}{4}(y^2 - x^2) - \frac{A}{2}xy - \frac{C}{2}y - Dy + h \end{aligned} \tag{18}$$

Подставляя (18), (15) и (16) в (8) и (9), получим

$$u = -\frac{A}{4}(2z^2 + x^2 - y^2) - \frac{B}{2}xy + Dyz - \frac{C}{2}x + Ey + \alpha z + q \tag{19}$$

$$v = -\frac{B}{4}(2z^2 - x^2 + y^2) - \frac{A}{2}xy - Dxz - \frac{C}{2}y - Ex + \beta z + h \tag{20}$$

$$w = w_0(x, y) + Axz + Byz + Cz \tag{21}$$

Легко заметить, что τ_{xz}, τ_{yz} и σ_z, где

$$\sigma_z = \frac{3}{2}\frac{\xi_z}{F(\sigma_i)} = \frac{3}{2}\xi_z f(\xi_i) \tag{22}$$

являются функциями лишь от x и y. Тогда уравнения равновесия (1) переходят в уравнение

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \tag{23}$$

Вводя функцию напряжения [1, 2]

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \tau_{yz} = \frac{\partial H}{\partial x} \tag{24}$$

для σ_i будем иметь

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{3}\sigma_z^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2} \tag{25}$$

Вводя обозначение $F(\sigma_i) = f^{-1}(\xi_i) = \Phi(x, y)$ и принимая степенной закон для F

$$F(\sigma_i) = k\sigma_i^{m-1} \tag{26}$$

из (16), (6), (25), (26) получим систему дифференциальных уравнений относительно H и Φ

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Phi\frac{\partial H}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\Phi\frac{\partial H}{\partial y}\right) + D = 0 \tag{27}$$

$$\Phi^{\frac{2m}{m-1}} - k^{\frac{2}{m-1}}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]\Phi^2 - \frac{3}{4}k^{\frac{2}{m-1}}(Ax + By + C)^2 = 0 \tag{28}$$

Для функции напряжения имеем условие $H = 0$ на контуре поперечного сечения и условие

$$M_{xy} = \iint_\Omega H d\Omega \tag{29}$$

Имеем также статические условия

$$M_x = \frac{3}{2}\iint_\Omega \frac{Ax + By + C}{\Phi} y d\Omega, \qquad M_y = \frac{3}{2}\iint_\Omega \frac{Ax + By + C}{\Phi} x d\Omega \tag{30}$$

В частном случае, когда $m=2$, из (28) получим

$$\Phi=\frac{k}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+\sqrt{\left[\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2\right]^2+\frac{3}{k^2}(Ax+By+C)^2}} \tag{31}$$

Подставляя выражения Φ в (27), получим одно уравнение относительно H.

Иногда удобнее задачу формулировать в цилиндрических координатах. Поступая аналогичным образом, для скоростей перемещения получим

$$u=-\frac{1}{4}(A\cos\theta-B\sin\theta)(r^2+2z^2)-\frac{C}{4}r+(\alpha\cos\theta+$$
$$+\beta\sin\theta)z+\alpha_0\cos\theta+\beta_0\sin\theta \tag{32}$$

$$v=-\frac{1}{4}(A\sin\theta-B\cos\theta)(r^2-2z^2)+Drz+Gr-$$
$$-(\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta)z-\alpha_0\sin\theta+\beta_0\cos\theta+\gamma_0 \tag{33}$$

$$w=w_0(r,\ \theta)+Arz\cos\theta+Brz\sin\theta+Cz \tag{34}$$

где $A, B,\cdots$ — произвольные постоянные, а w_0 определяется соотношениями

$$\frac{\partial w_0}{\partial r}=2\eta_{rz}-\alpha\cos\theta-\beta\sin\theta$$
$$\frac{\partial w_0}{\partial\theta}=2r\eta_{\theta z}-Dr^2+(\alpha\sin\theta-\beta\cos\theta)r \tag{35}$$

Отсюда следует условие совместности деформаций

$$\frac{\partial\eta_{rz}}{\partial\theta}-\frac{\partial(r\eta_{\theta z})}{\partial r}+Dr=0 \tag{36}$$

Легко заметить, что компоненты напряжения $\sigma_r=\sigma_\theta=\tau_{r\theta}=0$ и

$$\sigma_z=\frac{3}{2}\frac{\xi_z}{\Phi},\qquad \tau_{rz}=\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial\theta},\qquad \tau_{\theta z}=-\frac{\partial H}{\partial r} \tag{37}$$

где H и Φ — пока неизвестные функции r и θ,

$$\xi_z=Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C \tag{38}$$

тождественно удовлетворяют дифференциальным уравнениям равновесия. Для скоростей деформации имеем

$$\eta_{r\theta}=0,\quad \xi_r=\xi_\theta=-\frac{1}{2}\xi_z,\qquad \eta_{rz}=\Phi\tau_{rz},\qquad \eta_{\theta z}=\Phi\tau_{\theta z} \tag{39}$$

Для степенной зависимости между σ_i и ξ_i приходим к системе дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r\Phi\frac{\partial H}{\partial r}\right]+\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{\Phi}{r}\frac{\partial H}{\partial\theta}\right]+Dr=0$$

$$\Phi^{\frac{2m}{m-1}}-k^{\frac{2}{m-1}}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial H}{\partial\theta}\right)^2\right]\Phi^2-$$

$$-\frac{3}{4}k^{\frac{2}{m-1}}(Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C)^2=0 \tag{40}$$

Для функции H, а также для неизвестных постоянных A, B, C имеем статические условия, аналогичные (29)—(30).

Рассмотрим случай тонкостенной цилиндрической трубы. Полагая $\tau_{rz}\approx 0$ и интегрируя, из (36) находим

$$\tau_{\theta z}=\frac{Dr}{2}+\frac{E}{r} \tag{41}$$

Учитывая соотношения (37)—(39), из второго уравнения (40) получим

$$\Phi=k^{\frac{1}{m}}\left[\tau_{\theta z}^2+\frac{3}{4}\sigma_z^2\right]^{\frac{m-1}{2m}} \tag{42}$$

Принимая для цилиндрической трубы $E=B=0$, находим

$$\sigma_z=\frac{3(Ar\cos\theta+C)}{(2k)^{\frac{1}{m}}[D^2r^2+3(Ar\cos\theta+C)^2]^{\frac{m-1}{2m}}}$$

$$\tau_{\theta z}=\frac{Dr}{(2k)^{\frac{1}{m}}[D^2r^2+3(Ar\cos\theta+C)^2]^{\frac{m-1}{2m}}} \tag{43}$$

Полагая в случае цилиндрической трубы с продольным вырезом $\tau_{\theta z}=0$ при $r=r_0=\frac{r_1+r_2}{2}$, будем иметь $E=-\frac{Dr_0^2}{2}$. Тогда компоненты напряжения будут

$$\sigma_z=\frac{3(Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C)}{(2k)^{\frac{1}{m}}\left[D^2\left(r-\frac{r_0^2}{r}\right)^2+3(Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C)^2\right]^{\frac{m-1}{2m}}}$$

$$\tau_{\theta z}=\frac{D\left(r-\frac{r_0^2}{r}\right)}{(2k)^{\frac{1}{m}}\left[D^2\left(r-\frac{r_0^2}{r}\right)^2+3(Ar\cos\theta+Br\sin\theta+C)^2\right]^{\frac{m-1}{2m}}}$$

Неизвестные постоянные, входящие в полученные выражения, определяются из статических условий. Определяя w_0 из соотношения (35) и приравнивая полученные выражения между собой, получим, что $w_0 = -(\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)r$ для замкнутой трубы и $w_0 = -Dr_0^2 - (\alpha\cos\theta + \beta\sin\theta)r$ для открытой трубы.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 6 VII 1967

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆԱՑՎԱԾ ՍՈՂՔԻ ԽՆԴԻՐԸ ՀԱՄԱՏԵՂ ՁԳՄԱՆ, ՈԼՈՐՄԱՆ ԵՎ ԾՌՄԱՆ ԴԵՊՔՈՒՄ

Ամփոփում

Ուսումնասիրվում է՝ պրիզմատիկ ձողի կայունացված սողքի ընդհանուր խնդիրը, համատեղ ձգման, ոլորման և ծռման դեպքում։ Աստիճանային ամրապնդման դեպքում խնդիրը բերվում է երկու ոչ-գծային մասնական ածանցյալներով դիֆերենցիալ հավասարումներով սիստեմի։ Երկու մասնավոր դեպքերի համար այդ սիստեմը վերածվում է Ամպեր-Մոնժի հավասարմանը։

Բարակապատ գլանային խողովակի և աստիճանային ամրապնդման օրենքի դեպքում ստացված են նորմալ և շոշափող լարումների համար վերջնական բանաձևեր։

M. A. ZADOYAN

A GENERAL PROBLEM OF CREEP OF THE PRIZMATIC BAR IN THE CASE OF COMBINED TENSION, BENDING AND TORSION

Summary

The general problem of stationary creep of a prizmatic bar in the case of combined tension forces, bending and torsion moments are considered.

The problem is reduced to the solution of two non-linear differential equations of the second order. For two cases the system is reduced to one equation of the Amper-Monz type.

For the thin walled cylindrical tube, the formulas of normal and shearings stresses are obtained.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
2. *Хилл Р.* Математическая теория пластичности. ИЛ, М., 1956.
3. *Задоян М. А.* Об одном частном решении уравнений теории идеальной пластичности. Докл. АН СССР, т. 156, № 1, 1964.