ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

С. И. ЦАТУРЯН, П. И. ЦОЙ

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ РАСХОДА, ДАВЛЕНИЯ, ПЛОТНОСТИ И СКОРОСТИ ГАЗА ВДОЛЬ ДЛИННОГО ГАЗОПРОВОДА ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ РЕЖИМЕ РАБОТЫ

## § 1. Дифференциальные уравнения движения газа. Начальные и граничные условия

Однородное изотермическое неустановившееся движение газа в длинных цилиндрических трубопроводах описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho}{\partial x}=-\frac{\lambda u G}{2Dg^2SRT} \\
\frac{\partial \rho}{\partial t}=-\frac{1}{gS}\frac{\partial G}{\partial x} \\
p=gRT\rho \\
G=gS\rho u
\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $p$, $\rho$, $u$ — средние значения по сечению давления, плотности и скорости, $\lambda$ — безразмерный коэффициент сопротивления, $D$ — диаметр трубы, $g$ — ускорение силы тяжести, $R$ — газовая постоянная, $T$ — абсолютная температура, $x$ — координата, отсчитываемая вдоль газопровода, $t$ — время, $S$ — площадь поперечного сечения, $G$ — весовой расход газа по сечению трубы.

Решим систему (1.1) при следующих начальных и граничных условиях:

1. при $t\leqslant 0$ режим стационарный и заданный [2]

$$\begin{gathered}
p=p_0(x)=\sqrt{p_{\text{н}}^2-(p_{\text{н}}^2-p_{\text{к}}^2)\frac{x}{l}} \\
\rho=\rho_0(x)=\frac{1}{gRT}\sqrt{p_{\text{н}}^2-(p_{\text{н}}^2-p_{\text{к}}^2)\frac{x}{l}} \\
u=u_0(x)=\sqrt{\frac{RTgD(p_{\text{н}}^2-p_{\text{к}}^2)}{\lambda l\left|p_{\text{н}}^2-(p_{\text{н}}^2-p_{\text{к}}^2)\frac{x}{l}\right|}}=\frac{G_0}{gS\rho_0(x)} \\
G=G_0=S\sqrt{\frac{gD(p_{\text{н}}^2-p_{\text{к}}^2)}{\lambda lTR}}=\text{const}
\end{gathered} \tag{1.2}$$

2. при $x=0, \quad t>0 \qquad G(x, t) = G_0 = \text{const}$ (1.3)

3. при $x=l, \quad t>0 \qquad G(x, t) = G_0 + f(t)$ (1.4)

где $p_н$ — давление газа в начале газопровода ($x=0$)

$p_к$ — давление газа в конце газопровода ($x=l$)

$l$ — длина газопровода

$G_0$ — расход газа при стационарном режиме работы

$f(t)$ — заданная функция (обращающаяся в нуль при $t \leqslant 0$), которая показывает закон изменения расхода газа в конце газопровода.

## § 2. Дифференциальное уравнение расхода газа. Выражение давления, плотности и скорости через расход газа

Решение системы дифференциальных уравнений (1.1) при начальных и граничных условиях (1.2)—(1.4) ищем в виде

$$
\begin{aligned}
p(x, t) &= p_0(x) + p'(x, t) \\
\rho(x, t) &= \rho_0(x) + \rho'(x, t) \\
u(x, t) &= u_0(x) + u'(x, t) \\
G(x, t) &= G_0 + G'(x, t)
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Здесь $p'(x, t)$, $\rho'(x, t)$, $u'(x, t)$ и $G'(x, t)$ — добавочные значения давления, плотности, скорости и расхода над стационарными значениями (существовавшими в момент $t \leqslant 0$), появляющиеся вследствие неустановившегося движения газа.

Будем предполагать, что величины $p'(x, t)$, $\rho'(x, t)$, $u'(x, t)$, $G'(x, t)$ малы.

Тогда вставляя (2.1) в (1.1) и отбрасывая члены, содержащие произведения $p'$, $\rho'$, $u'$ и $G'$, для определения указанных величин получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial p'}{\partial x} &= -\frac{\lambda (u_0 G' + G_0 u')}{2Dg^2 SRT} \\
\frac{\partial \rho'}{\partial t} &= -\frac{1}{gS}\frac{\partial G'}{\partial x} \\
p' &= gRT\rho' \\
G' &= gS(u_0\rho' + \rho_0 u')
\end{aligned}
\tag{2.2}
$$

Начальные и граничные условия в силу (2.1) примут вид

1. при $t \leqslant 0 \quad p'(x, t) = \rho'(x, t) = u'(x, t) = G'(x, t) = 0$

2. при $x = 0 \qquad G'(x, t) = 0$ (2.3)

3. при $x = l \qquad G'(x, t) = f(t)$

Дифференцируя первое уравнение системы (2.2) по $t$, второе — по $x$, потом приравнивая полученные выражения и принимая в расчет четвертое уравнение той же системы, можно переписать систему в форме

$$\frac{\partial^2 G'}{\partial x^2} = \frac{\lambda u_0}{DgRT}\frac{\partial G'}{\partial t} + \frac{\lambda u_0^2}{2DgRT}\frac{\partial G'}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{1}{gS}\frac{\partial G'}{\partial x} \tag{2.4}$$

$$p' = gRT\rho'$$

$$u' = \frac{1}{gS\rho_0}(G' - gSu_0\rho')$$

Для удобства введем безразмерные величины. Для этого положим

$$\begin{aligned} G' &= G_0 G'^* \qquad & p_0 &= p_k p_0^* \qquad & \rho' &= \rho_1 \rho'^* \\ x &= Lx^* \qquad & p' &= p_k p'^* \qquad & u_0 &= V u_0^* \\ t &= t_0 t^* \qquad & \rho_0 &= \rho_1 \rho_0^* \qquad & u' &= V u'^* \end{aligned} \tag{2.5}$$

где $G_0$, $l$, $t_0$, $p_k$, $\rho_1$, $V$ — соответственно характерные расход, длина, время, давление, плотность и скорость. За характерное давление принято давление газа в конце ($x = l$) газопровода при стационарном режиме работы, за характерный расход — расход газа при стационарном ($t \leqslant 0$) режиме работы, за характерную длину — длина газопровода. Характерные время, плотность и скорость определяются из системы уравнений (2.4) в виде

$$t_0 = \frac{\lambda l^2 G_0}{gp_k SD}, \qquad \rho_1 = \frac{p_k}{gRT}, \qquad V = \frac{G_0 RT}{Sp_k} \tag{2.6}$$

После перехода к безразмерным величинам, система уравнений (2.4) примет вид

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{1}{\sqrt{k^2 - (k^2-1)x}}\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{k^2-1}{2[k^2-(k^2-1)x]}\frac{\partial G}{\partial x}$$

$$p = \rho = -(k^2-1)\int\limits_0^t \frac{\partial G(x, \alpha)}{\partial x}\, d\alpha \tag{2.7}$$

$$u = \frac{G}{\sqrt{k^2-(k^2-1)x}} + \frac{k^2-1}{[k^2-(k^2-1)x]}\int\limits_0^t \frac{\partial G(x, \alpha)}{\partial x}\, d\alpha$$

где

$$k = \frac{p_n}{p_k} > 1$$

Здесь и в дальнейшем для простоты штрихи и звездочки опущены.

Начальные и граничные условия в безразмерных величинах будут

$$
\begin{aligned}
&1.\ \text{при}\ t \leqslant 0 \qquad G(x,\ t) = p\,(x,\ t) = \rho\,(x,\ t) = u\,(x,\ t) = 0 \\
&2.\ \text{при}\ x = 0 \qquad G(x,\ t) = 0 \\
&3.\ \text{при}\ x = 1 \qquad G(x,\ t) = f(t)
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

Из системы уравнений (2.7) видно, что если известен расход газа, т. е. $G(x,\ t)$, то без труда можно определить как давление и плотность, так и скорость в любой момент времени $t$ в любом сечении газопровода.

Поэтому перейдем к определению расхода газа, т. е. к решению первого уравнения системы (2.7) с начальным и граничными условиями (2.8).

## § 3. Решение первого уравнения системы (2.7)

Для решения указанного уравнения введем новые переменные в виде

$$
z = \sqrt{k^2 - (k^2 - 1)\,x}, \qquad t_1 = \frac{(k^2 - 1)^2}{4}\,t \tag{3.1}
$$

Тогда первое уравнение системы (2.7) примет вид

$$
\frac{\partial^2 G}{\partial z^2} = z\,\frac{\partial G}{\partial t_1} \tag{3.2}
$$

При этом начальное и граничные условия будут

$$
\begin{aligned}
&1.\ \text{при}\ t = 0 \qquad G = 0 \\
&2.\ \text{при}\ z = k \qquad G = 0 \\
&3.\ \text{при}\ z = 1 \qquad G = f(t)
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

(Индекс „1“ в дальнейшем будет опущен).

Применим преобразование Лапласа к уравнению (3.2), для чего, умножив обе части указанного уравнения на $e^{-\sigma t}$, где $\sigma = \sigma_1 + i\sigma_2$, и проинтегрировав по $t$ от 0 до $\infty$, найдем трансформату Лапласа $Q(z,\ \sigma) = \int\limits_0^\infty e^{-\sigma t}\,G(z,\ t)\,dt$, которая удовлетворяет следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:

$$
\frac{d^2 Q}{dz^2} - \sigma z Q = 0 \tag{3.4}
$$

с граничными условиями

$$
\begin{aligned}
&1.\ \text{при } z = k && Q = 0 \\
&2.\ \text{при } z = 1 && Q = F(\sigma)
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

где

$$F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t)\,dt$$

Решение уравнения (3.4) записывается в форме [3]

$$Q(z, \sigma) = z^{1/2}\left[C_1 I_{1/3}\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right) + C_2 I_{-1/3}\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right] \tag{3.6}$$

где $C_1$, $C_2$ — постоянные интегрирования,

$I_\nu\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка $\nu\left(\nu = \frac{1}{3};\ -\frac{1}{3}\right)$.

Постоянные $C_1$, $C_2$ определяются граничными условиями (3.5).

Определяя эти постоянные и подставляя их в (3.6), получим

$$Q(z, \sigma) = z^{1/2}\frac{F(\sigma)}{M(\sigma)}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right) - I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right]$$

где

$$M(\sigma) = I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right) - I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)$$

По теореме обращения имеем

$$G(z, t) = \frac{z^{1/2}}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{F(\sigma)}{M(\sigma)}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right) - I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right]e^{\sigma t}d\sigma \tag{3.7}$$

Сначала найдем решение данной задачи для частного случая, когда заданная функция $f(t)$ определяется в виде

$$f(t) = a\sin\omega t \tag{3.8}$$

где $a = \text{const}$.

Тогда

$$F(\sigma) = a\int_0^\infty e^{-\sigma t}\sin\omega t\,dt = \frac{a\omega}{\sigma^2 + \omega^2}$$

При этом формула (3.7) примет вид

$$G(z,\ t)=\frac{a\omega z^{1/2}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{e^{\sigma t}}{(\sigma^2+\omega^2)\,M(\sigma)}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\,k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\,z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)-\right.$$

$$\left.-\,I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\,k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\,z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right]d\sigma \tag{3.9}$$

Обозначим через

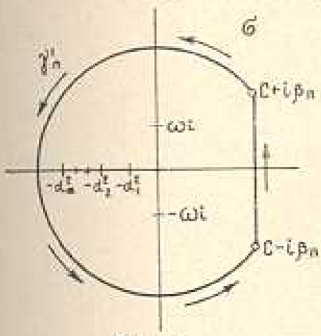
$$\Phi\,(z,\ \sigma)=\frac{1}{(\sigma^2+\omega^2)\,M(\sigma)}\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)-\right.$$

$$\left.-\,I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\,k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\,z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right] \tag{3.10}$$

Тогда (3.9) запишется в форме

$$G(z,\ t)=\frac{a\omega z^{1/2}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\Phi\,(z,\ \sigma)\,e^{\sigma t}\,d\sigma \tag{3.11}$$

Для вычисления интеграла (3.11) применим теорему о вычетах. Обозначим через $\gamma_n'$ часть окружности $\gamma_n$, расположенную слева от прямой $R_{e\sigma}=c$, через $c\pm i\beta_n$ — точки пересечения $\gamma_n$ с этой прямой и через $\Gamma_n$ — замкнутый контур, составленный из отрезка $(c-i\beta_n,\ c+i\beta_n)$ и $\gamma_n'$ и проходимый против часовой стрелки (фиг. 1). Тогда



Фиг. 1.

$$\int\limits_{c-i\beta_n}^{c+i\beta_n}\Phi\,(z,\ \sigma)\,e^{\sigma t}\,d\sigma=$$

$$=\int\limits_{\Gamma_n}\Phi\,(z,\ \sigma)\,e^{\sigma t}\,d\sigma-\int\limits_{\gamma_n'}\Phi\,(z,\ \sigma)\,e^{\sigma t}\,d\sigma$$

Из выражения (3.10) видно, что функция $\Phi\,(z,\ \sigma)$ имеет полюсы в точках $\sigma=\pm\, i\omega$ и $\sigma=-\alpha_m^2$, где $i\alpha_m=\mu_m\,(m=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ — корни следующего трансцендентного уравнения [4]

$$I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\,k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\,k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)=0$$

а $\pm\,\alpha_m\,(m=1,\ 2,\ldots)$ — корни уравнения [4]

$$I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\,k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)=0 \tag{3.12}$$

где $I_\nu(\xi)$, $\left(\xi=\frac{2}{3}\sqrt{\sigma},\ \frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)$ — функции Бесселя первого рода порядка $\nu\left(\nu=\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$. Отсюда следует, что существует система окружностей $\gamma_n$, $|\sigma|=R_n$, $R_1<R_2<R_3<\cdots<R_n\to\infty$, на которой $\Phi(z,\ \sigma)\to 0$ равномерно относительно $\arg\sigma$. Но так как по лемме Жордана [5] при $t>0$

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\gamma_n'}\Phi(z,\ \sigma)\,e^{\sigma t}d\sigma=0$$

то при $t>0$ вместо (3.11) можно написать

$$G(z,\ t)=\frac{\omega az^{1/2}}{2\pi i}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Gamma_n}\Phi(z,\ \sigma)\,e^{\sigma t}d\sigma$$

Применяя теорему Коши о вычетах, мы получим, что

$$G(z,\ t)=\omega az^{1/2}\lim_{n\to\infty}\sum_{(\Gamma_n)}\operatorname{res}\Phi(z,\ \sigma)\,e^{\sigma t}\tag{3.13}$$

где сумма берется по всем особым точкам функции $\Phi(z,\ \sigma)$, лежащим внутри $\Gamma_n$.

Имея в виду указанные полюсы, (3.13) можно переписать в следующей форме:

$$G(z,\ t)=a\omega z^{1/2}\Big\{\operatorname{res}\left[\Phi(z,\ i\omega)\right]e^{i\omega t}+\operatorname{res}\left[\Phi(z,\ -i\omega)\right]e^{-i\omega t}+$$
$$+\sum_{m=1}^{\infty}\operatorname{res}\left[\Phi(z,\ -\alpha_m^2)\right]e^{-\alpha_m^2 t}\Big\}\tag{3.14}$$

Вычисляя (3.14), получим

$$G(z,\ t)=a\omega z^{1/2}\Big\{\frac{\left[A(1,\ k,\ \omega)A(z,k,\omega)+B(1,\ k,\ \omega)B(z,\ k,\ \omega)\right]\sin\omega t}{\omega\left[A^2(1,\ k,\ \omega)+B^2(1,\ k,\ \omega)\right]}+$$
$$+\frac{\left[A(1,\ k,\ \omega)B(z.\ k,\ \omega)-B(1,\ k,\ \omega)A(z,\ k,\ \omega)\right]\cos\omega t}{\omega\left[A^2(1,\ k,\ \omega)+B^2(1,\ k,\ \omega)\right]}-$$
$$-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sum_{m=1}^{\infty}e^{-\alpha_m^2 t}\frac{\alpha_m^2 J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)}{(\omega^2+\alpha_m^4)\left[J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)-J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)\right]}\times\tag{3.15}$$
$$\times\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]\Big\}$$

где

$$A(z,\ k,\ \omega)=u_{^1/_3}\left(\frac{2}{3}k^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)u_{-^1/_3}\left(\frac{2}{3}z^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)+$$

$$+v_{-^1/_3}\left(\frac{2}{3}k^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)v_{^1/_3}\left(\frac{2}{3}z^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)-u_{-^1/_3}\left(\frac{2}{3}k^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)u_{^1/_3}\left(\frac{2}{3}z^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)-$$

$$-v_{^1/_3}\left(\frac{2}{3}k^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)v_{-^1/_3}\left(\frac{2}{3}z^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)$$

$$B(z,\ k,\ \omega)=u_{-^1/_3}\left(\frac{2}{3}k^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)v_{^1/_3}\left(\frac{2}{3}z^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)+$$

$$+v_{-^1/_3}\left(\frac{2}{3}k^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)u_{^1/_3}\left(\frac{2}{3}z^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)-v_{^1/_3}\left(\frac{2}{3}k^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)u_{-^1/_3}\left(\frac{2}{3}z^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)-$$

$$-u_{^1/_3}\left(\frac{2}{3}k^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)v_{-^1/_3}\left(\frac{2}{3}z^{^3/_2}\sqrt{\omega}\right)$$

$$u_\nu(\zeta)=\mathrm{Re}\left[J_\nu(\zeta\sqrt{\pm i})\right],\qquad \zeta=\frac{2}{3}z^{^3/_2}\sqrt{\omega},\qquad \frac{2}{3}k^{^3/_2}\sqrt{\omega}$$

$$v_\nu(\zeta)=\pm J_m\left[J_\nu(\zeta\sqrt{\pm i})\right]\qquad \nu={}^1/_3,\ -{}^1/_3$$

Из выражений $A(z,\ k,\ \omega)$ и $B(z,\ k,\ \omega)$ видно, что

$$A(k,\ k,\ \omega)=B(k,\ k,\ \omega)=0$$

Известно, что весовой расход газа в последнем сечении газопровода (т. е. в сечении $x=L$, или $z=1$) дается следующим графиком [6] фиг. 2.


Фиг. 2.

Этот график можно представить функцией $f(t)$ с периодом $T$ ($T$ есть суточное время)

где

$$f(t)=\begin{cases} f_1(t) \text{ при } 0=t_0\leqslant t<t_1 \\ f_2(t) \text{ при } t_1\leqslant t<t_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ f_r(t) \text{ при } t_{r-1}\leqslant t\leqslant t_r=T \end{cases} \tag{3.16}$$

Разлагая $f(t)$ в ряд Фурье по синусам, получим

$$f(t)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi t}{T} \tag{3.17}$$

где

$$b_n=\frac{2}{T}\sum_{j=1}^{r}\int\limits_{t_{j-1}}^{t_j} f_j(t)\sin\omega_n t\,dt; \quad \omega_n=\frac{n\pi}{T}$$

Применяя преобразования Лапласа относительно (3.17), получим

$$F(\sigma)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\,\omega_n}{\sigma^2+\omega^2} \tag{3.18}$$

В силу (3.18) формула (3.9) примет вид, т. е. для расхода получим следующую формулу:

$$G(z,\ t)=\frac{z^{1/2}}{2\pi i}\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n\omega_n}{(\sigma^2+\omega^2)}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)\right]e^{\sigma t}d\sigma}{\left[I_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)-I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\sqrt{\sigma}\right)I_{1/3}\left(\frac{2}{3}\sqrt{\sigma}\right)\right]}\right\} \tag{3.19}$$

Интеграл (3.19) определяется точно так же, как и интеграл (3.9). Применение вышеуказанной теории о вычетах к интегралу дает

$$G(z,\ t)=z^{1/2}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n[A(1,k,\omega_n)A(z,k,\omega_n)+B(1,k,\omega_n)B(z,k,\omega_n)]\sin\omega_n t}{A^2(1,\ k,\ \omega_n)+B^2(1,\ k,\ \omega_n)}+\right.\right.$$

$$\left.+\frac{b_n\,[A(1,\ k,\ \omega_n)\,B(z,\ k,\ \omega_n)-B(1,\ k,\ \omega_n)\,A(z,\ k,\ \omega_n)]\cos\omega_n t}{A^2(1,\ k,\ \omega_n)+B^2(1,\ k,\ \omega_n)}\right)-$$

$$-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n\omega_n\alpha_m^2\,e^{-\alpha_m^2 t}\,J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\alpha_m\right)}{(\omega_n+\alpha_m^2)\left[J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)-J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)\right]}\times$$

$$\left.\times\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]\right\},$$

## § 4. Определение давления, плотности и скорости

В силу (3.1) второе и третье уравнения системы (2.7) соответственно примут вид

$$p=\rho=\frac{2}{z}\int\limits_0^t\frac{\partial G(z,\,\alpha)\,d\alpha}{\partial z} \tag{4.1}$$

$$u=\frac{G}{z}-\frac{2}{z}\int\limits_0^t\frac{\partial G(z,\,\alpha)\,d\alpha}{\partial z} \tag{4.2}$$

Если $f(t)$ изменяется по синусоидальному закону, то имея в виду (3.15), для давления, плотности и скорости получаем следующие формулы:

$$\begin{aligned}p(z,\,t)=\rho(z,\,t)&=\frac{a}{\omega\sqrt{z^3}\,[A^2(1,k,\omega)+B^2(1,k,\omega)]}\Big\{[A(1,\,k,\,\omega)(1-\\&-\cos\omega t)-B(1,\,k,\,\omega)\sin\omega t]\,[A(z,\,k,\,\omega)+2zA'(z,\,k,\,\omega)]+\\&+[B(1,\,k,\,\omega)(1-\cos\omega t)+A(1,\,k,\,\omega)\sin\omega t]\,[B(z,\,k,\,\omega)+\\&+2zB'(z,\,k,\,\omega)]\Big\}+\frac{2\pi a\omega}{\sqrt{3z^3}}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(1-e^{-\alpha_m^2 t})}{(\omega^2+\alpha_m^4)}\times\\&\times\frac{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)}{\left[J^2_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{3/2}\right)-J^2_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)\right]}\times\\&\times\Big\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\alpha_m\right)\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)+\alpha_m z^{3/2}J'_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]-\\&-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}k^{3/2}\alpha_m\right)\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)+\alpha_m z^{3/2}J'_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{3/2}\right)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{4.3}$$

$$u=\frac{G}{z}-\frac{p}{z^2} \tag{4.4}$$

где $G$ и $p$ определяются соответственно выражениями (3.15) и (4.3). Если же $f(t)$ дается по (3.16), то для давления и плотности получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned}p(z,\,t)=\rho(z,\,t)&=\frac{1}{\sqrt{z^3}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{\omega_n[A^2(1,\,k,\,\omega_n)+B^2(1,\,k,\,\omega_n)]}\times\\&\times\Big\{[A(1,\,k,\,\omega_n)(1-\cos\omega_n t)-B(1,\,k,\,\omega_n)\sin\omega_n t]\,[A(z,\,k,\,\omega_n)+\\&+2zA'(z,\,k,\,\omega_n)]+[B(1,\,k,\,\omega_n)(1-\cos\omega_n t)+\end{aligned}$$

$$+A(1,\ k,\ \omega_n)\sin\omega_n t]\,[B(z,\ k,\ \omega_n)+2zB'(z,\ k,\ \omega_n)]+$$

$$+\frac{2\pi}{\sqrt{3z^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{b_n\alpha_m^2\left(1-e^{-\alpha_m^2 t}\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{2/3}\right)}{(\omega_n^2+\alpha_m^2)\left[J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{2/3}\right)-J_{1/3}^2\left(\frac{2}{3}\alpha_m\right)\right]}\times \tag{4.5}$$

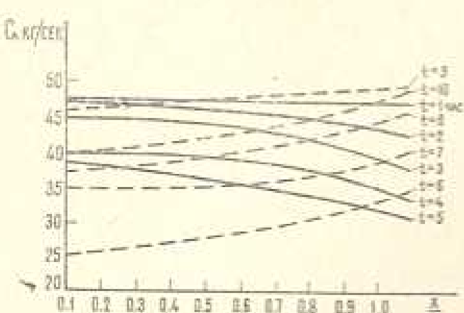
$$\times\left\{J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{2/3}\right)\left[J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{2/3}\right)+\alpha_m z^{2/3}J'_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{2/3}\right)\right]-\right.$$

$$\left.-J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m k^{2/3}\right)\left[J_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{2/3}\right)+\alpha_m z^{2/3}J'_{1/3}\left(\frac{2}{3}\alpha_m z^{2/3}\right)\right]\right\}$$

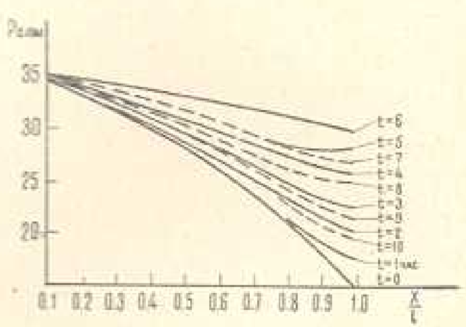
а скорость определяется формулой (4.4), только в этом случае $G$ и $p$ определяются соответственно выражениями (3.20) и (4.5).

### Пример расчета

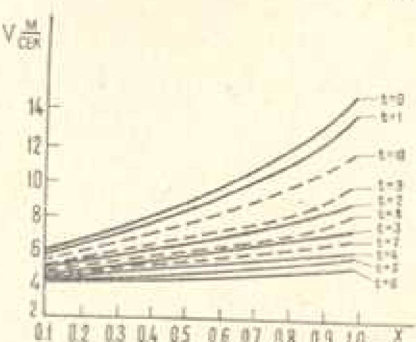
Для примера необходимые данные ($l$, $p_0$, $p_k$, $R$, $T$, $D$, $\nu$) и функция $f(t)$, которая показывает закон изменения расхода в конце газопровода, взяты из работы [7]. Разлагая функцию $f(t)$ в ряд Фурье по синусам и ограничиваясь четвертым членом ряда, а также определяя $\alpha_m$ ($m=1,\ 2,\ 3,\ 4$) корни уравнения (3.12) по формуле [4] (стр. 307), согласно формулам (2.1), (3.20), (4.4), (4.5) для расхода, давления и скорости построены графики (фиг. 3, 4, 5).




Фиг. 3.




Фиг. 4.




Фиг. 5.

Сопоставляя эти фигуры с рисунками (1, 2, 3) работы [7], легко заметить, что между ними нет качественной разницы, а существует только количественная разница.

Тульский политехнический
институт

Поступила 5 VII 1967

Ս. Ի. ԾԱՏՈՒՐՅԱՆ, Պ. Ի. ՑՈՅ

## ԵՐԿԱՐ ԳԱԶԱՄՈՒՂԻ ԵՐԿԱՐՈՒԹՅԱՄԲ ԳԱԶԻ ԾԱԽՍԻ, ՃՆՇՄԱՆ, ԽՏՈՒԹՅԱՆ ԵՎ ԱՐԱԳՈՒԹՅԱՆ ՓՈՓՈԽՄԱՆ ՕՐԵՆՔՆԵՐԻ ՈՐՈՇՈՒՄԸ ՈՉ-ՍՏԱՑԻՈՆԱՐ ԱՇԽԱՏԱՆՔԱՅԻՆ ՌԵԺԻՄԻ ԴԵՊՔՈՒՄ

### Ամփոփում

*Աշխատանքում ստացված են բանաձևեր՝ ժամանակի ցանկացած ակնթարթում, երկար գազամուղի ցանկացած հատույթում՝ գազի ծախսի, ճնշման, խտության և արագության որոշման համար, եթե տրված է գազի ծախսի փոփոխությունը գազամուղի վերջում։ Արհամարհված են ճնշման, խտության, արագության և ծախսի լրացուցիչ արժեքների արտադրյալները նրանց ստացիոնար արժեքների համեմատությամբ (որոնք գոյություն ունեն t=0-ում), որոնք ի հայտ են գալիս ոչ-հաստատված շարժման հետևանքով։*

S. I. TZATURIAN, P. I. TSOY

## THE DETERMINATION OF THE LAWS OF GAS CONSUMPTION, PRESSURE, DENSITY, AND VELOCITY CHANGES ALONG A LONG GAS PIPELINE WITH A TIME DEPENDING WORK REGIME

### Summary

Formulae for the determination of gas consumption, pressure, density, and velocity in any section along a long gas pipeline at any period of time with the gas consumption change given at the end of the gas pipeline, neglecting the products of additional pressure, density, velocity and consumption values in comparison with the stationary values (existing at the $t=0$ moment), that appear as a result of the non-stationary gas movement are derived in this paper.

### ЛИТЕРАТУРА

1. *Чарный И. А.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах. Гостехтеориздат, М.—Л., 1951.
2. *Смирнов А. С., Ширковский А. И.* Добыча и транспорт газа. Гостехиздат, 1957.
3. *Ватсон Г. Н.* Теория Бесселевых функций, ч. 1, изд. ИЛ, 1949.

4. *Грей Э.* и *Мэтьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. ИЛ, М., 1953.

5. *Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного. Физматгиз, М., 1958.

6. *Смирнов А. С., Генкина Л. А.* и др. Транспорт и хранение газа. Гостехиздат, М., 1962.

7. *Бабаджанян Г. А.* Движение газа в длинном газопроводе при переменном расходе на конце трубы. Изв. высших учебных заведений, „Нефть и газы", № 1, 1961.