ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

А. Г. БАГДОЕВ, Л. А. МОВСИСЯН

К ВОПРОСУ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Рассматриваются некоторые одномерные и квази-одномерные задачи нелинейно-упругих и нелинейно-геометрических тел.

Определяются ударная волна и решение в ее окрестности.

1. Уравнение одномерного неустановившегося движения для физически и геометрически нелинейного стержня-полоски имеет вид [1, 2]

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\left(a^2+\frac{2K\varkappa_1}{3\rho}\right)\frac{\partial u}{dx}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

Здесь $u(x, t)$ — продольное смещение, $a=\sqrt{(3K+4G)/3\rho}$ — скорость распространения упругой волны, $\varkappa_1$ — коэффициент, характеризующий физическую нелинейность в зависимости σ_x — ε_x [1]

$$\sigma_x=3K(1+\varkappa_1\varepsilon_0)\,\varepsilon_0+2G(\varepsilon_x-\varepsilon_0) \tag{1.2}$$

Для уравнения (1.1) берем следующие начальные

$$u=\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad \text{при} \quad t=0 \tag{1.3}$$

и граничные

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\varepsilon v(t) \qquad \text{при} \quad x=0 \tag{1.4}$$

условия, что соответствует удару по полубесконечному стержню. В (1.4) ε — малая величина.

В линейной задаче вторым слагаемым в левой части (1.1) можно пренебречь, и решение примет вид

$$u=f(x-at) \tag{1.5}$$

а из условия (1.4)

$$f(x-at)=-\frac{\varepsilon}{a}\int_0^{t-\frac{x}{a}} v(\xi)\,d\xi \tag{1.6}$$

Полученное решение (1.6) показывает, что $u(\tau)$, $\tau=t-\dfrac{x}{a}$. Поэтому, естественно, решение нелинейного уравнения (1.1), где нелинейность существенна только для окрестности фронта волны $\tau\sim 0$, для больших моментов времени (см. ниже) искать в виде [3]

$$u = \varepsilon w(\tau,\ z), \qquad z = \varepsilon x \tag{1.7}$$

Подставляя (1.7) в (1.1), можно получить

$$\frac{\partial F}{\partial z} + kF\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0 \tag{1.8}$$

где

$$k = \frac{1}{2a^4}\left(a^2 + \frac{2K\varkappa_1}{3\rho}\right), \qquad F = \frac{\partial w}{\partial \tau} \tag{1.9}$$

Решение (1.8) имеет вид

$$k\varepsilon xF = \tau + \psi(F) \tag{1.10}$$

Функция $\psi(F)$ определяется из условия (1.4) и имеет вид

$$\psi^{-1}(-\tau) = v(\tau)$$

Тогда (1.10) запишется в виде

$$F = v(\tau - k\varepsilon xF) \tag{1.11}$$

Полученное решение имеет место для больших t и x в окрестности фронта волны.

Условие на ударной волне получается из (1.1), если искать стационарное решение (1.1) в виде $u = u(\xi)$, $\xi = x - Vt$, и имеет вид

$$V = a - \frac{ka^2\varepsilon}{2}F \tag{1.12}$$

Здесь $V = \dfrac{dx}{dt}$ — скорость ударной волны.

Подставляя (1.11), записанное в виде

$$t - \frac{x}{a} - k\varepsilon xF(Y_1) = Y_1, \qquad Y_1 = \psi(F) \tag{1.13}$$

в (1.12), можно получить дифференциальное уравнение вдоль ударной волны $x = x(t)$

$$1 - \frac{V}{a} - k\varepsilon\left(F\frac{dx}{dt} + x\frac{dF}{dt}\right) = \frac{dY_1}{dt}$$

Подставляя сюда (1.12) и умножая на F, с учетом $\dfrac{dx}{dt} = V$, можно получить

$$-\frac{k\varepsilon}{2}d(xF^2) = FdY_1 \tag{1.14}$$

откуда

$$F^2 = -\frac{2}{k\varepsilon x_1}\int_0^{Y_1} F(Y_1)\,dY_1 \tag{1.15}$$

при $x \to \infty$, $F \to 0$. Поэтому в верхнем пределе в (1.15) можно полагать $Y_1 = Y_0$, где $F(Y_0) = 0$. В случае $k < 0$ должно быть $F > 0$, т. е.

$$F = \sqrt{-\frac{2}{k\varepsilon x}\int_0^{Y_0} F(Y_1)\,dY_1} \tag{1.16}$$

По (1.11) $F(Y_1) = v(Y_1)$, т. е. ударная волна образуется при $v(Y_1) > 0$, соответствующему нагружению стержня, причем в некоторый момент $Y_1 = Y_0$ $v(Y_0) = 0$.

Если же $v(Y_1) \leqslant 0$, что соответствует разгрузке, то $F(Y_1) \leqslant 0$. Тогда согласно (1.16) должно быть $F = 0$, т. е. ударная волна отсутствует и имеется непрерывный переход через волну $x = at$ к невозмущенной среде.

Таким образом, $k < 0$ соответствует ударным волнам газовой динамики. Если $k > 0$, то будет ударная волна разгрузки, поскольку в силу (1.16) должно быть $v \leqslant 0$. В этом случае можно рассмотреть и задачу о нагружении с убывающей скоростью $v(t)$. Тогда по первоначальной непрерывной волне нагрузки будет идти ударная волна разгрузки, в которой скачок скорости дается снова (1.16) (см., например, формулу для давления работы [4], выведенную для случая уравнения газовой динамики, которая несомненно будет верна и для уравнений теории упругости, если показатель адиабаты γ заменить соответствующим коэффициентом).

2. Если материал стержня нелинейно вязко-упругий, то вместо (1.2) нужно брать

$$\sigma_x = \left(K + \frac{4}{3}G\right)\left(\varepsilon_x + \alpha\frac{\partial\varepsilon_x}{\partial t}\right) + \frac{K\varkappa_1}{3}\varepsilon_x^2 \tag{2.1}$$

где α мало, и уравнение движения имеет вид

$$a^2\left(1 + \alpha\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(a^2 + \frac{2K\varkappa_1}{3\rho}\right)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

Вместо (1.8) получится

$$\frac{\partial F}{\partial z} + kF\frac{\partial F}{\partial \tau} = \frac{\alpha}{2\varepsilon a}\frac{\partial^2 F}{\partial \tau^2} \tag{2.3}$$

Подстановкой [3]

$$F = -\frac{\alpha}{\varepsilon a k}\frac{\partial U}{\partial \tau}\frac{1}{U} \tag{2.4}$$

уравнение (2.3) приводится к виду

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\alpha}{2\varepsilon a}\frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} \tag{2.5}$$

решение которого по условиям (1.3) и (1.4) находится в виде квадратуры.

3. Приведенный в п. 1 метод применим для задач о взрыве с цилиндрической и сферической симметрией.

Зависимость напряжения от деформации берем в виде [1]

$$\sigma_r = 3K(1+\varkappa_1\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G(\varepsilon_r - \varepsilon_0)$$
$$\sigma_\theta = 3K(1+\varkappa_1\varepsilon_0)\varepsilon_0 + 2G(\varepsilon_\theta - \varepsilon_0) \tag{3.1}$$

где компоненты деформаций определяются формулами [2]

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2, \qquad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{r}\right)^2, \qquad \varepsilon_0 = \frac{1}{3}(\varepsilon_r + \varepsilon_\theta) \tag{3.2}$$

а u — радиальное перемещение.

Подставляя эти выражения в уравнение движения, введя вблизи фронта волны аналогичные (1.7) переменные

$$u = \varepsilon w(\tau, z), \qquad z = \varepsilon r, \qquad \tau = t - \frac{r}{a} \tag{3.3}$$

и оставляя малые порядка ε^2, можно найти

$$\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{F}{2z} + kF\frac{\partial F}{\partial \tau} = 0, \qquad F = \frac{\partial w}{\partial \tau} \tag{3.4}$$

Решение этого уравнения запишется в виде

$$\tau = 2kzF + f(F\sqrt{z})$$

или

$$F = \frac{1}{\sqrt{z}}\psi(Y_1), \qquad Y_1 = \tau - 2kzF \tag{3.5}$$

где функции f или ψ находятся из граничных условий или из условий перехода (3.5) для конечных τ в линейное решение, соответствующее в (3.5) $k=0$

Автомодельное решение по (3.5) запишется

$$\tau = 2kzF + czF^2 \tag{3.6}$$

Полученные формулы можно применить к определению окрестности ударной волны в полуплоскости, когда по границе ее движется переменное давление [5]. Вблизи участка BC ударной волны (фиг. 1) для больших моментов времени можно по линейной теории найти напряжения или деформации, причем, например, для w имеем [5] (в полярных координатах r, θ $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$)

$$w = \frac{1}{\sqrt{z}}\varphi(\tau, \theta) \tag{3.7}$$

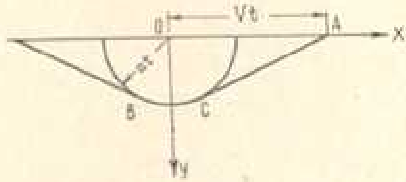
где, как можно показать, производные по θ в уравнениях движения могут быть отброшены (условие квази-одномерности), и решение вблизи фронта BC дается (3.5). Функция $\psi(\tau)$ определится на выходе к решению (3.7), причем $\psi(\tau) = \varphi(\tau, \theta)$, где θ играет роль параметра.

Для определения решения на самой ударной волне воспользуемся формулой для скорости ударной волны, имеющей вид (1.12). Тогда, подобно (1.16), можно написать

$$\psi = -\sqrt{-\frac{2}{k\varepsilon\sqrt{z}}\int_{0}^{Y_1}\psi(Y_1)\,dY_1} \tag{3.8}$$

Подставляя (3.8) в (3.5), можно найти для F порядок затухания

$$F \sim \frac{1}{z^{3/4}} \tag{3.9}$$



Фиг. 1.

Если скорость точки A по поверхности постоянна, то задача автомодельна, и линейное решение вблизи BC имеет вид [5]

$$w = f(\theta)\sqrt{\frac{\tau}{z}} \tag{3.10}$$

Тогда решение нелинейной задачи дается (3.6), где

$$c = f^{-2}(\theta) \tag{3.11}$$

Решение на ударной волне BC по (1.12) и (3.6), если положить $V = \frac{r}{t}$ или $a - \frac{ka^2\varepsilon}{2}F = \frac{a(t-\tau)}{t}$, имеет вид

$$\frac{\tau}{t} = \frac{ka\varepsilon}{2}F \tag{3.12}$$

или поскольку вблизи BC $t - \frac{r}{a} = 0$

$$\frac{\tau}{z} = \frac{k}{2}F \tag{3.13}$$

Отсюда и из (3.6) можно найти

$$F = -\frac{3k}{2c}, \qquad F = -\frac{3}{2}kf^2(\theta) \tag{3.14}$$

где $f(\theta)$ дается из решения линейной задачи [5].

Отметим, что вблизи точки B соединения плоской ударной волны, где решение постоянно, и волны BC функция $f(\theta)$ имеет особенность. Это приведет к тому, что решение будет зависеть от r и θ и потребуется получить упрощенные двумерные уравнения.

Не приводя выкладки, укажем лишь, что для случая сферической симметрии закон затухания ударной волны имеет порядок $1/R\ln R$.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 11 VII 1967

Ա. Գ. ԲԱԳԴՈԵՎ, Լ. Ա. ՄՈՎՍԻՍՅԱՆ

ԱՌԱՁԳԱԿԱՆՈՒԹՅԱՆ ՏԵՍՈՒԹՅԱՆ ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐՈՒՄ ՀԱՐՎԱԾԱՅԻՆ ԱԼԻՔԻ ՈՐՈՇՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Դիտարկված են ոչ-գծային առաձգական և ոչ-գծային երկրաչափական մի քանի միաչափ և քվազի-միաչափ խնդիրներ։ Լուծումն՝ ալիքի ճակատի մոտակայքում, տրվում է գծային լուծումներում խարակտերիստիկները ոչ-գծային խարակտերիստիկներով փոխարինելով։

Որոշված է հարվածային ալիքի արագությունը և նրա մարման օրենքը։

A. G. BAGDOEV, L. A. MOVSISIAN

ON THE PROBLEM OF DETERMINATION OF SHOCK WAVES IN NON-LINEAR PROBLEMS OF ELASTICITY

S u m m a r y

Some one dimensional non-linear elastic problems are considered. The solution is obtained by changing the linear characteristics by a non-linear ones.

The velocity and decay of shock waves are found to be depended on the properties of the medium.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каудерер Г.* Нелинейная механика, М., 1961.
2. *Новожилов В. В.* Основы нелинейной упругости. ОГИЗ, М.-Л., 1948.
3. *Солуян С. И., Хохлов Р. В.* Распространение акустических волн. Вестник МГУ (серия физическая), № 3, 1961.
4. *Губкин К. Е.* Распространение разрывов в звуковых волнах. ПММ, т. 22, вып. 4, 1958.
5. *Багдоев А. Г.* Пространственные нестационарные движения сплошной среды. Изд-во АН АрмССР, Ереван, 1961.