ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 3, 1968 Механика

В. С. ТОНОЯН

О РЕШЕНИИ СИММЕТРИЧНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ВКЛЮЧЕНИЕМ

Исследованию плоской контактной задачи теории упругости посвящено много работ [1–5]. В этих работах рассматривались контактные задачи для полуплоскости, слоя и полосы с различными граничными условиями, а также задачи для составных полуплоскостей, причем линии раздела различных материалов принимались параллельными граничной линии. Позже были рассмотрены контактные задачи для квадранта [6, 7].

Во всех этих работах принималось, что свойства упругого материала в направлениях, параллельных границе полуплоскости, не изменяются.

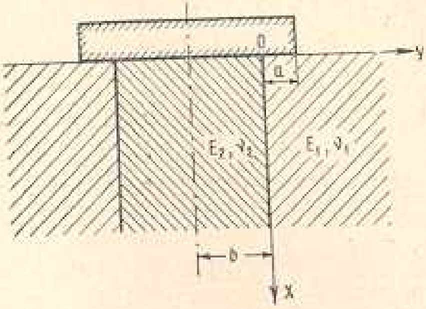
В работе Н. Х. Арутюняна и А. А. Баблояна [8] рассматривалась задача о давлении жесткого штампа, приложенного на части границы упругой составной полуплоскости. Было принято, что составная полуплоскость состоит из двух однородных и изотропных квадрантов с различными упругими свойствами, линии раздела материалов которых перпендикулярны границе полуплоскости. Предполагалось, что трение между штампом и материалами отсутствует, а штамп находится на обоих материалах одновременно.

В настоящей работе получено решение задачи о давлении жесткого штампа с основанием произвольной формы, приложенного на части горизонтальной границы упругой составной полуплоскости. Полуплоскость состоит из трех однородных и изотропных частей: двух квадрантов и полуполосы между ними, при этом квадранты изготовлены из одного материала, а полуполоса—из другого материала. Квадранты и полуполоса соединены друг с другом так, что составляют одну полуплоскость. На горизонтальной границе полуплоскости приложен жесткий штамп с гладким основанием так, что штамп находится одновременно на всех материалах и расположен симметрично относительно линии $y=-b$ (фиг. 1). Предполагается, что трение между штампом и материалами отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полуплоскости вне штампа свободна от внешних усилий.

В силу симметрии граничных условий относительно линии $y=-b$ можно ограничиться рассмотрением только правой половины упругой составной полуплоскости, требуя при этом, чтобы на линии $y=-b$ выполнялись условия

$$\tau_{xy}(x, -b) = v(x, -b) = 0 \qquad (0 < x < \infty)$$

Поставленная задача сводится к определению одной бигармонической функции.



Фиг. 1.

Полагаем, что эта функция в области полуполосы принимает значения $\Phi_2(x, y)$, а в области квадранта — $\Phi_1(x, y)$. Ищем функции $\Phi_i(x, y)$ $(i = 1, 2)$ в виде

$$\Phi_1(x, y) = \int_0^\infty [A_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin \alpha y d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty [C_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)] e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta \qquad (0 \leqslant x < \infty, \ 0 \leqslant y < \infty) \tag{1}$$

$$\Phi_2(x, y) = \int_0^\infty [A_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y + B_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y + \alpha y (C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y +$$

$$+ D_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y)] \cos \alpha x d\alpha + \sum_{k=1}^\infty (G_k + \beta_k x F_k) e^{-\beta_k x} \sin \beta_k y$$

$$(0 \leqslant x < \infty, \ -b \leqslant y \leqslant 0)$$

$$\beta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2b}$$

Здесь $A_i(\alpha)$, $B_i(\alpha)$, $C_i(\beta)$, $D_i(\beta)$, G_k и F_k $(i = 1,2)$ — неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению из граничных условий и условий контакта.

Используя обычные формулы для определения напряжений и перемещений [1], будем иметь

$$\sigma^{(1)} = -\int_0^\infty \alpha^2 [A_1(\alpha) + \alpha x B_1(\alpha)] e^{-\alpha x} \sin \alpha y d\alpha +$$

$$+ \int_0^\infty \beta^2 [C_1(\beta) - 2D_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)] e^{-\beta y} \cos \beta x d\beta$$

$$\sigma_y^{(1)}=\int_0^\infty \alpha^2[A_1(\alpha)-2B_1(\alpha)+\alpha x B_1(\alpha)]\,e^{-\alpha x}\sin\alpha y\,d\alpha-$$

$$-\int_0^\infty \beta^2[C_1(\beta)+\beta y D_1(\beta)]\,e^{-\beta y}\cos\beta x\,d\beta$$

$$\tau_{xy}^{(1)}=\int_0^\infty \alpha^2[A_1(\alpha)-B_1(\alpha)+\alpha x B_1(\alpha)]\,e^{-\alpha x}\cos\alpha y\,d\alpha-$$

$$-\int_0^\infty \beta^2[C_1(\beta)-D_1(\beta)+\beta y D_1(\beta)]\,e^{-\beta y}\sin\beta x\,d\beta$$

$$u_1(x,y)=\frac{1}{E_1}\left\{\int_0^\infty [(1+\nu_1)A_1(\alpha)+(1-\nu_1)B_1(\alpha)+\right.$$

$$+(1+\nu_1)\alpha x B_1(\alpha)]\,e^{-\alpha x}\sin\alpha y\,d\alpha+\int_0^\infty \beta[(1+\nu_1)C_1(\beta)-2D_1(\beta)+$$

$$\left.+(1+\nu_1)\beta y D_1(\beta)]\,e^{-\beta y}\sin\beta x\,d\beta\right\}$$

$$v_1(x,y)=\frac{1}{E_1}\left\{-\int_0^\infty \alpha[(1+\nu_1)A_1(\alpha)-2B_1(\alpha)+\right.$$

$$+(1+\nu_1)\alpha x B_1(\alpha)]\,e^{-\alpha x}\cos\alpha y\,d\alpha+\int_0^\infty \beta\,[(1+\nu_1)C_1(\beta)+(1-\nu_1)D_1(\beta)+$$

$$\left.+(1+\nu_1)\beta y D_1(\beta)]\,e^{-\beta y}\cos\beta x\,d\beta\right\}$$

$$\sigma_x^{(2)}(x,y)=\int_0^\infty \alpha^2\,\{[A_2(\alpha)+2D_2(\alpha)]\operatorname{ch}\alpha y+[B_2(\alpha)+2C_2(\alpha)]\operatorname{sh}\alpha y+$$

$$+\alpha y[C_2(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y+D_2(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y]\}\cos\alpha x\,d\alpha-\sum_{k=1}^\infty \beta_k^2\,(G_k+\beta_k x F_k)\,e^{-\beta_k x}\sin\beta_k y \tag{2}$$

$$\sigma_y^{(2)}(x,y)=-\int_0^\infty \alpha^2[A_2(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y+B_2(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y+\alpha y\,(C_2(\alpha)\operatorname{ch}\alpha y+$$

$$+D_2(\alpha)\operatorname{sh}\alpha y)]\cos\alpha x\,d\alpha+\sum_{k=1}^\infty \beta_k^2\,(G_k-2F_k+\beta_k x F_k)\,e^{-\beta_k x}\sin\beta_k y$$

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, y) = \int_0^\infty \alpha^2 \{[A_2(\alpha) + D_2(\alpha)] \operatorname{sh} \alpha y + [B_2(\alpha) + C_2(\alpha)] \operatorname{ch} \alpha y +$$

$$+ \alpha y [C_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y + D_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y]\} \sin \alpha x d\alpha + \sum_{k=1}^\infty \beta_k^2 (G_k - F_k +$$

$$+ \beta_k x F_k) e^{-\beta_k x} \cos \beta_k y$$

$$u_2(x, y) = \frac{1}{E_2} \left\{ \int_0^\infty \alpha [((1+\nu_2) A_2(\alpha) + 2D_2(\alpha)) \operatorname{ch} \alpha y + ((1+\nu_2) B_2(\alpha) + \right.$$

$$+ 2C_2(\alpha)) \operatorname{sh} \alpha y + (1+\nu_2) \alpha y (C_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y + D_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y)] \sin \alpha x d\alpha +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^\infty \beta_k [(1+\nu_2) G_k + (1-\nu_2) F_k + (1+\nu_2) \beta_k x F_k] e^{-\beta_k x} \sin \beta_k y \right\}$$

$$v_2(x, y) = -\frac{1}{E_2} \left\{ \int_0^\infty \alpha [((1+\nu_2) A_2(\alpha) - (1-\nu_2) D_2(\alpha)) \operatorname{sh} \alpha y + ((1+\nu_2) B_2(\alpha) - \right.$$

$$- (1-\nu_2) C_2(\alpha)) \operatorname{ch} \alpha y + (1+\nu_2) \alpha y (C_2(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y + D_2(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y)] \cos \alpha x d\alpha +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^\infty \beta_k [(1+\nu_2) G_k - 2F_k + (1+\nu_2) \beta_k x F_k] e^{-\beta_k x} \cos \beta_k y \right\}$$

где E_i и ν_i $(i = 1, 2)$ — модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно, u_1, v_1, $\tau_{xy}^{(1)}$, $\sigma_x^{(1)}$ и $\sigma_y^{(1)}$ — перемещения и напряжения точек квадранта, а u_2, v_2, $\tau_{xy}^{(2)}$, $\sigma_x^{(2)}$ и $\sigma_y^{(2)}$ — перемещения и напряжения точек полуполосы.

Граничные условия в рассматриваемой задаче имеют вид

$$\begin{aligned} & u_1(0, y) = f_1(y) && (0 \leqslant y \leqslant a) \\ & \sigma_x^{(1)}(0, y) = 0 && (a < y < \infty) \\ & \tau_{xy}^{(1)}(0, y) = 0 && (0 \leqslant y < \infty) \end{aligned} \tag{3}$$

$$\left. \begin{aligned} & u_2(0, y) = f_2(y) \\ & \tau_{xy}^{(2)}(0, y) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (-b \leqslant y \leqslant 0) \tag{4}$$

где

$$f^*(y) = \begin{cases} f_1(y) & 0 \leqslant y \leqslant a \\ f_2(y) & -b \leqslant y \leqslant 0 \end{cases}$$

— гладкая функция.

Условия симметрии относительно оси $y = -b$ примут вид

$$\tau_{xy}^{(2)}(x, -b) = v_2(x, -b) = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x < \infty \tag{5}$$

а условия контакта или жесткого соединения полуполосы с квадрантом выразятся равенствами

$$
\begin{aligned}
u_1(x,\ 0) &= u_2(x,\ 0), \qquad \sigma_y^{(1)}(x,\ 0) = \sigma_y^{(2)}(x,\ 0) \\
v_1(x,\ 0) &= v_2(x,\ 0), \qquad \tau_{xy}^{(1)}(x,\ 0) = \tau_{xy}^{(2)}(x,\ 0)
\end{aligned} \tag{6}
$$

Удовлетворяя граничным условиям (4), получим

$$
G_k = F_k = \frac{E_2}{b\beta_k} \int_{-b}^{0} f_2(y) \sin \beta_k y dy \tag{7}
$$

Используя граничные условия (3), для неизвестных функций $A_1(\alpha)$ и $B_1(\alpha)$ получаем следующие „парные" интегральные уравнения

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty \alpha A_1(\alpha) \sin \alpha y d\alpha = f(y) \qquad (0 \leqslant y \leqslant a) \\
&\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha) \sin \alpha y d\alpha = g(y) \qquad (a < y < \infty)
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
A_1(\alpha) = B_1(\alpha) \tag{9}
$$

где

$$
f(y) = \frac{E_1}{2} f_1(y)
$$

$$
g(y) = \int_0^\infty \beta^2 [C_1(\beta) - 2D_1(\beta) + \beta y D_1(\beta)] e^{-\beta y} d\beta \tag{10}
$$

Удовлетворив теперь условиям симметрии (5), условиям контакта двух материалов (6) и пользуясь при этом формулами обращения для преобразования Фурье, получим следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&-(1+\nu_2) A_2(\alpha) \operatorname{sh} b\alpha + (1+\nu_2) B_2(\alpha) \operatorname{ch} b\alpha + [(1+\nu_2) b\alpha \operatorname{sh} b\alpha - \\
&- (1-\nu_2) \operatorname{ch} b\alpha] C_2(\alpha) + [(1-\nu_2) \operatorname{sh} b\alpha - (1+\nu_2) b\alpha \operatorname{ch} b\alpha] D_2(\alpha) = 0 \\
&-A_2(\alpha) \operatorname{sh} b\alpha + B_2(\alpha) \operatorname{ch} b\alpha + [\operatorname{ch} b\alpha + b\alpha \operatorname{sh} b\alpha] C_2(\alpha) - \\
&- [\operatorname{sh} b\alpha + b\alpha \operatorname{ch} b\alpha] D_2(\alpha) = 0
\end{aligned} \tag{11}
$$

$$
A_2(\alpha)(1+\nu_2)/E_2 + D_2(\alpha) 2/E_2 = C_1(\alpha)(1+\nu_1)/E_1 - D_1(\alpha) 2/E_1
$$

$$
C_1(\alpha) = A_2(\alpha)
$$

$$
C_1(\beta) - D_1(\beta) + B_2(\beta) + C_2(\beta) = \frac{2}{\pi\beta} \int_0^\infty \frac{\alpha^4 B_1(\alpha) d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2} - \frac{4}{\pi\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k^4 F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2} \tag{12}
$$

$$[(1+\nu_1)\,C_1(\beta)+(1-\nu_1)\,D_1(\beta)]/E_1+[(1+\nu_2)\,B_2(\beta)-(1-\nu_2)\,C_2(\beta)]/E_2=$$

$$=-\frac{4}{E_1\pi\beta}\int\limits_0^\infty \frac{\alpha^2(\beta^2-\nu_1\alpha^2)\,B_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha+\frac{4}{\pi\beta E_2}\sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k^2(\beta^2-\nu_2\beta_k^2)\,F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2}$$

Из уравнений (11), выразив $A_2(\alpha)$, $B_2(\alpha)$, $C_2(\alpha)$ и $D_2(\alpha)$ через функции $C_1(\alpha)$ и $D_1(\alpha)$, получим

$$A_2(\alpha)=C_1(\alpha)$$

$$B_2(\alpha)=C_1(\alpha)\,\mathrm{th}\,b\alpha+\frac{E_2}{2}\frac{b\alpha}{\mathrm{ch}^2 b\alpha}\left[\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)C_1(\alpha)-\frac{2}{E_1}D_1(\alpha)\right]$$

$$C_2(\alpha)=\frac{E_2}{2}\left[\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)C_1(\alpha)-\frac{2}{E_1}D_1(\alpha)\right]\mathrm{th}\,b\alpha \qquad (13)$$

$$D_2(\alpha)=\frac{E_2}{2}\left[\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)C_1(\alpha)-\frac{2}{E_1}D_1(\alpha)\right]$$

Подставляя значения $B_2(\beta)$ и $C_2(\beta)$ из (13) в уравнения (12) и решая полученную систему относительно функций $C_1(\beta)$ и $D_1(\beta)$, выразим их через $A_1(\beta)$, то есть

$$C_1(\beta)=\left[\frac{1-\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_1}\frac{b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}-\frac{1-\nu_2}{E_1}\mathrm{th}\,b\beta\right]\frac{M(\beta)}{K(\beta)}+$$

$$+\left[1+\frac{E_2}{E_1}\left(\mathrm{th}\,b\beta+\frac{b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}\right)\right]\frac{N(\beta)}{K(\beta)}$$

(14)

$$D_1(\beta)=-\left\{\frac{1+\nu_1}{E_1}+\frac{1+\nu_2}{E_2}\mathrm{th}\,b\beta+\frac{1}{2}\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)\left[\frac{(1+\nu_2)\,b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-(1-\nu_2)\,\mathrm{th}\,b\beta\right]\right\}\frac{M(\beta)}{K(\beta)}+\left[1+\mathrm{th}\,b\beta+\frac{E_2}{2}\left(\mathrm{th}\,b\beta+\frac{b\beta}{\mathrm{ch}^2 b\beta}\right)\left(\frac{1+\nu_1}{E_1}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1+\nu_2}{E_2}\right)\right]\frac{N(\beta)}{K(\beta)}$$

где введены обозначения

$$M(\beta)=\frac{4}{\pi\beta}\left[\int\limits_0^\infty \frac{\alpha^4 A_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha-\sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k^4 F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2}\right]$$

$$N(\beta)=\frac{4}{\pi\beta}\left[-\frac{1}{E_1}\int\limits_0^\infty \frac{\alpha^2(\beta^2-\nu_1\alpha^2)\,A_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha+\frac{1}{E_2}\sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k^2(\beta^2-\nu_2\beta_k^2)}{(\beta_k^2+\beta^2)^2}F_k\right]$$

$$K(\beta)=\frac{2}{E_1}+\left[\frac{(1+\nu_1)(3-\nu_1)\,E_2}{2E_1^2}+\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{2E_2}-\right.$$

$$
-\frac{(1+\nu_1)(1-\nu_2)}{E_1}\Bigg]\operatorname{th} b\beta + \left[\frac{(1+\nu_1)(3-\nu_1)E_2}{2E_1^2} - \frac{(1+\nu_2)^2}{2E_2} - \right.
$$

$$
-\frac{(1-\nu_1)(1+\nu_2)}{E_1}\Bigg]\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta} - \frac{E_2(1-\nu_2)}{2E_1}\left(\frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1+\nu_2}{E_2}\right)\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta}\operatorname{th} b\beta +
$$

$$
+\left[\frac{2\nu_2}{E_1} - \frac{E_2(1-\nu_2)}{E_1}\left(\frac{1+\nu_1}{E_1} - \frac{1+\nu_2}{E_2}\right)\right]\operatorname{th}^2 b\beta \tag{15}
$$

Выразим теперь из парных интегральных уравнений (8) функцию $A_1(\alpha)$ через функции $C_1(\beta)$ и $D_1(\beta)$.

Для этого умножим первое уравнение (8) на $y(t^2-y^2)^{-1/2}dy$, проинтегрируем по y от нуля до t и продифференцируем полученное соотношение по t. Умножая второе уравнение (8) на $(y^2-t^2)^{-1/2}dy$ и интегрируя по y от t до ∞, получим

$$
\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha)\, t J_0(\alpha t)\, d\alpha = \frac{d}{dt}\int_0^t \frac{y f(y)\,dy}{\sqrt{t^2-y^2}} \qquad 0 < t < a \\
&\frac{\pi}{2}\int_0^\infty \alpha^2 A_1(\alpha) J_0(\alpha t)\, d\alpha = \int_t^\infty \frac{g(y)\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}} \qquad a < t < \infty
\end{aligned} \tag{16}
$$

где $J_i(x)$ — функция Бесселя первого рода с действительным аргументом.

Здесь использованы значения следующих интегралов [11]:

$$
\int_0^t \frac{y \sin\alpha y}{\sqrt{t^2-y^2}}\,dy = \frac{\pi}{2} t J_1(\alpha t), \qquad \int_t^\infty \frac{\sin\alpha y\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}} = \frac{\pi}{2} J_0(\alpha t)
$$

Используя формулу обращения для преобразования Ханкеля, получим

$$
\frac{\pi}{2}\alpha A_1(\alpha) = \int_0^a \varphi(t) J_0(\alpha t)\,dt + \int_a^\infty tF(t) J_0(\alpha t)\,dt \tag{17}
$$

Подставляя значения функции $A_1(\alpha)$ из (17) в (15), получим

$$
\begin{aligned}
M(\beta) &= \frac{8}{\pi^2\beta}\left\{\int_0^a \varphi(t)\chi(\beta t)\,dt + \int_a^\infty tF(t)\chi(\beta t)\,dt\right\} - \frac{4}{\pi\beta}\sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k^4 F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2} \\
N(\beta) &= \frac{8}{\pi^2\beta}\left\{\int_0^a \varphi(t) R(\beta t)\,dt + \int_a^\infty tF(t) R(\beta t)\,dt\right\} + \frac{4}{\pi\beta}\sum_{k=1}^\infty \frac{\beta_k^2(\beta^2-\nu_2\beta_k^2)F_k}{(\beta_k^2+\beta^2)^2}
\end{aligned} \tag{18}
$$

Здесь введены обозначения

$$F(t)=\int_t^\infty \frac{g(y)\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}}=\int_0^\infty \beta^2\left[\left(C_1(\beta)-2D_1(\beta)\right)K_0(\beta t)+\beta t D_1(\beta)K_1(\beta t)\right]d\beta$$

$$\varphi(t)=\frac{d}{dt}\int_0^t \frac{yf(y)\,dy}{\sqrt{t^2-y^2}},\qquad \chi(z)=K_0(z)-\frac{z}{2}K_1(z) \tag{19}$$

$$R(z)=\frac{\nu_1}{E_1}K_0(z)-\frac{1+\nu_1}{2E_1}zK_1(z)$$

где $K_i(z)$ — функции Макдональда.

При получении формул (18) и (19) были использованы значения следующих интегралов [11]:

$$\int_t^\infty \frac{e^{-\beta y}\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}}=K_0(\beta t),\qquad \int_t^\infty \frac{ye^{-\beta y}\,dy}{\sqrt{y^2-t^2}}=tK_1(\beta t)$$

$$\int_0^\infty \frac{\alpha J_0(\alpha t)\,d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=\frac{t}{2\beta}K_1(\beta t),\qquad \int_0^\infty \frac{\alpha^3 J_0(\alpha t)\,d\alpha}{(\alpha^2+\beta^2)^2}=K_0(\beta t)-\frac{\beta t}{2}K_1(\beta t)$$

Исключая теперь функции $C_1(\beta)$ и $D_1(\beta)$ из соотношений (15), (18) и первой формулы (19), для определения функции $F(t)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$F(x)=\Omega(x)+\int_a^\infty tF(t)\,K(x,\,t)\,dt \tag{20}$$

где введены обозначения

$$K(x,\,t)=\frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty \beta\left[\Delta_1(\beta)K_0(\beta x)\chi(\beta t)+\Delta_2(\beta)K_0(\beta x)R(\beta t)+\right.$$

$$\left.+\beta x\Delta_3(\beta)K_1(\beta x)\chi(\beta t)+\beta x\Delta_4(\beta)K_1(\beta x)R(\beta t)\right]d\beta \tag{21}$$

$$\Omega(x)=\int_0^a \varphi(t)K(x,\,t)\,dt+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^\infty \beta_k^2F_k\int_0^\infty \frac{\beta}{(\beta^2+\beta_k^2)^2}\left[-\beta_k^2\Delta_1(\beta)K_0(\beta x)+\right.$$

$$\left.+\frac{\beta^2-\nu_2\beta_k^2}{E_2}\Delta_2(\beta)K_0(\beta x)-\beta x\beta_k^2\Delta_3(\beta)K_1(\beta x)+\beta x\frac{\beta^2-\nu_2\beta_k^2}{E_2}\Delta_4(\beta)K_1(\beta x)\right]d\beta \tag{22}$$

$$\Delta_1(\beta)=\frac{1}{K(\beta)}\left\{\frac{3+\nu_1}{E_1}+\left[\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{E_2}-\frac{(1-\nu_2)(2+\nu_1)}{E_1}\right]\operatorname{th} b\beta+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{\nu_1(1+\nu_2)}{E_1}-\frac{(1+\nu_2)^2}{E_2}\right]\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta}\right\}$$

$$\Delta_2(\beta)=\frac{1}{K(\beta)}\left\{-1+\left[1-\nu_2+\frac{(2+\nu_1)E_2}{E_1}\right]\operatorname{th}b\beta+\right.$$

$$\left.+\left[\frac{(2+\nu_1)E_2}{E_1}-(1+\nu_2)\right]\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta}\right\} \tag{23}$$

$$\Delta_3(\beta)=-\frac{1}{K(\beta)}\left\{\frac{1+\nu_1}{E_1}+\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{E_2}-\frac{(1+\nu_1)(1-\nu_2)}{E_1}\right]\operatorname{th}b\beta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\nu_1)(1+\nu_2)}{E_1}-\frac{(1+\nu_2)^2}{E_2}\right]\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta}\right\}$$

$$\Delta_4(\beta)=\frac{1}{K(\beta)}\left\{1+\frac{1}{2}\left[1-\nu_2+\frac{(1+\nu_1)E_2}{E_1}\right]\operatorname{th}b\beta+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\nu_1)E_2}{E_1}-(1+\nu_2)\right]\frac{b\beta}{\operatorname{ch}^2 b\beta}\right\}$$

Ядро интегрального уравнения (20) представляет собой интеграл со слабой сходимостью, который в конечном виде не вычисляется. Для улучшения сходимости этого интеграла (21) представим его в следующем виде:

$$K(x,\ t)=\frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty\beta\left[\Delta_1(\infty)K_0(\beta x)\chi(\beta t)+\Delta_2(\infty)K_0(\beta x)R(\beta t)+\right.$$

$$\left.+\beta x\Delta_3(\infty)K_1(\beta x)\chi(\beta t)+\beta x\Delta_4(\infty)K_1(\beta x)R(\beta t)\right]d\beta+$$

$$+\frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty\beta\{[\Delta_1(\beta)-\Delta_1(\infty)]K_0(\beta x)\chi(\beta t)+[\Delta_2(\beta)-\Delta_2(\infty)]K_0(\beta x)R(\beta t)+$$

$$+\beta x[\Delta_3(\beta)-\Delta_3(\infty)]K_1(\beta x)\chi(\beta t)+\beta x[\Delta_4(\beta)-\Delta_4(\infty)]K_1(\beta x)R(\beta t)\}\,d\beta \tag{24}$$

где

$$\Delta_1(\infty)=\frac{1}{K(\infty)}\left\{\frac{3+\nu_1}{E_1}+\left[\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{E_2}-\frac{(1-\nu_2)(2+\nu_1)}{E_1}\right]\right\}$$

$$\Delta_2(\infty)=\frac{1}{K(\infty)}\left[\frac{(2+\nu_1)E_2}{E_1}-\nu_2\right]$$

$$\Delta_3(\infty)=-\frac{1}{K(\infty)}\left\{\frac{1+\nu_1}{E_1}+\frac{1}{2}\left[\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{E_2}-\frac{(1+\nu_1)(1-\nu_2)}{E_1}\right]\right\}$$

$$\Delta_4(\infty)=\frac{1}{K(\infty)}\left\{1+\frac{1}{2}\left[1-\nu_2+\frac{(1+\nu_1)E_2}{E_1}\right]\right\}$$

$$K(\infty)=\frac{2}{E_1}+\frac{(1+\nu_1)(3-\nu_1)E_2}{2E_1^2}+\frac{(1+\nu_2)(3-\nu_2)}{2E_2}-\frac{(1+\nu_1)(1-\nu_2)}{E_1}$$

Имея в виду значения интегралов [11]

$$\int_0^\infty \beta K_0(\beta x) K_0(\beta t)\, d\beta = \frac{\ln (t/x)}{t^2 - x^2}$$

$$\int_0^\infty \beta^2 K_0(\beta x) K_1(\beta t)\, d\beta = \frac{x^2 - t^2 + 2t^2 \ln t/x}{t(t^2 - x^2)^2} \tag{26}$$

$$\int_0^\infty \beta^3 K_1(\beta x) K_1(\beta t)\, d\beta = 2\, \frac{t^4 - x^4 - 4x^2 t^2 \ln t/x}{tx(t^2 - x^2)^3}$$

замечаем, что первый интеграл в выражении (24) вычисляется, а второй интеграл уже сходится быстрее, потому что выражения $[\Delta_i(\beta) - \Delta_i(\infty)]$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ затухают по экспоненциальному закону.

Следовательно, ядро $K(x, t)$ примет вид

$$K(x, t) = I_1(x, t) + I_2(x, t) \tag{27}$$

где

$$I_1(x, t) = \frac{8}{\pi^2}\left\{-\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1}\, \frac{\ln t/x}{t^2 - x^2} + \left[\frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{(\nu_1 + 1)}{2E_1}\Delta_2(\infty) + \right.\right.$$

$$\left. + \Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1 \Delta_4(\infty)}{E_1}\right] \frac{t^2 - x^2 - 2x^2 \ln t/x}{(t^2 - x^2)^2} -$$

$$\left. - \left[\Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1 + 1}{E_1}\Delta_4(\infty)\right] \frac{t^4 - x^4 - 4x^2 t^2 \ln t/x}{(t^2 - x^2)^3}\right\} \tag{28}$$

$$I_2(x, t) = \frac{8}{\pi^2}\int_0^\infty \beta\, \{[\Delta_1(\beta) - \Delta_1(\infty)]\, K_0(\beta x)\, \chi(\beta t) + [\Delta_2(\beta) -$$

$$- \Delta_2(\infty)]\, K_0(\beta x)\, R(\beta t) + \beta x\, [\Delta_3(\beta) - \Delta_3(\infty)]\, K_1(\beta x)\, \chi(\beta t) + \beta x\, [\Delta_4(\beta) -$$

$$- \Delta_4(\infty)]\, K_1(\beta x)\, R(\beta t)\}\, d\beta$$

Упростим интегральное уравнение (20). Для этого в уравнении (20) перейдем к новым переменным следующим образом: принимая, что $a \neq 0$, переменную интегрирования t заменим через $t = ae^{\xi}$, а переменную (параметр) x заменим через $x = ae^{\eta}$. После таких преобразований уравнение (20) примет вид

$$F_1(\eta) = \Omega_1(\eta) + \int_0^\infty K_1(\eta, \xi)\, F_1(\xi)\, d\xi \tag{29}$$

где

$$K_1(\eta, \xi) = I_1^*(\eta, \xi) + I_2^*(\eta, \xi)$$

$$\Gamma_1^*(\eta, \xi) = \frac{8}{\pi^2} e^{(\eta-\xi)} \left\{ -\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1} \frac{\xi-\eta}{1-e^{2(\eta-\xi)}} + \left[\frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{\nu_1+1}{2E_1} \Delta_2(\infty) + \right.\right.$$

$$\left. + \Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1 \Delta_4(\infty)}{E_1} \right] \frac{1-e^{2(\eta-\xi)} - 2(\xi-\eta) e^{2(\eta-\xi)}}{(1-e^{2(\eta-\xi)})^2} -$$

$$\left. - \left[\Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1+1}{E_1} \Delta_4(\infty) \right] \frac{1-e^{4(\eta-\xi)} - 4(\xi-\eta) e^{2(\eta-\xi)}}{(1-e^{2(\eta-\xi)})^3} \right\} \tag{30}$$

$$\Gamma_2^*(\eta, \xi) = \frac{8}{\pi^2} a^2 e^{2\xi} e^{(\eta-\xi)} \int_0^\infty \beta \{ [\Delta_1(\beta) - \Delta_1(\infty)] K_0(\beta a e^{\eta}) \chi(\beta a e^{\xi}) +$$

$$+ [\Delta_2(\beta) - \Delta_2(\infty)] K_0(\beta a e^{\eta}) R(\beta a e^{\xi}) + [\Delta_3(\beta) - \Delta_3(\infty)] a\beta e^{\eta} K_1(\beta a e^{\eta}) \chi(\beta a e^{\xi}) +$$

$$+ [\Delta_4(\beta) - \Delta_4(\infty)] a\beta e^{\eta} K_1(\beta a e^{\eta}) R(\beta a e^{\xi}) \} d\beta$$

$$\Omega_1(\eta) = \int_{-\infty}^0 e^{-\xi} \varphi_1(\xi) K_1(\eta, \xi) d\xi +$$

$$+ \frac{4}{\pi} e^{\eta} \sum_{k=1}^\infty \beta_k^2 F_k \int_0^\infty \frac{\beta}{(\beta^2+\beta_k^2)^2} \left[-\beta_k^2 \Delta_1(\beta) K_0(\beta a e^{\eta}) + \right.$$

$$+ \frac{\beta^2 - \nu_2 \beta_k^2}{E_2} \Delta_2(\beta) K_0(\beta a e^{\eta}) - \beta a e^{\eta} \beta_k^2 \Delta_3(\beta) K_1(\beta a e^{\eta}) +$$

$$\left. + \beta a e^{\eta} \frac{\beta^2 - \nu_2 \beta_k^2}{E_2} \Delta_4(\beta) K_1(\beta a e^{\eta}) \right] d\beta$$

Здесь искомая функция $F_1(\eta)$ и свободный член $\varphi_1(\xi)$ связаны с функциями $F(x)$ и $\varphi(t)$ соотношениями

$$F_1(\eta) = e^{\eta} F(a e^{\eta}), \qquad \varphi_1(\xi) = e^{\xi} \varphi(a e^{\xi}) \tag{31}$$

Для решения уравнения (28) сперва покажем, что

$$\int_0^\infty |K_1(\eta, \xi)| d\xi < 1$$

Действительно, используя первое соотношение из (30), будем иметь

$$\int_0^\infty |K_1(\eta, \xi)| d\xi \leqslant \int_0^\infty \Gamma_1^*(\eta, \xi) d\xi + \int_0^\infty \Gamma_2^*(\eta, \xi) d\xi \tag{32}$$

Пользуясь значениями следующих интегралов:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{x dx}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi^2}{2}, \qquad \int_{-\infty}^\infty \frac{\operatorname{sh} x - x e^{-x}}{\operatorname{sh}^2 x} dx = \frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2x - 2x}{\operatorname{sh}^3 x} dx = \frac{\pi^2}{2}$$

можно оценить первый интеграл в правой части выражения (32)

$$\int_0^{\infty} \Gamma_1(\eta, \xi) d\xi = \frac{8}{\pi^2} \left\{ -\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1} \int_0^{\infty} \frac{(\xi - \eta) e^{(\eta - \xi)}}{1 - e^{2(\eta - \xi)}} d\xi + \left[\frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{\nu_1 + 1}{2E_1} \Delta_2(\infty) + \right.\right.$$

$$\left. + \Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1 \Delta_4(\infty)}{E_1} \right] \int_0^{\infty} e^{(\eta - \xi)} \frac{1 - e^{2(\eta - \xi)} - 2(\xi - \eta) e^{2(\eta - \xi)}}{(1 - e^{2(\eta - \xi)})^2} d\xi -$$

$$- \left[\Delta_3(\infty) + \frac{(\nu_1 + 1)\Delta_4(\infty)}{E_1} \right] \int_0^{\infty} e^{\eta - \xi} \frac{1 - e^{4(\eta - \xi)} - 4e^{2(\eta - \xi)}(\xi - \eta)}{(1 - e^{2(\eta - \xi)})^3} d\xi =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left\{ -\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1} \int_{-\eta}^{\infty} \frac{z dz}{\operatorname{sh} z} + \left[\frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{\nu_1 + 1}{2E_1} \Delta_2(\infty) + \Delta_3(\infty) + \right.\right.$$

$$\left. + \frac{\nu_1 \Delta_4(\infty)}{E_1} \right] \int_{-\eta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z - z e^{-z}}{\operatorname{sh}^2 z} dz - \left[\Delta_3(\infty) + \right.$$

$$\left. \left. + \frac{(\nu_1 + 1)\Delta_4(\infty)}{E_1} \right] \frac{1}{2} \int_{-\eta}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\operatorname{sh}^3 z} dz \right\} < \frac{4}{\pi^2} \left\{ -\frac{\Delta_2(\infty)}{E_1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z dz}{\operatorname{sh} z} + \right.$$

$$+ \left[\frac{\Delta_1(\infty)}{2} + \frac{\nu_1 + 1}{2E_1} \Delta_2(\infty) + \Delta_3(\infty) + \frac{\nu_1 \Delta_4(\infty)}{E_1} \right] \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} z - z e^{-z}}{\operatorname{sh}^2 z} dz -$$

$$\left. - \left[\Delta_3(\infty) + \frac{(\nu_1 + 1)\Delta_4(\infty)}{E_1} \right] \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} 2z - 2z}{\operatorname{sh}^3 z} dz \right\} = -\frac{2\Delta_2(\infty)}{E_1} + \Delta_1(\infty) +$$

$$+ \frac{\nu_1 + 1}{E_1} \Delta_2(\infty) + 2\Delta_3(\infty) + \frac{2\nu_1 \Delta_4(\infty)}{E_1} - \Delta_3(\infty) - \frac{(\nu_1 + 1)\Delta_4(\infty)}{E_1} =$$

$$= \Delta_1(\infty) - \frac{1 - \nu_1}{E_1} \Delta_2(\infty) + \Delta_3(\infty) - \frac{1 - \nu_1}{E_1} \Delta_4(\infty) = \frac{1}{2}$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} \Gamma_1(\eta, \xi) d\xi < \frac{1}{2} \tag{33}$$

Остается оценить второй интеграл в выражении (32).

Из (24) и (28) видно, что соответственные члены $I_1^*(\eta, \xi)$ и $I_2^*(\eta, \xi)$ отличаются друг от друга коэффициентами $\Delta_i(\infty)$ и $\Delta_i(\beta) - \Delta_i(\infty)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. Первый коэффициент зависит только от упругих постоянных, а второй представляет собой произведение двух множителей, один из которых зависит только от упругих постоянных и меньше $\Delta_i(\infty)$, а другой зависит от β, стремится к нулю по экспоненциальному закону и меньше единицы.

Следовательно, каждый член $I_2^*(\eta, \xi)$ меньше каждого соответственного члена $I_1^*(\eta, \xi)$, откуда следует, что

$$\int_0^\infty I_2^*(\eta, \xi)\, d\xi < \int_0^\infty I_1^*(\eta, \xi)\, d\xi < \frac{1}{2} \tag{34}$$

Таким образом, из (32), (33) и (34) следует, что

$$\int_0^\infty |K_1(\eta, \xi)|\, d\xi < 1 \tag{35}$$

а функция $\Omega_1(\eta)$ ограничена.

Решая интегральное уравнение (29) методом последовательных приближений, получаем выражение функции $F_1(t)$. Далее по формулам (31), (18), (17), (14) и (13) последовательно можно определить все искомые функции интегрирования. Напряжения и перемещения по известным формулам будут определены в любой точке составной полуплоскости. Отметим, что при помощи оценки (35) для ядра (30) легко доказать сходимость интегралов, входящих в выражения (17) и (18).

В частном случае, если положить $a = 0$ (штамп находится только на полуполосе), то все выражения и уравнения остаются неизменными, кроме $A_1(\alpha)$ и $\Omega_1(\eta)$.

$A_1(\alpha)$ и $\Omega_1(\eta)$ определяются соответственно из формул (17) и (30) без первых членов.

Если положим $b = 0$, $E_1 = E_2 = E$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu$, то получим решение задачи о вдавливании жесткого штампа симметричного очертания на упругую однородную полуплоскость.

В этом случае имеем

$$\begin{gathered} A_2(\alpha) = C_1(\alpha), \qquad B_2(\alpha) = C_2(\alpha) = 0, \qquad D_2(\alpha) = -D_1(\alpha) \\ G_k = F_k = 0, \qquad C_1(\beta) = \frac{1-\nu}{2} M(\beta) + \frac{E}{2} N(\beta) \\ D_1(\beta) = -\frac{1+\nu}{2} M(\beta) + \frac{E}{2} N(\beta), \qquad M(\beta) = \frac{4}{\pi\beta} \int_0^\infty \frac{\alpha^4 A_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\, d\alpha \end{gathered} \tag{36}$$

$$N(\beta) = -\frac{4}{\pi\beta E}\int\limits_0^\infty \frac{\alpha^2(\beta^2-\nu\alpha^2)\,A_1(\alpha)}{(\alpha^2+\beta^2)^2}\,d\alpha, \qquad K(\beta) = \frac{2}{E}$$

$$\Delta_1(\beta) = \frac{3+\nu}{2}, \qquad -\Delta_2(\beta) = \Delta_4(\beta) = \frac{E}{2}, \qquad \Delta_3(\beta) = -\frac{1+\nu}{2} \tag{36}$$

и интегральное уравнение (29) сводится к интегральному уравнению типа Винера-Хопфа

$$F_1(\eta) = \Omega_1(\eta) + \int\limits_0^\infty F_1(\xi)\,K_1(\eta-\xi)\,d\xi \tag{37}$$

где

$$K_1(z) = \frac{e}{\pi^2}\,\frac{z}{\operatorname{sh} z}$$

$$\Omega_1(\eta) = \frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^0 \varphi_1(\xi)\,K_1(\eta-\xi)\,d\xi \tag{38}$$

Такие интегральные уравнения рассматривались в работах И. М. Рапопорта [9] и М. Г. Крейна [10].

И. М. Рапопорт [9] связал задачу решения уравнений (37) с неоднородной граничной задачей Гильберта и дал точное решение этого интегрального уравнения в квадратурах.

Используя результаты И. М. Рапопорта, получаем

$$F_1(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty \Phi_+(t+io)\,e^{-i\eta t}\,dt \tag{39}$$

где

$$\Phi_+(x+io) = \frac{1}{2}\operatorname{cth}^2\frac{\pi x}{2}\left\{G(x) + H(x)\left[\frac{1}{\pi i}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{G(t)\,dt}{(t-x)\,H(t)}\right]\right\}$$

$$H(x) = \operatorname{th}\frac{\pi x}{2}\exp\left[-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\ln \operatorname{th}\frac{\pi t}{2}}{t-x}\,dt\right]$$

Через $G(x)$ обозначено преобразование Фурье функции $\Omega_1(\eta)$

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^\infty \Omega_1(\eta)\,e^{ix\eta}\,d\eta$$

В этом частном случае решение выражается только через функцию $\Phi_1(x, y)$, так как на линии $y=0$ $\Phi_2(x, 0) \equiv \Phi_1(x, 0)$.

В заключение считаю своим приятным долгом выразить глубокую признательность Н. Х. Арутюняну за постановку задачи.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 25 IX 1967

Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

ՆԵՐԴՐՎԱԾՔՈՎ ԿԻՍԱՀԱՐԹՈՒԹՅԱՆ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴՐԻ ԼՈՒԾՄԱՆ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է կամայական տեսքի հիմք ունեցող կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը՝ կիրառված բաղադրյալ կիսահարթության հորիզոնական եզրի մի մասի վրա: Կիսահարթությունը կազմված է երեք համասեռ և իզոտրոպ մասերից, երկու քառորդ հարթություններից և նրանց միջև գտնվող կիսաշերտից, ընդ որում քառորդ հարթությունները պատրաստված են մի նյութից, իսկ կիսաշերտը՝ ուրիշ նյութից: Քառորդ հարթությունները և կիսաշերտը իրար միացված են այնպես, որ կազմում են մի կիսահարթություն: Կիսահարթության հորիզոնական եզրի վրա կիրառված է ողորկ հիմքով կոշտ դրոշմ այնպես, որ դրոշմը գտնվում է բոլոր նյութերի վրա միաժամանակ և դասավորված է սիմետրիկ:

Խնդիրը լուծված է Ֆուրյեի մեթոդով: Ինտեգրման գործակիցների որոշումը բերվել է «զույգ» ինտեգրալ հավասարման լուծմանը, ընդ որում «զույգ» ինտեգրալ հավասարման լուծումը բերվել է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը:

Մասնավոր դեպքում ստացված է համասեռ կիսահարթության եզրի վրա կոշտ դրոշմի ճնշման խնդիրը: Այդ դեպքում Ֆրեդհոլմի ինտեգրալ հավասարումը լուծվում է ճիշտ, քառակուսացման միջոցով:

V. S. TONOYAN

ON THE SOLUTION OF SYMETRICAL CONTACT PROBLEMS FOR A SEMI-PLANE WITH AN INCLUSION

Summary

The present paper considers the problem of pressing of a rigid punch on the part of the boundary of a compound semi-plane.

The semi-plane consists of three isotropic parts: two quadrants and a semi-strip between them.

The quadrants are prepared from one material, but the semi-strip from another. On the horizontal edge of the semi-plane the rigid punch with a smooth base is pressed, the punch is found on all the materials at the same time.

The problem is solved by the method of Fourier.

The determination of the coefficients of integration is reduced to solve the dual integral equations.

The solution of the dual integral equations is reduced to the solution of Fredholm's integral equation of the second kind.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд. „Наука" ф/м, М., 1966.
2. *Штаерман И. Я.* Контактная задача теории упругости. Гостехиздат, М.-Л., 1949.
3. *Галин Л. А.* Контактные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М., 1953.
4. *Шерман Д. И.* Плоская задача теории упругости со смешанными условиями. Труды сейсмологического ин-та АН СССР, № 88, 1938.
5. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Известия АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 14, № 3, 1961.
6. *Тоноян В. С.* Об одной плоской контактной задаче для упругой четверть-плоскости. Докл. АН АрмССР, т. 37, № 3, 1963.
7. *Тоноян В. С.* Плоская контактная задача для упругой четверть-плоскости с неподвижной вертикальной кромкой. Докл. АН АрмССР, т. 37, № 5, 1963.
8. *Арутюнян Н. Х., Баблоян А. А.* Контактные задачи для составной полуплоскости. Тезисы докладов IV Всесоюзн. конференции по прочности и пластичности. Изд-во „Наука", М., 1967, стр. 13.
9. *Рапопорт И. М.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, т. 59, № 8, 1948, 1403—1406.
10. *Крейн М. Г.* Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов. Успехи матем. наук, т. 13, вып. 5 (83), 1958, 3—118.
11. *Градштейн И. С.* и *Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.