ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 2, 1968 Механика

М. А. ЗАДОЯН

СМЕШАННОЕ ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ НЕЛИНЕЙНО-ПОЛЗУЧЕГО ТЕЛА И ЗАДАЧА ВЫПУЧИВАНИЯ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

В настоящей работе на основе идей Э. Рейснера [1] составляется вариационное уравнение нелинейно-ползучей среды [2, 3] (бетон, пластмасса, дерево, грунт), допускающее одновременное варьирование напряженного и деформированного состояния. Для сред ползучести, относящихся, главным образом, к металлам, смешанное вариационное уравнение ранее получено и применено в исследованиях [4, 5]. Для упруго-ползучего тела такое вариационное уравнение получено в нашей работе [6].

1. Зависимости между компонентами напряжения и деформации для рассматриваемой среды принимаем [2, 3, 7] в виде

$$2G\varepsilon_{xx}=\sigma_{xx}-\frac{3\nu}{1+\nu}\sigma-\int_{\tau_0}^{t}\left(\sigma_{xx}-\frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\right)\frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i}K(t,\tau)\,d\tau$$

$$G\varepsilon_{xy}=\sigma_{xy}-\int_{\tau_0}^{t}\sigma_{xy}\frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i}K(t,\tau)\,d\tau\qquad (x,\ y,\ z)\tag{1}$$

Здесь модуль упругости и коэффициент Пуассона ν для простоты приняты постоянными, $E=2(1+\nu)G$, $3\sigma=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}$, $K(t,\tau)=$ $=E\dfrac{\partial C(t,\tau)}{\partial\tau}$, $C(t,\tau)=\varphi(\tau)\left[1-\beta e^{-\gamma(t-\tau)}\right]$ — мера ползучести материала, σ_i — интенсивность касательных напряжений

$$\sigma_i=\frac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{(\sigma_x-\sigma_y)^2+(\sigma_y-\sigma_z)^2+(\sigma_z-\sigma_x)^2+6\left(\sigma_{xy}^2+\sigma_{yz}^2+\sigma_{xz}^2\right)}\tag{2}$$

В некоторых случаях закон нелинейности хорошо описывается степенными функциями [17, 18]

$$F(\sigma_i)=\alpha\sigma_i+\beta\sigma_i^m\tag{3}$$

где α, β, m — характеристики материала.

Для простоты объемные силы принимаем равными нулю, а относительные удлинения и сдвиги — малыми. Будем придерживаться обозначений книги [8]. Компоненты деформации выражаются через компоненты перемещения соотношениями

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \tag{4}$$

Остальные зависимости будут получены из (4) путем круговой перестановки u, v, w и x, y, z.

Аналогично [6, 7, 9] введем функцию

$$U(t, \tau) = \frac{1}{4G}\Big[\sigma_{xx}(t)\,\sigma_{xx}(\tau) + \sigma_{yy}(t)\,\sigma_{yy}(\tau) + \sigma_{zz}(t)\,\sigma_{zz}(\tau) -$$

$$- \frac{3\nu}{1+\nu}\,\sigma(t)\,\sigma(\tau)\Big] + \frac{1}{2G}\left[\sigma_{xy}(t)\,\sigma_{xy}(\tau) + \sigma_{yz}(t)\,\sigma_{yz}(\tau) + \sigma_{xz}(t)\,\sigma_{xz}(\tau)\right] \tag{5}$$

представляющую при $\tau = t$ удельную потенциальную энергию упругого материала.

Положим, что на части поверхности тела Ω_u заданы смещения $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$, а на другой части Ω_σ — напряжения $\bar{p}_\xi$, $\bar{p}_\eta$, $\bar{p}_\zeta$. Эти величины представляют собой удельную поверхностную нагрузку по неподвижным осям X, Y, Z. Через ξ, η, ζ обозначены координаты точек после деформации, x, y, z — начальные декартовы координаты, превращающиеся в криволинейную систему координат в ходе деформации.

Проекции поверхностных нагрузок выражаются через напряжения по формулам [8]

$$\begin{aligned}
p_\xi &= \sigma_{x\xi}\cos(n, X) + \sigma_{y\xi}\cos(n, Y) + \sigma_{z\xi}\cos(n, Z)\\
p_\eta &= \sigma_{x\eta}\cos(n, X) + \sigma_{y\eta}\cos(n, Y) + \sigma_{z\eta}\cos(n, Z)\\
p_\zeta &= \sigma_{x\zeta}\cos(n, X) + \sigma_{y\zeta}\cos(n, Y) + \sigma_{z\zeta}\cos(n, Z)
\end{aligned} \tag{6}$$

где $\sigma_{x\xi}$, $\sigma_{y\xi}, \cdots$ означают проекции напряжений на оси X, Y, Z и определяются формулами

$$\begin{aligned}
\sigma_{x\xi} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xx} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{xz}\\
\sigma_{y\xi} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xy} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{yy} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{yz}\\
\sigma_{z\xi} &= \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\sigma_{xz} + \frac{\partial u}{\partial y}\sigma_{yz} + \frac{\partial u}{\partial z}\sigma_{zz}
\end{aligned} \tag{7}$$

Остальные шесть соотношений получаются из (7) путем очевидной перестановки букв.

Пусть $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$ — истинное поле перемещения, $\varepsilon_{xx}(t)$, $\varepsilon_{xy}(t), \cdots$ — истинное распределение деформаций, а $\sigma_{xx}(t)$, $\sigma_{xy}(t), \cdots$ — действительное распределение напряжения. В некоторый момент t рассмотрим бесконечно малое статически возможное приращение перемещений $\delta u(t)$, $\delta v(t)$, $\delta w(t)$ и соответствующие приращения деформаций $\delta\varepsilon_{xx}(t)$, $\delta\varepsilon_{xy}(t), \cdots$

Одновременно с действительными напряжениями $\sigma_{xx}(t)$, $\sigma_{xy}(t), \cdots$ рассмотрим также бесконечно малое приращение напряжения $\delta\sigma_{xx}(t)$, $\delta\sigma_{xy}(t), \cdots$

Вариации, сообщаемые телу в момент t, не связаны с вариацией в какой-либо момент $t+dt$. Эти вариации не меняются во времени [10, 6, 7, 9], т. е. аргумент t при варьировании играет роль параметра.

Покажем, что вариационное уравнение

$$\delta\Big\{\iiint\limits_v \Big[\sigma_{xx}(t)\,\varepsilon_{xx}(t)+\cdots+\sigma_{xz}(t)\,\varepsilon_{xz}(t)-U(t,\,t)+$$

$$+2\int\limits_{\tau_0}^{t} U(t,\,\tau)\frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i}K(t,\,\tau)\,d\tau\Big]dv-\iint\limits_{\Omega_u}[p_{\xi}(u-\overline{u})+$$

$$+p_{\eta}(v-\overline{v})+p_{\zeta}(w-\overline{w})]\,d\Omega-\iint\limits_{\Omega_{\sigma}}[\overline{p}_{\xi}u+\overline{p}_{\eta}v+\overline{p}_{\zeta}w]\,d\Omega\Big\}=0 \qquad (8)$$

где напряжения и деформации варьируются одновременно и независимо, эквивалентно дифференциальному уравнению равновесия, соотношениям между компонентами деформации и напряжений и соответствующим граничным условиям.

Для краткости введем обозначения

$$\delta I(t)\equiv\iiint\limits_v[\sigma_{xx}(t)\,\delta\varepsilon_{xx}(t)+\cdots+\delta_{xz}(t)\,\delta\varepsilon_{xz}(t)]\,dv \qquad (9)$$

Используя преобразования типа

$$\iiint\limits_v \sigma_{xx}\delta\frac{\partial u}{\partial x}\,dv=\iiint\limits_v\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{xx}\delta u)\,dv-\iiint\limits_v\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}\,\delta u\,dv$$

$$\iiint\limits_v\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta\frac{\partial u}{\partial x}\,dv=\iiint\limits_v\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\,\delta u\right)dv-\iiint\limits_v\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\delta u\,dv \qquad (10)$$

получим

$$\delta I=\iiint\limits_v\Big\{\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_{x\xi}\delta u+\sigma_{x\eta}\delta v+\sigma_{x\zeta}\delta w)+\frac{\partial}{\partial y}(\sigma_{y\xi}\delta u+\sigma_{y\eta}\delta v+\sigma_{y\zeta}\delta w)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(\sigma_{z\xi}\delta u+\sigma_{z\eta}\delta v+\sigma_{z\zeta}\delta w)\Big\}dv-$$

$$
-\iiint_v \left\{\left[\frac{\partial \sigma_{x\xi}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{y\xi}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{z\xi}}{\partial z}\right]\delta u+\left[\frac{\partial \sigma_{x\eta}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{y\eta}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{z\eta}}{\partial z}\right]\delta v+\right.
$$

$$
\left.+\left[\frac{\partial \sigma_{x\zeta}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{y\zeta}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{z\zeta}}{\partial z}\right]\delta w\right\} dv \tag{11}
$$

Применив формулу Гаусса-Остроградского о преобразовании объемного интеграла в поверхностный, находим

$$
\delta I=\iint_{\Omega_2}[p_\xi \delta u+p_\eta \delta v+p_\zeta \delta w]\, d\Omega-\iiint_v \left\{\left[\frac{\partial \sigma_{x\xi}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{y\xi}}{\partial y}+\right.\right.
$$

$$
\left.\left.+\frac{\partial \sigma_{z\xi}}{\partial z}\right]\delta u+[\cdots]\delta v+[\cdots]\delta w\right\} dv \tag{12}
$$

Здесь использовано также условие, что на Ω_u заданы перемещения ($\delta u=\delta v=\delta w=0$).

Одновременно, варьируя напряжения и деформации в (8) и используя (12), будем иметь

$$
\iiint_v \left\{\left[\varepsilon_{xx}(t)-\frac{\partial U(t, t)}{\partial \sigma_{xx}(t)}+2\int_{\tau_0}^{t}\frac{\partial U(t, \tau)}{\partial \sigma_{xx}(t)}\frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i}K(t, \tau)\, d\tau\right]\delta\sigma_{xx}(t)+\cdots\right.
$$

$$
\left.\cdots+\left[\varepsilon_{xz}(t)-\frac{\partial U(t, t)}{\partial \sigma_{xz}(t)}+2\int_{\tau_0}^{t}\frac{\partial U(t, \tau)}{\partial \sigma_{xz}(t)}\frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i}K(t, \tau)\, d\tau\right]\delta\sigma_{xz}(t)\right\} dv-
$$

$$
-\iiint_v \left\{\left[\frac{\partial \sigma_{x\xi}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{y\xi}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{z\xi}}{\partial z}\right]\delta u+[\cdots]\delta v+[\cdots]\delta w\right\} dv+
$$

$$
+\iint_{\Omega_u}[(u-\bar{u})\,\delta p_\xi+(v-\bar{v})\,\delta p_\eta+(w-\bar{w})\,\delta p_\zeta]\, d\Omega-
$$

$$
-\iint_{\Omega_2}[(p_\xi-\bar{p}_\xi)\,\delta u+(p_\eta-\bar{p}_\eta)\,\delta v+(p_\zeta-\bar{p}_\zeta)\,\delta w]\, d\Omega=0 \tag{13}
$$

Поскольку вариации перемещения и вариации напряжения произвольны, отсюда следуют дифференциальные уравнения равновесия [8]

$$
\frac{\partial \sigma_{x\xi}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_{y\xi}}{\partial y}+\frac{\partial \sigma_{z\xi}}{\partial z}=0 \quad (\xi, \eta, \zeta) \tag{14}
$$

соотношения между напряжениями и деформациями

$$\varepsilon_{xx}(t) = \frac{\partial U(t,\ t)}{\partial \sigma_{xx}(t)} - 2\int\limits_{\tau_0}^{t} \frac{\partial U(t,\ \tau)}{\partial \sigma_{xx}(t)} \frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i} K(t,\ \tau)\, d\tau$$

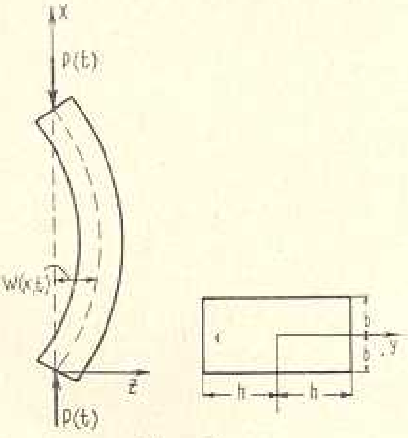
$$\varepsilon_{xy}(t) = \frac{\partial U(t,\ t)}{\partial \sigma_{xy}(t)} - 2\int\limits_{\tau_0}^{t} \frac{\partial U(t,\ \tau)}{\partial \sigma_{xy}(t)} \frac{F(\sigma_i)}{\sigma_i} K(t,\ \tau)\, d\tau \quad (x,\ y,\ z) \tag{15}$$

идентичные с зависимостями (1), и граничные условия

$$\begin{aligned} &u = \overline{u}, \quad v = \overline{v}, \quad w = \overline{w} \quad \text{на} \quad \Omega_u \\ &p_\xi = \overline{p}_\xi, \quad p_\eta = \overline{p}_\eta, \quad p_\zeta = \overline{p}_\zeta \quad \text{на} \quad \Omega_\sigma \end{aligned} \tag{16}$$

Для $F(\sigma_i) = \sigma_i$ и геометрически линейного случая аналогичное уравнение приведено в работе [6].

2. Рассмотрим задачу устойчивости призматического стержня (фиг. 1) из нелинейно-ползучего материала, описываемого соотношениями (I). Для линейно-ползучего материала наследственного типа задача устойчивости призматических стержней исследована в работах [11, 12]. Задача устойчивости металлических стержней в условиях ползучести исследована в работах [4, 13—16]. Подробное изложение этих вопросов приведено в монографии Ю. Н. Работнова [4].



Фиг. 1.

Для рассматриваемого материала при одномерном сжатии имеем

$$\varepsilon_*(t) = \frac{\sigma_*(t)}{E} - \int\limits_{\tau_0}^{t} F[\sigma_*(\tau)] \frac{\partial}{\partial \tau} C(t,\ \tau)\, d\tau \tag{17}$$

где

$$F(\sigma_*) = \alpha\sigma_* + \beta\sigma_*^m \tag{18}$$

Здесь σ_* является функцией как t, так и координат x, y.

Пусть стержень с шарнирно-закрепленными концами, имеющий в недеформированном состоянии начальное искривление $w_0(x)$, в момент $t = \tau_0$ сжимается продольными силами $P(t)$, которые меняются во времени по заданному закону. В момент $t = \tau_0$ возникает дополнительный прогиб, меняющийся во времени вследствие ползучести материала и изменения приложенной нагрузки. Полный прогиб в момент t обозначим через $w(x,\ t)$. Из условия закрепления концов стержня имеем

$$w(0,\ t) = w(l,\ t) = 0 \tag{19}$$

Условимся считать сжимающее напряжение положительным, а поперечное сечение, для простоты, положим прямоугольным. Из условия равновесия части стержня имеем

$$2b\int_{-h}^{h}\sigma_* dy = P, \qquad 2b\int_{-h}^{h}\sigma_* y dy = -Pw \tag{20}$$

Принимая гипотезу плоских сечений, будем иметь

$$\varepsilon_* = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}\right) y \tag{21}$$

где „u" — продольное перемещение, зависящее от x и t. Для нашей задачи функцией (4) будет

$$U(t, \tau) = \frac{\sigma_*(t)\,\sigma_*(\tau)}{2E} \tag{22}$$

а вариационным уравнением (8) —

$$\delta\int_0^l\int_{-h}^{h}\left\{\varepsilon_*(t)\,\sigma_*(\tau) - \frac{\sigma_*^2(t)}{2E} + \int_{\tau_0}^{t}\sigma_*(t)\,F[\sigma_*(\tau)]\,K(t, \tau)\,d\tau\right\}dxdy -$$

$$- \frac{P(t)}{2b}\,\delta u(l, t) = 0 \tag{23}$$

Здесь принято $u(0, t) = 0$. Сближение концов стержня будет [14]

$$u(l, t) = \frac{1}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x}\right)^2\right]dx \tag{24}$$

Варьируя в (23) напряжение и деформацию независимо, получим

$$\int_0^l\int_{-h}^{h}\Big[\sigma_*(t)\,\delta\varepsilon_*(t) + \varepsilon_*(t)\,\delta\sigma_*(t) - \frac{\sigma_*(t)}{E}\,\delta\sigma_*(t) +$$

$$+ \int_{\tau_0}^{t}F(\sigma_*)\,\varepsilon_*(\tau)\,\delta\sigma_*(t)\,K(t, \tau)\,d\tau\Big]\,dxdy - \frac{P(t)}{2b}\int_0^l\frac{\partial w}{\partial x}\,\delta\frac{\partial w}{\partial x}\,dx = 0 \tag{25}$$

За начальное искривление стержня примем

$$w_0(x) = \omega_0 \sin\frac{\pi x}{l} \tag{26}$$

где ω_0 — некоторая постоянная. Ищем прогиб с одной неизвестной функцией в виде

$$w(x, t) = f(t)\,w(x, \tau_0), \qquad w(x, \tau_0) = \omega_1 \sin\frac{\pi x}{l} \tag{27}$$

причем $\omega_1 = \omega_0/1 - \mu$, $\mu = \sigma_0/\sigma_э$, $\sigma_0 = P(\tau_0)/F$, $F = 4bh$, $\sigma_э = P_э/F$, $P_э = \pi^2 EI/l^2$ (эйлерова сила), $I = 4bh^3/3$ — момент инерции поперечного сечения относительно нейтральной оси, $f(t)$ — искомая функция от t, причем $f(\tau_0) = 1$.

Следуя В. И. Розенблюму [13], примем, что напряжения меняются по сечению по линейному закону

$$\sigma_*(x, y, t) = A(x, t) + B(x, t)y \tag{28}$$

Используя условия равновесия (20) и вводя обозначения

$$\omega = \frac{3\omega_0}{h}, \qquad \sigma(t) = \frac{P(t)}{F} \tag{29}$$

для напряжения получим выражение с одной неизвестной функцией от времени $f(t)$

$$\sigma_*(x, y, t) = \sigma(t)\left\{1 - \frac{\omega}{1-\mu}\frac{y}{h}\sin\frac{\pi x}{l}f(t)\right\} \tag{30}$$

Для целых m имеем

$$\sigma_*^m(x, y, t) = \sigma^m(\tau) + \sigma^m(t)\sum_{k=1}^{m}(-1)^k C_m^k\left(\frac{\omega}{1-\mu}\right)^k\left(\frac{y}{h}\right)^k f^k(t)\sin^k\frac{\pi x}{l} \tag{31}$$

Подставляя (21) и (30) в уравнение (25), учитывая при интегрировании соотношения (26), (27), (31) и приравнивая нулю общий множитель $\delta f(t)$, приходим к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$[\sigma_э - \sigma(t)]f(t) = \sigma_э - \sigma_0 - \int_{\tau_0}^{t}[\alpha\sigma(\tau)f(\tau) + \beta\sigma^m(\tau)\Psi[f(\tau)]]K(t, \tau)d\tau \tag{32}$$

где обозначено

$$\Psi(f) = \frac{6}{\pi}\sum_{k=1,3\dots}^{m} C_m^k\left(\frac{\omega}{1-\mu}\right)^k\frac{a_k f^k}{k+2} \tag{33}$$

Здесь $a_k = \int_0^{\pi}\sin^{k+1}x\,dx$. Для стареющих материалов $\varphi(\tau_0) = C_0$, $K(t,\tau) = -\lambda e^{-\gamma(t-\tau)}$, $\tau_0 = 0$, $\lambda = EC_0\beta\gamma$. Тогда (32) приводится к дифференциальному уравнению первого порядка

$$[\sigma_э - \sigma(t)]\frac{df}{dt} = \gamma[\sigma_э - \sigma(t)] + \{\sigma'(t) + \lambda\alpha\sigma(t) - \gamma[\sigma_э - \sigma(t)]\}f(t) +$$
$$+ \beta\lambda\sigma^m(t)\Psi[f(t)] \tag{34}$$

с начальным условием $f(\tau_0) = 1$.

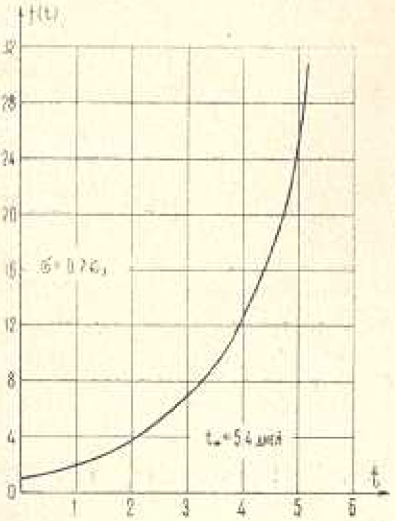
В случае $\sigma(t) = \mathrm{const} = \sigma_0$ имеем

$$t=\int\limits_{1}^{f}\frac{dz}{\gamma+\left(\frac{\lambda\alpha\mu}{1-\mu}-\gamma\right)z+\frac{\beta\lambda\sigma_0^{m-1}\mu^m}{1-\mu}\Psi(z)} \tag{35}$$

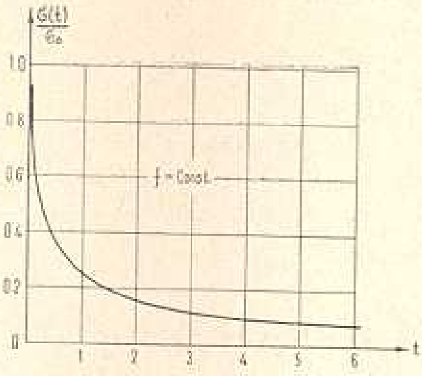
Легко заметить, что при безграничном возрастании f интеграл (35) остается конечным. Тогда критическое время t_*, т. е. срок службы стержня, будет

$$t_*=\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dz}{\gamma+\left(\frac{\lambda\alpha\mu}{1-\mu}-\gamma\right)z+\frac{\beta\lambda\sigma_0^{m-1}\mu^m}{1-\mu}\Psi(z)} \tag{36}$$

Можно поставить обратную задачу. Определить закон изменения $\sigma(t)$, при котором прогиб стержня остается постоянным во времени: $w(x, t) = w(x, \tau_0)$.



Фиг. 2.



Фуг. 3.

Принимая в (34) $f(t)=f(\tau_0)=1$, получим

$$t=\int\limits_{1}^{\sigma/\sigma_0}\frac{dz}{\gamma-(\gamma+\lambda\alpha)z-\beta\lambda\Psi(1)\sigma_0^{m-1}z^m} \tag{37}$$

Для численного примера примем [17] $E=1.68\cdot10^5\ \frac{кг}{см^2}$, $C_0=0.28\cdot10^{-5}\frac{см^2}{кг}$, $\gamma=0.03$ 1/день, $\alpha=0.999$, $\beta=5\cdot10^{-6}\frac{см^3}{кг^4}$, $m=4$, $\sigma_s=140\ \frac{кг}{см^2}$, $\sigma_0=0.7\,\sigma_s$. На основании расчета, произведенного на вычислительной машине „Наири", на фиг. 2, 3 построены графики $f(t)$ и $\sigma(t)/\sigma_0$ по формулам (35)—(37).

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 4 V 1967

Մ. Ա. ԶԱԴՈՅԱՆ

ՈՉ-ԳԾԱՅԻՆ ՍՈՂՔՈՎ ՕԺՏՎԱԾ ՄԱՐՄՆԻ ԽԱՌԸ ՎԱՐԻԱՑԻՈՆ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄԸ ԵՎ ՊՐԻԶՄԱՏԻԿ ՁՈՂԻ ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅԱՆ ԽՆԴԻՐԸ

Ամփոփում

Հիմնվելով Է. Ռեյսների գաղափարի վրա, ձևակերպված է Մասլով-Հարությունյանի ոչ-գծային սողքի միջավայրի խառը վարիացիոն հավասարումը, որը թույլ է տալիս միաժամանակ փոփոխարկել լարվածային և դեֆորմացիոն վիճակները: Որպես կիրառություն, քննարկված է ոչ-գծային սողքով օժտված պրիզմատիկ ձողի կայունության խնդիրը: Լարումները և դեֆորմացիաները ընդունված են գծային, իսկ ճկվածքները տրված են սինուսի օրենքով՝ ժամանակից կախված անհայտ ամպլիտուդայով:

Խնդիրը բերված է Վոլտերի տիպի ոչ-գծային ինտեգրալ հավասարման, որի լուծումը տրված է քառակուսման տեսքով:

M. A. ZADOYAN

MIXED VARIATIONAL EQUATIONS OF NON-LINEAR CREEPING BODY AND THE PROBLEM OF STABLE PRISMATIC BARS

Summary

On the foundation of Reissner's idea the variational equations for the theory of non-linear creep of Masslov-Aroutyounian are obtained.

The problem of stability of prismatic bars of non-linaer creep materials is investigated. The strains and deformations are assumed linear, the displacements are given by the law of Sinus.

The problem of non-linear integral equations of Walter type is received.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Рейснер Э.* О некоторых вариационных теоремах теории упругости. Проблемы механики сплошной среды (к семидесятилетию акад. Н. И. Мусхелишвили). Изд. АН СССР, М., 1961.
2. *Арутюнян Н. Х.* Некоторые вопросы теории ползучести, М., 1952.
3. *Александрян Р. А., Арутюнян Н. Х., Манукян М. М.* Кручение тонкостенных стержней замкнутого профиля в условиях неустановившейся ползучести. ПММ, т. 22, 1958.
4. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. Изд. „Наука“, М., 1966.
5. *Sanders J. L., Mc Comb H. G., Schlechte F. R.* A variational theorem for creep with applications to plates and columns, NAÇA, Rep. № 1342, 1957.
6. *Задоян М. А.* О вариационных уравнениях теории ползучести. Докл. АН Арм. ССР, т. 26, № 5, 1958.
7. *Задоян М. А.* Об одном вариационном уравнении нелинейной теории ползучести. Докл. АН АрмССР, т. 27, № 5, 1958.

8. *Новожилов В. В.* Теория упругости. Судпромгиз, 1958.
9. *Задоян М. А.* Ползучесть призматических составных стержней при стесненном кручении. Изв. АН СССР, ОТН, мех. и машин., № 1, 1959.
10. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. Физматгиз, М., 1960.
11. *Бунятян Л. А.* Устойчивость тонкостенных стержней с учетом ползучести материала. Изв. АН АрмССР, сер.физ.-мат., естеств. и техн. наук, т. 6, № 2, 1953.
12. *Ржаницын А. Р.* Устойчивость при ползучести. Проблемы устойчивости в строительной механике. Труды Всесоюзн. конференц. по проблемам устойчивости. Изд. лит. по стр-ву, М., 1965.
13. *Розенблюм В. И.* Устойчивость сжатого стержня в условиях ползучести. Инж. сб., т. 8, 1954.
14. *Хофф Н.* Продольный изгиб и устойчивость. ИЛ, 1955.
15. *Работнов Ю. Н.* и *Шестериков С. А.* Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, т. 21, вып. 3, 1957.
16. *Вольмир А. С.* Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
17. *Карапетян К. С.* Влияние старения бетона на зависимость между напряжениями и деформациями ползучести. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. 12, № 4, 1959.
18. *Васильев П. И.* Некоторые вопросы пластических деформаций бетона. Изв. ВНИИГ, т. 49, 1953.