

Г. А. МОВСИСЯН

## ОБ ОДНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Рассматривается круговая замкнутая цилиндрическая оболочка средней длины, которая сжимается  $m$  одинаковыми жесткими штампами, приложенными на каждом из торцов.

Различные контактные задачи для полу- и четверть-плоскостей, для сферы и т. д. решались довольно много. Для цилиндрической оболочки, насколько нам известно, подобная задача ранее не исследовалась.

1. Пусть имеется круговая замкнутая цилиндрическая оболочка средней длины  $2l$ , толщины  $h$  и радиуса кривизны  $r$ . В качестве координатных параметров берутся отношение истинной длины дуги образующей к радиусу оболочки ( $\alpha$ ) и центральный угол, отсчитываемый от некоторой образующей ( $\beta$ ).

Начало координат расположено на середине длины оболочки. На каждом из торцов оболочки действуют  $m$  одинаковых, симметрично расположенных штампов. Оболочка сжимается силой  $P$ , которая передается через штампы. Предполагается, что участки торцов между штампами свободны от нормальных усилий, и вместе с тем торцы в окружном направлении не смещаются.

Из теории цилиндрических оболочек средней длины [1, 3] известно, что расчет такой оболочки сводится к определению некоторой потенциальной функции  $\Phi$ , которая удовлетворяет дифференциальному уравнению [2]

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial \alpha^4} + c^2 \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \beta^6} = 0, \quad \text{где} \quad c^2 = \frac{h^2}{12r^2(1 - \nu^2)} \quad (1.1)$$

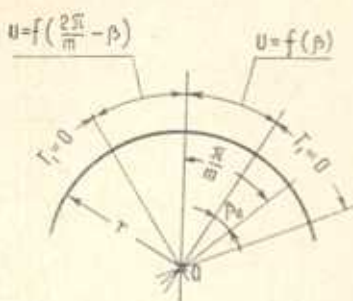
и граничным условиям, наложенным на  $T_1$ ,  $u$  и  $v$  на торцах  $\alpha = \pm \frac{l}{r}$ .

Последние выражаются через  $\Phi$  следующим образом:

$$T_1 = -\frac{Eh}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha^3 \partial \beta^2}, \quad u = -\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \alpha \partial \beta^2}, \quad v = \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \beta^3} \quad (1.2)$$

Так как штампы и расстояния между ними одинаковые, то мы рассмотрим часть оболочки, находящуюся между серединой свободной от нормальных усилий части до оси симметрии штампа (фиг. 1).

По предположению, условия (1.2) для рассматриваемого сектора будут иметь вид



Фиг. 1.

$$v = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{m}$$

$$T_1 = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \beta < \beta_0, \quad \alpha = \frac{l}{r} \quad (1.3)$$

$$u = f(\beta) \quad \text{при} \quad \beta_0 < \beta \leq \frac{\pi}{m}$$

Относительно функции  $f(\beta)$  достаточно предположить, что она кусочно-гладкая.

2. Как видно из (1.3) и из фиг. 1, деформированное состояние оболочки симметрично относительно  $\beta = 0$  и  $\beta = \frac{\pi}{m}$ , поэтому ищем решение (1.1) в виде

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} F_n(\alpha) \cos mn\beta \quad \left( 0 \leq \beta < \frac{\pi}{m} \right) \quad (2.1)$$

Подставляя (2.1) в (1.1), для неизвестных  $F_n(\alpha)$  получим

$$F_n^{IV} + 4\nu_n^4 F_n = 0, \quad \text{где} \quad \nu_n = (mn)^2 \sqrt{\frac{c}{2}} \quad (2.2)$$

По предположению, на торцах имеем одинаковые условия (симметричные относительно  $\alpha = 0$ ), поэтому для  $F_n$  из (2.2) берем только четные решения.

Следовательно, для  $\Phi$  будем иметь

$$\Phi = C_0^{(1)} + C_0^{(2)} \alpha^2 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n^{(1)} \sin \nu_n \alpha \operatorname{sh} \nu_n \alpha + C_n^{(2)} \cos \nu_n \alpha \operatorname{ch} \nu_n \alpha] \cos mn\beta \quad (2.3)$$

Вычисляя  $u$ ,  $v$  и  $T_1$  по формулам (1.2) и удовлетворяя условиям (1.3), получим

$$\left. \begin{aligned} C_0^{(1)} + \frac{2r(1+\nu)}{Eh} C_0^{(2)} \frac{l}{r} &= 0 \\ C_n^{(1)} \sin \nu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh} \nu_n \frac{l}{r} + C_n^{(2)} \cos \nu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \nu_n \frac{l}{r} &= 0 \end{aligned} \right\} 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{m} \quad (2.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n^2 (mn)^2 \left[ C_n^{(1)} \cos \nu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \nu_n \frac{l}{r} - C_n^{(2)} \sin \nu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh} \nu_n \frac{l}{r} \right] \cos mn\beta = 0 \quad (2.5)$$

$$(0 \leq \beta < \beta_0)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \nu_n (mn)^2 \left[ C_n^{(1)} \left( \cos \nu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh} \nu_n \frac{l}{r} + \sin \nu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \nu_n \frac{l}{r} \right) + \right.$$

$$+ C_n^{(2)} \left( \cos \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh} \mu_n \frac{l}{r} - \sin \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \mu_n \frac{l}{r} \right) \Big] \cos mn\beta = f(\beta) \quad (2.6)$$

$$\left( \beta_0 < \beta < \frac{\pi}{m} \right)$$

При составлении выражения для  $v$  в соответствии с [2] учитывалось, что к выражению  $v$  в (1.2) нужно прибавить составляющую

$$v_0 = C_0^{(1)} + \frac{2r(1+\nu)}{Eh} C_0^{(2)} \alpha \quad (2.7)$$

Не нарушая общности, можно считать, что жесткое смещение оболочки отсутствует  $C_0^{(1)} = 0$ , откуда и из (2.4)  $C_0^{(2)} = 0$ .

Дифференцируя (2.6) дважды по  $\beta$ , получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n (mn)^4 \left[ C_n^{(1)} \left( \cos \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh} \mu_n \frac{l}{r} + \sin \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \mu_n \frac{l}{r} \right) + \right.$$

$$\left. + C_n^{(2)} \left( \cos \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh} \mu_n \frac{l}{r} - \sin \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \mu_n \frac{l}{r} \right) \right] \cos mn\beta = -f''(\beta) \quad (2.8)$$

Введя обозначение

$$X_n = (mn)^2 \mu_n^2 C_n^{(1)} \frac{\cos^2 \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch}^2 \mu_n \frac{l}{r} + \sin^2 \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh}^2 \mu_n \frac{l}{r}}{\cos \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \mu_n \frac{l}{r}} \quad (2.9)$$

из (2.4), (2.5), (2.8) и (2.9) получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos mn\beta = 0 \quad (0 \leq \beta < \beta_0) \quad (2.10)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\sin 2\mu_n \frac{l}{r} + \operatorname{sh} 2\mu_n \frac{l}{r}}{\operatorname{ch} 2\mu_n \frac{l}{r} + \cos 2\mu_n \frac{l}{r}} \cos mn\beta = -\sqrt{\frac{c}{2}} f''(\beta) \quad \left( \beta_0 < \beta < \frac{\pi}{m} \right)$$

Систему можно записать еще в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos mn\beta = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \beta < \beta_0 \\ -\sqrt{\frac{c}{2}} f''(\beta) + \sum_{n=1}^{\infty} d_n X_n \cos mn\beta & \text{при } \beta_0 < \beta < \frac{\pi}{m} \end{cases} \quad (2.11)$$

где

$$d_n = \frac{\operatorname{ch} 2\mu_n \frac{l}{r} + \cos 2\mu_n \frac{l}{r} - \operatorname{sh} 2\mu_n \frac{l}{r} - \sin 2\mu_n \frac{l}{r}}{\operatorname{ch} 2\mu_n \frac{l}{r} + \cos 2\mu_n \frac{l}{r}} \quad (2.12)$$

Решение парной системы (2.11) можно свести к решению бесконечной системы алгебраических уравнений. Для этого необходимо обе части (2.11) умножить на  $\cos mk\beta$  и проинтегрировать от 0 до  $\pi/m$ , после чего получим

$$X_k = h_k + \sum_{n=1}^{\infty} g_{kn} X_n \quad (2.13)$$

где

$$h_k = -\sqrt{\frac{c}{2}} \int_{\beta_0}^{\pi/m} f''(\beta) \cos mk\beta d\beta$$

$$g_{kn} = \frac{d_n}{m} \frac{k \sin km\beta_0 \cos mn\beta_0 - n \sin mn\beta_0 \cos km\beta_0}{n^2 - k^2}, \quad k \neq n \quad (2.14)$$

$$g_{kk} = \frac{d_k}{2} \left( \frac{\pi}{m} - \beta_0 \right) - \frac{d_k}{4mk} \sin 2mk\beta_0$$

Как видно из (2.12) и (2.14), система (2.13) будет, по крайней мере, квази-вполне регулярной, так как сумма модулей коэффициентов при неизвестных  $X_n$  с возрастанием  $k$  убывает и при  $k \rightarrow \infty$

$\sum_{n=1}^{\infty} |g_{kn}| \rightarrow 0$ , а свободные члены убывают как  $0\left(\frac{1}{k}\right)$ . Следовательно [4], из системы (2.13) можно определить неизвестные  $X_n$  с любой точностью.

Таким образом, расчет напряженно-деформированного состояния цилиндрической оболочки, сжимаемой  $m$  штампами, сводится к решению квази-вполне регулярной бесконечной системы (2.13).

Сжимающая сила  $P$  найдется как сумма нормальных усилий  $T_1$  (умноженных на  $h$ ) под штампами.

3. В качестве численного примера рассматривается сжатие цилиндрической оболочки тремя штампами  $m=3$ . Для геометрических размеров взяты следующие отношения  $\frac{l}{r} = 5$ ,  $\frac{h}{r} = \frac{1}{50}$  и  $\beta_0 = \frac{\pi}{6}$ .

Коэффициент Пуассона ( $\nu$ ) равен 0.3. Функция от  $\beta$ , характеризующая смещение под штампом, взята в виде параболы

$$f(\beta) = a\beta^2 \quad (3.1)$$

Формула для усилия  $T_1$  из (1.2) на основании (2.3), (2.4), (2.9) имеет вид

$$T_1 = \frac{2Eh}{r} \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\cos \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \mu_n \frac{l}{r}}{\cos^2 \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch}^2 \mu_n \frac{l}{r} + \sin^2 \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh}^2 \mu_n \frac{l}{r}} \times$$

$$\times \left( \cos \mu_n \alpha \operatorname{ch} \mu_n \alpha + \frac{\sin \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh} \mu_n \frac{l}{r}}{\cos \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \mu_n \frac{l}{r}} \sin \mu_n \alpha \operatorname{sh} \mu_n \alpha \right) \cos m n \beta. \quad (3.2)$$

В табл. 1 приведены некоторые значения  $\frac{T_1}{Ea} \cdot 10^3$  для различных  $\alpha$  и  $\beta$ .

Таблица 1

$\alpha \backslash \beta$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$
0	-112,8	-210,5	0
$l/r$	9,762	-7,211	0

По [2] прогиб имеет вид

$$W = \frac{\partial^4 \Phi}{\partial \beta^4} \quad (3.3)$$

или на основании (2.3), (2.4) и (2.9)

$$W = \frac{2}{c} \sum_{n=1}^{\infty} X_n \frac{\cos \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \mu_n \frac{l}{r}}{\cos^2 \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch}^2 \mu_n \frac{l}{r} + \sin^2 \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh}^2 \mu_n \frac{l}{r}} \times$$

$$\times \left( \sin \mu_n \alpha \operatorname{sh} \mu_n \alpha - \frac{\sin \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{sh} \mu_n \frac{l}{r}}{\cos \mu_n \frac{l}{r} \operatorname{ch} \mu_n \frac{l}{r}} \cos \mu_n \alpha \operatorname{ch} \mu_n \alpha \right) \cos m n \beta. \quad (3.4)$$

В табл. 2 приведены некоторые значения  $W/a$  для различных  $\alpha$  и  $\beta$ .

Таблица 2

$\alpha \backslash \beta$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$
0	-7,480	-5,293	0
$0,6 l/r$	-2,841	4,427	0
$l/r$	0	0	0

Как видно из табл. 2, прогибы на торцах оболочки под штампами равны нулю и возрастают по абсолютной величине при приближении к середине длины оболочки.

Գ. Ա. ՄՈՎՍԻՅԱՆ

## ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ ՄԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԿՆՏՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ա փ ո ս մ

Աշխատանքում դիտարկվում է կլոր, միջին երկարության զլանային թաղանթ, որը սեղմվում է երկու կլորերից ու հաս միատեսակ, կոշտ և սիմետրիկ դասափորված զրոշմերով: Ընդունվում է, որ զրոշմերի միջև ընկած մասերը ազատ են նորմալ լարումներից և միաժամանակ կանխված է եզրերի շարժումը շրջանային աղղոթվածք:

Մնորի լուծումը բերվում է (1.1) հավասարման լուծմանը (1.3) եզրային պայմաններով: Լուծումը փնտրվում է (2.1) տեսքով: Ընտանգրման հաստատունների համար ստացվում է (2.11) շարքերի զույգ սիստեմը, որը բերվում է (2.13) քվադր-իբովին սեղուլյար անվերջ սիստեմին:

G. A. MOVSISIAN

## THE CONTACT PROBLEM OF A CYLINDRICAL SHELL

S u m m a r y

A round medium length cylindrical shell which is pressed on both ends by identical  $m$ , rigid and symmetrical punches is examined in this paper.

It is assumed that the surface between the punches is free of normal stresses and at the same time a movement along the circle cannot take place. The solution of the problem is brought about by solving the equation (1.1) with (1.3) boundary conditions. The solution is sought in the form (2.1).

For constant integration dual series-equation are obtained which are reduced to quasi-regular infinite systems.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Власов В. Э. Общая теория оболочек. Гостехиздат, М.-Л., 1949.
2. Гольдсвейзер А. А. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
3. Новожилов В. В. Теория тонких оболочек. Судпромгиз, Л., 1962.
4. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, М.-Л., 1962.