ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 2, 1968 Механика

Э. В. БЕЛУБЕКЯН

ИЗГИБ СВОБОДНО ОПЕРТОЙ ПО КОНТУРУ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ С СИММЕТРИЧНЫМ РАЗРЕЗОМ

В работе рассматривается задача поперечного изгиба прямоугольной свободно опертой по контуру пластинки с разрезом, расположенным вдоль одной из осей симметрии прямоугольника симметрично относительно другой оси, под действием симметричной нагрузки.

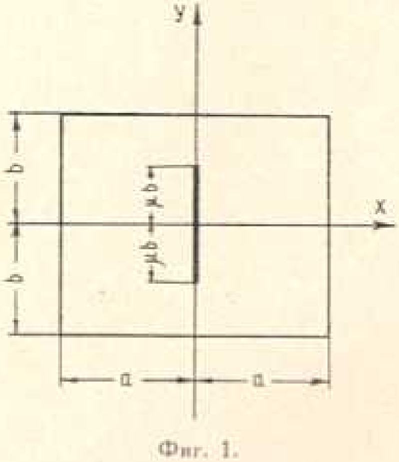
При решении задачи применен метод дополнительных воздействий, разработанный в работе [1].

Задача сведена к решению „парных рядов", неизвестные коэффициенты которых определяются из вполне регулярной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Приведены численные расчеты для случаев изгиба квадратной и бесконечной пластин с разрезом длины, равной половине ширины пластинки, под действием равномерно распределенной нагрузки.

Задача об изгибе прямоугольной пластинки с разрезом, идущим от кромки до половины одной из осей пластинки исследовалась в работе [2].

1. Рассматривается симметричная относительно осей x и y пластинка шириной $2b$, длиной $2a$ с разрезом по оси y длины $2\mu b$ $(0 < \mu < 1)$, симметричным относительно оси x (фиг. 1).



Фиг. 1.

Задача сводится к определению прогибов w пластинки, удовлетворяющих в ее области дифференциальному уравнению упругой поверхности пластинки

$$\Delta\Delta w = \frac{p}{D} \tag{1.1}$$

и следующим граничным условиям:

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b \tag{1.2}$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad -\mu b < y < \mu b \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\sigma)\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \qquad -\mu b < y < \mu b \tag{1.5}$$

Для простоты принимается, что функция, выражающая распределение нагрузки, зависит только от y и разлагается в ряд Фурье

$$p = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \lambda_k y, \quad a_k = \frac{2}{b}\int_0^b p \cos \lambda_k y \, dy \tag{1.6}$$

Согласно [1], с учетом симметричности задачи относительно осей x и y, функция прогиба w представляется в виде

$$w = f(y) + \frac{1}{D}\sum_1^{\infty} (A_k \operatorname{ch} \lambda_k x + B_k x \operatorname{sh} \lambda_k x) \cos \lambda_k y \pm$$

$$\pm \frac{1}{D}\sum_1^{\infty} \frac{\alpha_k}{4\lambda_k}\left[(1+\sigma)\operatorname{sh}\lambda_k x + (1-\sigma)\lambda_k x \operatorname{ch}\lambda_k x\right]\cos\lambda_k y \tag{1.7}$$

где $f(y)$ — частное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.2)

$$f(y) = \frac{16b^4}{\pi^4 D}\sum_1^{\infty} \frac{a_k}{k^4}\cos\lambda_k y \tag{1.8}$$

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{2b}, \qquad k = 1,\ 3,\ 5 \cdots$$

σ — коэффициент Пуассона, D — жесткость пластинки, A_k, B_k, α_k — постоянные коэффициенты, подлежащие определению.

В выражении (1.7) знак плюс перед второй суммой относится к области $x > 0$, а минус — к области $x < 0$.

Нетрудно убедиться, что выражение (1.7) на линии $x = 0$ для угла наклона $\dfrac{\partial w}{\partial x}$ имеет разрыв $\sum\limits_1^{\infty} \alpha_k \cos \lambda_k y$.

Следовательно, функция w должна удовлетворять еще условию непрерывности угла наклона на неразрезанной части линии $x=0$, т. е.

$$\sum_{1}^{\infty} \alpha_k \cos \lambda_k y = 0 \quad \text{при} \quad -b < y < -\mu b \quad \text{и} \quad \mu b < y < b \tag{1.9}$$

Таким образом, для определения коэффициентов A_k, B_k, α_k имеются условия (1.2), (1.3), (1.4), (1.5) и (1.9). Условия (1.2) и (1.5) удовлетворяются тождественно. Удовлетворяя граничным условиям (1.3), получаем выражения для определения коэффициентов A_k и B_k

$$A_k = -\frac{16\, b^4 a_k}{\pi^4 k^4 \operatorname{ch} \lambda_k a}\left(1 + \frac{\lambda_k a}{2} \operatorname{th} \lambda_k a\right) -$$

$$-\alpha_k\left[\frac{1+\sigma}{4\lambda_k} \operatorname{th} \lambda_k a + \frac{1-\sigma}{4} \frac{a}{\operatorname{ch}^2 \lambda_k a}\right] \tag{1.10}$$

$$B_k = \frac{a_k}{2\lambda_k^3 \operatorname{ch} \lambda_k a} - \frac{1-\sigma}{4} \alpha_k \operatorname{th} \lambda_k a \tag{1.11}$$

Из условий (1.4) и (1.9) для определения коэффициентов α_k получаются следующие „парные ряды":

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)(1-N_k) \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi = g(\varphi) \quad (0 < \varphi < \beta)$$

$$\sum_{0}^{\infty} \alpha_{2k+1} \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi = 0 \quad (\beta < \varphi < \pi) \tag{1.12}$$

где

$$\varphi = \frac{\pi y}{b}, \quad \beta = \mu\pi \tag{1.13}$$

$$N_k = \frac{1 + e^{-2\lambda_{2k+1} a} - 2\gamma\lambda_{2k+1} a}{2 \operatorname{ch}^2 \lambda_{2k+1} a}, \qquad \gamma = \frac{1-\sigma}{3+\sigma} \tag{1.14}$$

$$g(\varphi) = \sum_{0}^{\infty} C_k \cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi \tag{1.15}$$

$$C_k = -\frac{16 b^3}{\pi^3 (1-\sigma)(3+\sigma)}\left\{\frac{\sigma a_{2k+1}}{(2k+1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)^2 \operatorname{ch} \lambda_{2k+1} a}\left[\frac{\pi(2k+1)a}{4b}(1-\sigma) \operatorname{th} \lambda_{2k+1} a - \sigma\right]\right\} \tag{1.16}$$

Определив коэффициенты α_k из системы (1.12), можно найти значения коэффициентов A_k и B_k по выражениям (1.10) и (1.11).

Следовательно, задача сводится к решению парных рядов-уравнений (1.12).

2. Приведем решение системы (1.12) к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений, пользуясь методом, разработанным в работе [3].

Продифференцировав второе из уравнений (1.12) по φ, запишем систему (1.12) в виде

$$\sum_0^\infty \alpha_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi =$$

$$=\sum_0^\infty \alpha_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)N_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi+g(\varphi)\qquad (0<\varphi<\beta)$$

$$\sum_0^\infty \alpha_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi=0\qquad (\beta<\varphi<\pi) \tag{2.1}$$

Первое уравнение системы (2.1) умножим на $\frac{\sqrt{2}}{\pi}(\cos\varphi-\cos\theta)^{-1/2}$ и проинтегрируем по φ от 0 до θ, а второе уравнение умножим на $\frac{\sqrt{2}}{\pi}(\cos\theta-\cos\varphi)^{-1/2}$ и проинтегрируем по φ от θ до π.

Используя при этом (1.15) и формулы интегрального представления полиномов Лежандра [4]

$$P_k(\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^\theta \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi d\varphi}{(\cos\theta-\cos\varphi)^{1/2}}$$

$$P_k(\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_\theta^\pi \frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi d\varphi}{(\cos\varphi-\cos\theta)^{1/2}} \tag{2.2}$$

получим

$$\sum_0^\infty\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_{2k+1}P_k(\cos\theta)=\sum_0^\infty\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_{2k+1}N_kP_k(\cos\theta)+$$

$$+\sum_0^\infty C_kP_k(\cos\theta),\qquad (0<\theta<\beta) \tag{2.3}$$

$$\sum_0^\infty\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_{2k+1}P_k(\cos\theta)=0,\quad (\beta<\theta<\pi)$$

Далее, умножаем оба уравнения системы (2.3) на $P_n(\cos\theta)\sin\theta d\theta$ и интегрируем их по θ: первое уравнение в пределах от 0 до β, а второе — от β до π. Складывая полученные уравнения, для определения коэффициентов α_{2k+1} приходим к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\alpha_{2n+1} = \sum_0^\infty a_{kn} \alpha_{2k+1} + b_n \tag{2.4}$$

где

$$a_{kn} = \left(k + \frac{1}{2}\right) N_k J_{kn} \tag{2.5}$$

$$b_n = \sum_0^\infty C_k J_{kn} \tag{2.6}$$

$$J_{kn} = \int_0^\beta P_k(\cos\theta)\, P_n(\cos\theta) \sin\theta d\theta \tag{2.7}$$

Из [5] имеем
при $k \neq n$

$$J_{kn} = \frac{1}{(k-n)(k+n+1)} (1 - \cos^2\beta)[P_k'(\cos\beta)\, P_n(\cos\beta) - - P_n'(\cos\beta)\, P_k(\cos\beta)] \tag{2.8}$$

при $k = n$

$$J_{kn} = \frac{1}{2n+1} [1 - \cos\beta P_n^2(\cos\beta)] + + \frac{2(n-1)}{(2n-1)(2n+1)} P_n(\cos\beta)\, P_{n-1}(\cos\beta) - - 2\left[\frac{P_{n-1}(\cos\beta)\, P_{n-2}(\cos\beta)}{(2n-1)(2n-3)} + \dots + \frac{P_1 P_0}{3 \cdot 1}\right] \tag{2.9}$$

3. Исследуем бесконечную систему (2.4).

Оценим сумму модулей коэффициентов при α_{2k+1}.

$$S_n = \sum_0^\infty |a_{kn}| = \left(n + \frac{1}{2}\right) |N_n|\, |J_{nn}| + \sum_{\substack{0 \\ k \neq n}}^\infty \left(k + \frac{1}{2}\right) |N_k|\, |J_{kn}| \tag{3.1}$$

Приняв согласно [4] $|P_n(\cos\beta)| < 1$, можно получить для $|J_{kn}|$ из выражений (2.8) и (2.9) следующие оценки:

$$|J_{kn}| < \frac{2(k+n)}{|k-n|(k+n+1)} < 2 \quad \text{при} \quad k \neq n \tag{3.2}$$

$$|J_{kn}| < \frac{1}{2n+1} \qquad \text{при} \quad k = n \tag{3.3}$$

Из выражения (1.14) при $a \geqslant b$ для $|N_k|$ получим следующую оценку:

$$|N_k| \leqslant \frac{2\left[1+e^{-(2k+1)\pi}+\frac{1}{3}\pi(2k+1)\right]}{e^{(2k+1)\pi}}$$

Учитывая (3.1), (3.2) и (3.3), оценим S_n

$$|S_n| < \frac{2\left[1+e^{-(2n+1)\pi}+\frac{\pi}{3}(2n+1)\right]}{e^{(2n+1)\pi}}+$$

$$+\frac{\operatorname{ch}\pi}{\operatorname{sh}^2\pi}+\frac{\operatorname{ch}2\pi}{\operatorname{sh}^2 2\pi}+\frac{\pi}{3}\frac{(\operatorname{sh}^2\pi+2)}{\operatorname{sh}^3\pi} \tag{3.5}$$

Наибольшее значение в правой части выражения (3.4) получится при $n=0$ и будет равно 0.3633.

Следовательно, имеем

$$S_n < 0.3633 \quad \text{для } n \geqslant 0 \tag{3.6}$$

Значит система (2.4), согласно [6], вполне регулярна при $a \geqslant b$.

Докажем теперь, что S_n стремится к нулю при $n \to \infty$. Для этого, приняв из асимтотического представления полиномов Лежандра [4]

$$P_k(\cos\beta) \approx \frac{c}{\sqrt{k}}, \qquad P_k'(\cos\beta) \approx d\sqrt{k}$$

получим оценки для $|J_{kn}|$

$$|J_{kn}| < \frac{cd}{|k-n|\sqrt{k}} \quad \text{при} \quad k \neq n$$

$$|J_{kn}| < \frac{1}{2n+1} \quad \text{при} \quad k=n$$

Для $|N_k|$ примем более грубую оценку, чем (3.4)

$$|N_k| \leqslant \frac{2l}{2k+1}, \qquad \text{где} \quad l = \text{const}$$

Тогда из выражения (3.1) получим

$$S_n < \frac{lc}{\sqrt{n}\,(n+1)}+\frac{1}{2n+1}+\frac{cdl}{\sqrt{n}}\left[\sum_1^{n-1}\frac{1}{(n-k)\sqrt{k}}+\right.$$

$$\left.+\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-n)\sqrt{k}}\right]$$

В силу неравенств

$$\sum_1^{n-1}\frac{1}{(n-k)\sqrt{k}} > \int_1^{n-1}\frac{dx}{(n-x)\sqrt{x}} > \sum_2^{n-1}\frac{1}{(n-k)\sqrt{k}}$$

$$\sum_{n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-n)\sqrt{k}}\int_{n+1}^{\infty}\frac{dx}{(x-n)\sqrt{x}} > \sum_2^{\infty}\frac{1}{(k-n)\sqrt{k}}$$

для S_n получим следующую оценку:

$$S_n < 2cdl \frac{\ln n}{n} + 0\left(n^{-1}\right) \tag{3.7}$$

Следовательно, при возрастании n величина S_n монотонно стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 0 \tag{3.8}$$

Оценим свободные члены системы (2.4). В том случае, когда на пластинку действует только непрерывно распределенная нагрузка, согласно (1.16) коэффициенты C_k будут иметь порядок $1/k^3$. При этом условии из (2.6) следует, что свободные члены b_n бесконечной системы имеют тот же порядок убывания, что и члены ряда (2.6), т. е. они ограничены сверху и при $n \to \infty$ стремятся к нулю как

$$b_n = 0\left(n^{-3/2}\right) \tag{3.9}$$

Из полученных оценок (3.6) и (3.9) следует [6], что система (2.4) вполне регулярна при $a > b$ и имеет ограниченное решение. При этом, пользуясь (3.8), можно доказать методом последовательных приближений, что неизвестные α_{2n+1} будут иметь тот же порядок, что и свободные члены b_n этой системы, т. е.

$$\alpha_{2n+1} = 0\left(n^{-3/2}\right) \tag{3.10}$$

4. В рассматриваемой задаче N_k имеет порядок ke^{-2k} и для S_n получена оценка (3.8). Однако, могут быть задачи, которые приводятся к системе (2.4), но с N_k, имеющим иной порядок убывания. Нетрудно доказать регулярность системы (2.4), если N_k имеет порядок не ниже $1/k$.

Пусть $N_k = \dfrac{2l}{2k+1}$, тогда получим для S_n оценку (3.7).

В случае $N_k = 0\left(1/k^2\right)$ вместо (3.7) получим

$$S_n < 2cdl \frac{\ln n}{n\left(n + \dfrac{1}{2}\right)} + 0\left(n^{-3/2}\right) \tag{4.1}$$

Так как $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 0$, то, начиная с некоторого $n = n_0$, будем иметь

$$S_n < 1 - \varepsilon \quad \text{при} \quad n > n_0 \quad \varepsilon > 0 \tag{4.2}$$

Следовательно, бесконечная система (2.4) квази-вполне регулярна, если N_k имеет порядок не ниже $1/k$.

5. Определим значения изгибающих моментов на линии $x = 0$.

Изгибающие моменты определяются по известным формулам

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{5.1}$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{5.2}$$

Подставляя в (5.1) и (5.2) выражения (1.7), (1.8), (1.10), (1.11), (1.4) и учитывая симметрию, определим значения изгибающих моментов на линии $x=0$

$$M_x = 0 \quad \text{при} \quad 0 < y < \mu b \tag{5.3}$$

$$M_x = \frac{4b^2\sigma}{\pi^2}\sum_0^\infty \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)^2}\cos\lambda_{2k+1}y +$$

$$+\frac{4b^2}{\pi^2}\sum_0^\infty \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)^2 \operatorname{ch}\lambda_{2k+1}a}\left[\frac{\lambda_{2k+1}a}{2}(1-\sigma)\operatorname{th}\lambda_{2k+1}a-\sigma\right]\cos\lambda_{2k+1}y+$$

$$+\frac{\pi(1-\sigma)(3+\sigma)}{4b}\sum_0^\infty a_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)(1-N_k)\cos\lambda_{2k+1}y \tag{5.4}$$

$$\text{при} \quad \mu b < y < b$$

$$M_y = \frac{4b^2}{\pi^2}\sum_0^\infty \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)^2}\cos\lambda_{2k+1}y -$$

$$-\frac{4b^2}{\pi^2}\sum_0^\infty \frac{a_{2k+1}}{(2k+1)^2 \operatorname{ch}\lambda_{2k+1}a}\left[1+\frac{(1-\sigma)\lambda_{2k+1}a}{2}\operatorname{th}\lambda_{2k+1}a\right]\cos\lambda_{2k+1}y-$$

$$-\frac{(1-\sigma)^2\pi}{4b}\sum_0^\infty a_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)(1-L_k)\cos\lambda_{2k+1}y \tag{5.5}$$

$$\text{при} \quad 0 < y < b$$

где

$$L_k = \frac{1-e^{-2\lambda_{2k+1}a}-\lambda_{2k+1}a}{2\operatorname{ch}^2\lambda_{2k+1}a} \tag{5.6}$$

В выражения для M_x и M_y входит ряд

$$\sum_0^\infty a_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\lambda_{2k+1}y = \sum_0^\infty a_{2k+1}\left(k+\frac{1}{2}\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi \tag{5.7}$$

который сходится не абсолютно.

Сумму ряда (5.7) на участке $0 < y < \mu b$ $(0 < \varphi < \beta)$ можно найти из первого уравнения системы (1.12).

У края разреза $y = \mu b + 0$ $(\varphi = \beta + 0)$ сумма ряда (5.7) обращается в бесконечность, поэтому выделим главную часть этого ряда на участке $\mu b < y < b$ $(\beta < \varphi < \pi)$. Подставляя (2.4) в (5.7) и используя сумму ряда [5]

$$\sum_0^\infty P_k(\cos\theta)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi = \begin{cases} 0 & (0 \leqslant \varphi < \theta \leqslant \pi) \\ [2(\cos\theta-\cos\varphi)]^{-1/2} & (0 \leqslant \theta < \varphi \leqslant \pi) \end{cases} \tag{5.8}$$

получим

$$\sum_{0}^{\infty}\left(k+\frac{1}{2}\right)\alpha_{2k+1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi=\frac{\partial}{\partial\varphi}\sum_{0}^{\infty}\alpha_{2k+1}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi=$$

$$=\frac{\partial}{\partial\varphi}\sum_{k=0}^{\infty}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\varphi\left[\sum_{p=0}^{\infty}a_{kp}\alpha_{2p+1}+b_k\right]=$$

$$=-\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)N_p\alpha_{2p+1}+C_p\right]\frac{\partial}{\partial\varphi}\int_{0}^{\beta}P_p(\cos\theta)\,[2(\cos\theta-$$

$$-\cos\varphi)]^{-1/2}d\cos\theta=\frac{\sin\varphi}{\sqrt{\cos\beta-\cos\varphi}}R+\cos\frac{\varphi}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)N_p+\right.$$

$$\left.+C_p\right]+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\varphi\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)N_p\alpha_{2p+1}+C_p\right]\int_{0}^{\beta}\frac{P_p'(\cos\theta)\,d\cos\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\varphi}} \quad (5.9)$$

$$(\beta<\varphi<\pi)$$

где

$$R=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sum_{p=0}^{\infty}\left[\left(p+\frac{1}{2}\right)N_p\alpha_{2p+1}+C_p\right]P_p(\cos\beta)$$

Подставив (5.9) в (5.4) и (5.5), можно получить удобные для вычислений выражения изгибающих моментов на линии $x=0$ при $\mu b<y<b$.

6. Как частные случаи решаются задачи изгиба квадратной $(a=b)$ и бесконечной $(a=\infty)$ пластин с разрезом длины, равной половине ширины плиты под действием равномерно распределенной нагрузки, т. е. $\mu=\frac{1}{2}$ и $p=\text{const}$.

По формулам (1.6) и (1.8) получим

$$a_{2k+1}=\frac{4p(-1)^k}{\pi(2k+1)} \quad (6.1)$$

$$f(y)=\frac{p}{24D}\left[y^4-6y^2b^2+5b^4\right] \quad (6.2)$$

Из системы уравнений (2.4) определяем значения коэффициентов α_{2k+1}. Затем по (1.10) и (1.11) вычисляем значения коэффициентов A_{2k+1} и B_{2k+1}. Здесь вычислены десять значений α_{2k+1}, A_{2k+1} и B_{2k+1}, которые приведены в табл. 1.

Из выражения (1.7), используя (1.10), (1.11), (6.1) и (6.2), вычисляем прогибы на линиях $x=0$ и $y=0$.

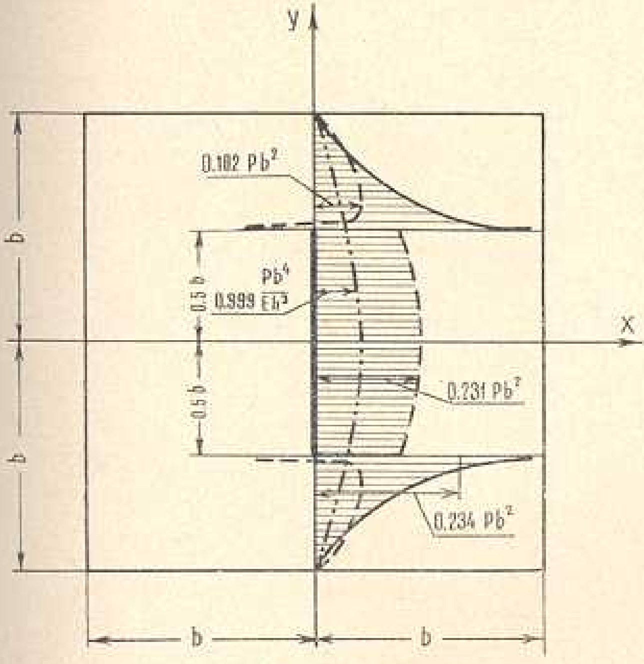
Подставив (5.9) в выражения (5.4) и (5.5), определяем значения изгибающих моментов на линии $x=0$. По формулам (5.1) и (5.2) вычисляем значения изгибающих моментов для квадратной пластинки на линии $y=0$.

Результаты приведены в табл. 2.

По значениям табл. 2 строим эпюры прогибов и изгибающих моментов на линиях $x=0$ (фиг. 2) и $y=0$ (фиг. 3) квадратной пластинки и на линии $x=0$ (фиг. 4) бесконечной пластинки.

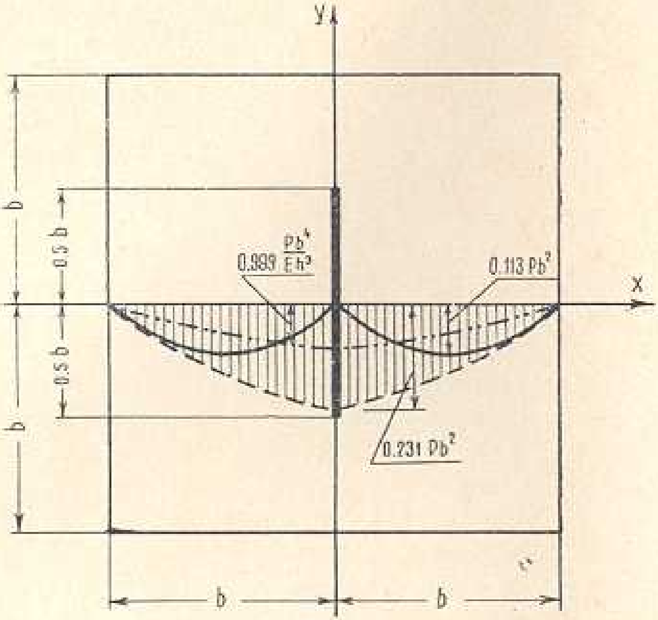
Таблица 1

	$a=b$			$a=\infty$		
k	α_{2k+1}/pb^3	A_{2k+1}/pb^4	B_{2k+1}/pb^3	α_{2k+1}/pb^3	A_{2k+1}/pb^4	B_{2k-1}/pb^3
0	−0.098253	−0.122533	0.031066	−0.066161	0.041351	0.012405
1	−0.04895	0.003300	0.009176	−0.032927	0.006860	0.006174
2	0.000262	−0.000011	−0.000049	0.000227	−0.000035	−0.000042
3	0.012351	−0.000351	−0.002316	0.008378	−0.000748	−0.001571
4	−0.000051	0.000001	0.000010	−0.000045	0.000003	0.000008
5	−0.006208	0.000112	0.001164	−0.004194	0.000238	0.000786
6	0.003881	−0.000051	−0.000728	0.002622	−0.000109	−0.000492
7	0.000020	0.000000	−0.000004	0.000017	−0.000001	−0.000003
8	−0.000010	0.000000	0.000002	−0.000009	0.000000	0.000002
9	−0.002717	0.000028	0.000509	−0.001836	0.000060	0.000344



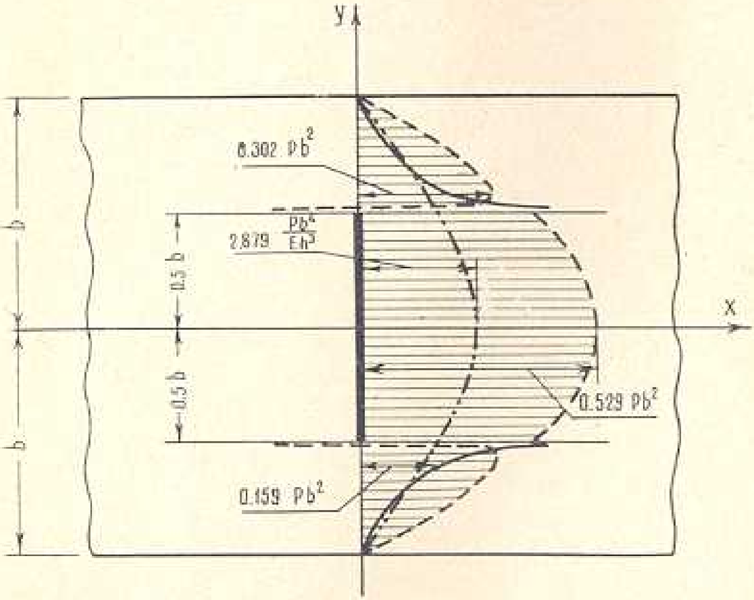
Фиг. 2.

—·—·— эпюра w, ——— эпюра M_x, - - - - - эпюра M_y.



Фиг. 3.

—·—··—эпюра w, ——— — эпюра M_x, - - - - - эпюра M_y,



Фиг. 4.

—··—··— эпюра w, ———— эпюра M_x, - - - - - эпюра M_y.

Таблица 2

$x = mb \qquad y = 0$

	m	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$w = \alpha \dfrac{pb^4}{Eh^3}$	α	0.999371	0.923704	0.848126	0.771097	0.686205	0.592684	0.489780	0.377752	0.257220	0.131187	0.00
$M_x = \beta pb^2$	β	0.00	0.036869	0.069021	0.090661	0.111998	0.113211	0.106586	0.091901	0.069722	0.038797	0.00
$M_y = \gamma pb^2$	γ	0.230885	0.220602	0.204032	0.186546	0.157942	0.138532	0.11642	0.091894	0.064373	0.034046	0.00

$x = 0 \qquad y = mb$

		m	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5−0	0.5+0	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$a = b$	$w = \alpha_1 \dfrac{pb^4}{Eh^3}$	α_1	0.999371	0.985241	0.944212	0.875835	0.782257	0.663941		0.542104	0.416351	0.282723	0.143226	0.00
	$M_x = \beta_1 pb^2$	β_1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	∞	0.234124	0.147337	0.093324	0.046377	0.00
	$M_y = \gamma_1 pb^2$	γ_1	0.230885	0.229181	0.223996	0.215148	0.202230	0.184733	$-\infty$	0.102097	0.094669	0.072717	0.041079	0.00
$a = \infty$	$w = \alpha_2 \dfrac{pb^4}{Eh^3}$	α_2	2.879471	2.83959	2.722804	2.529292	2.265221	1.935405		1.582819	1.214471	0.823320	0.416272	0.00
	$M_x = \beta_2 pb^2$	β_2	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	∞	0.159133	0.100860	0.064426	0.032330	0.00
	$M_y = \gamma_2 pb^2$	γ_2	0.528846	0.523557	0.507692	0.481250	0.44423	0.039663	$-\infty$	0.301739	0.246436	0.175517	0.093020	0.00

Как видно из эпюр (фиг. 2) и (фиг. 4), наибольший прогиб w и изгибающий момент M_y (не учитывая особенностей у края разреза) получаются в центре пластинки ($x=0$, $y=0$) и равны:

для квадратной пластинки

$$w_{\max}=0.999\,\frac{pb^4}{Eh^3},\qquad M_{y\max}=0.231\,pb^2 \tag{6.3}$$

для бесконечной пластинки

$$w_{\max}=2.879\,\frac{pb^4}{Eh^3},\qquad M_{y\max}=0.529\,pb^2 \tag{6.4}$$

При изгибе пластинки без разреза из [7] имеем:

для квадратной пластинки

$$w_{\max}=0.7312\,\frac{pb^4}{Eh^3},\qquad M_{x_{\max}}=M_{y_{\max}}=0.184\,pb^2 \tag{6.5}$$

для бесконечной пластинки

$$w_{\max}=2.344\,\frac{pb^4}{Eh^3},\qquad M_{y\max}=0.5\,pb^2 \tag{6.6}$$

Сравнивая (6.3) с (6.5) и (6.4) с (6.6), видим, что наличие разреза дает увеличение наибольшего прогиба $w_{\max}$ на 36.6 %, наибольшего момента $M_{y\max}$ — на 25 % в квадратной пластинке и $w_{\max}$ — на 22.8 %, $M_{y\max}$ — на 6 % в бесконечной пластинке.

Ереванский политехнический институт
им. К. Маркса

Поступила 25 VI 1967

Է. Վ. ԲԵԼՈՒԲԵԿՅԱՆ

ԵԶՐԱԳԾՈՎ ԱԶԱՏ ՀԵՆՎԱԾ ՍԻՄԵՏՐԻԿ ՃԱՔՈՎ ՈՒՂՂԱՆԿՅՈՒՆ ՍԱԼԻ ԾՌՈՒՄԸ

Ամփոփում

Աշխատանքում դիտարկվում է ազատ հենված ուղղանկյուն սալի ծռումը սիմետրիկ բեռի ազդեցության տակ, երբ սալը ունի իր սիմետրիայի առանցքներից մեկով ուղղված և մյուս առանցքի նկատմամբ սիմետրիկ դասավորված ճաք։

Խնդրի լուծման ժամանակ օգտագործված է լրացուցիչ ազդեցությունների եղանակը։

Խնդիրը բերվում է „զույգ շարքերի" լուծմանը, որոնց անհայտ գործակիցները որոշվում են՝ լրիվ ռեգուլյար հանրահաշվական գծային հավասարումների անվերջ սիստեմից։

Բերված են թվային հաշվարկներ քառակուսի և անվերջ սալերի համար, որոնց ճաքի երկարությունը հավասար է սալի լայնության կեսին՝ հավասարաչափ բաշխված բեռի ազդեցության տակ։

E. V. BELUBEKIAN

BENDING OF A RECTANGULAR PLATE FREELY SUPPORTED ALONG THE CONTOUR WITH A SYMMETRICAL FRACTURE

Summary

The problem of the bending of a rectangular plate freely supported along contour with a symmetrical fracture under the action of a symmetrical external load is considered. The method of supplementary actions is used. The problem is brought to a solution of dual series-equations which in its turn is reduced to a quite regular infinite system of linear equations.

Numerical calculations are given for the case of bending of square and infinite plates with a fracture under the action of uniformly distributed load.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Сапонджян О. М.* Некоторые задачи теории изгиба тонких плит. Докторская диссертация, 1949. См. также: Сапонджян О. М., ПММ, т. 13, в. 5, 1949.
2. *Сапонджян О. М.* Об одном случае изгиба тонкой прямоугольной плиты. Докл. АН АрмССР, т. 37, № 3, 1963.
3. *Бабłоян А. А.* Решение некоторых „парных" рядов, Докл. АН АрмССР, т. 39, № 3, 1964.
4. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения. Гостехтеориздат, М., 1963.
5. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. И.-Л., М., 1952.
6. *Канторович Л. В.* и *Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Гостехтеориздат, Л.-М., 1952.
7. *Галеркин Б. Г.* Собрание сочинений, т. II. Изд. АН СССР, М., 1953.
8. *Тимошенко С. П.* и *Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. Физматгиз, М., 1963.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений. Физматгиз, М., 1962.