ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XXI, № 2, 1968 Механика

В. М. АЛЕКСАНДРОВ

К КОНТАКТНЫМ ЗАДАЧАМ ДЛЯ УПРУГОГО КЛИНА С ОДНОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ ГРАНЬЮ

Рассматриваются две плоские контактные задачи для упругого клина ($-\alpha \leqslant \theta \leqslant \alpha$, $0 \leqslant r < \infty$), грань которого $\theta = -\alpha$ жестко защемлена. Развивается мысль, изложенная в качестве замечания в конце работы [1]. Попутно исправляется замеченная в [1] неточность. Решения обеих задач получены в виде простых асимптотических формул, охватывающих все практически интересные случаи.

§ 1. *Постановка задач.* Первая задача — задача о вдавливании силой Q абсолютно жесткого штампа с произвольным основанием в поверхность $\theta = \alpha$ упругого клина. Силы трения между штампом и поверхностью клина предполагаем отсутствующими. Вне штампа грань клина $\theta = \alpha$ не нагружена.

Вторая задача — задача о взаимодействии нерастяжимой, но абсолютно гибкой пластинки* с поверхностью $\theta = \alpha$ упругого клина. Между пластинкой и поверхностью клина осуществляется жесткое сцепление. Пластинка нагружена касательной силой Q. Вне пластинки на грани клина $\theta = \alpha$ напряжения отсутствуют.

В соответствии со сказанным граничные условия задач можно представить в виде:

1)
$$\begin{gathered}\tau_{r\theta}(r, \alpha) = 0 \qquad (0 < r < \infty)\\ \sigma_\theta(r, \alpha) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < r < a \quad \text{и} \quad b < r < \infty\\ u_\theta(r, \alpha) = \delta(r) \quad \text{при} \quad a \leqslant r \leqslant b\end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\delta(r)$ — осадка точек поверхности $\theta = \alpha$ упругого клина в области контакта $a \leqslant r \leqslant b$. Полагается, что напряжения при $r \to \infty$ исчезают;

2)
$$\begin{gathered}\sigma_\theta(r, \alpha) = 0, \quad (0 < r < \infty)\\ \tau_{r\theta}(r, \alpha) = 0 \quad \text{при} \quad 0 < r < a \quad \text{и} \quad b < r < \infty\\ u_r(r, \alpha) = \delta \quad \text{при} \quad a \leqslant r \leqslant b\end{gathered} \tag{1.2}$$

где δ — смещение пластинки под действием касательной силы Q. Полагается, что напряжения при $r \to \infty$ исчезают.

Применяя к уравнениям Ламе, записанным в полярной системе координат, и граничным условиям (1.1), (1.2) рассматриваемых задач интегральное преобразование Меллина по переменной r, сведем обе задачи к решению следующего интегрального уравнения:

---

* Пластинка типа мембраны.

$$\int_a^b q(\rho) K(\ln \rho / r)\, d\rho = \pi \Delta \delta(r) \qquad (a \leqslant r \leqslant b)$$

$$K(t) = \int_0^\infty \frac{L(u, \alpha)}{u} \cos ut\, du \qquad \left(\Delta = \frac{G}{1-\mu}\right) \tag{1.3}$$

G и μ — упругие постоянные клина. Здесь для первой задачи $q(\rho)$ — функция распределения контактных давлений под штампом,

$$L(u, \alpha) = \frac{2\varkappa \operatorname{sh} 4u\alpha - 2u \sin 4\alpha}{2\varkappa \operatorname{ch} 4u\alpha + 2u^2 + \varkappa^2 + 1 - 2u^2 \cos 4\alpha} \quad (\varkappa = 3 - 4\mu) \tag{1.4}$$

для второй задачи $q(\rho)$ — функция распределения контактных касательных напряжений под пластинкой, $\delta(r) \equiv \delta$,

$$L(u, \alpha) = \frac{2\varkappa \operatorname{sh} 4u\alpha + 2u \sin 4\alpha}{2\varkappa \operatorname{ch} 4u\alpha + 2u^2 + \varkappa^2 + 1 - 2u^2 \cos 4\alpha} \tag{1.5}$$

Если, как показано в работе [1], функцию $L(u, \alpha)$ апроксимировать выражением $\operatorname{th}[A(\alpha) u]$, где соответственно для рассматриваемых задач

$$A(\alpha) = 2(4\alpha\varkappa - \sin 4\alpha)(\varkappa + 1)^{-2}$$
$$A(\alpha) = 2(4\alpha\varkappa + \sin 4\alpha)(\varkappa + 1)^{-2} \tag{1.6}$$

то решения обеих задач могут быть представлены в замкнутом виде, причем относительная погрешность этого решения не будет превосходить погрешности указанной апроксимации. Для важного частного случая $\delta(r) \equiv \delta = \mathrm{const}$ замкнутое решение дается формулами (3.10), (3.11) и (3.13) работы [1], причем (3.13) имеет смысл только для первой задачи.

Здесь следует заметить, что в работе [1] формулы (1.5) и вторая (1.6) приписаны по недосмотру первой задаче, вместо второй. Поэтому табл. 1 и 2, в которых указаны максимальные относительные ошибки апроксимации функции $L(u, \alpha)$ гиперболическим тангенсом и значения постоянной $A(\alpha)$ для различных углов α следует использовать для второй рассматриваемой задачи. Для первой задачи значения ошибки $\%$ и $A(\alpha)$ при $\varkappa = 1.8$ даны в приводимой здесь табл. 1.

В заключение этого параграфа рассмотрим случай малых углов α. Легко видеть, что при малых α

$$L(u, \alpha) = L^*(2u\alpha) + O(\alpha^3)$$
$$L^*(\beta) = \frac{2\varkappa \operatorname{sh} 2\beta \mp 4\beta}{2\varkappa \operatorname{ch} 2\beta + \varkappa^2 + 1 + 4\beta^2} \tag{1.7}$$

где знак „—" в числителе — для первой задачи, а знак „+" — для второй. Следовательно, имеет смысл при малых α заменить функцию

$L(u, \alpha)$ выражением $L^*(2u\alpha)$. Погрешность такой апроксимации при $\varkappa = 1.8$, всех $u \in [0, \infty)$ и $0 < \alpha < 7.5°$ не превосходит для обеих задач 5%.

Таблица 1

$\alpha°$	$A(\alpha)$	%	$\alpha°$	$A(\alpha)$	%	$\alpha°$	$A(\alpha)$	%
7.5	0.1129	9	67.5	2.4189	1	127.5	3.9597	1
15	0.2599	4	75	2.6252	1	135	4.3277	1
22.5	0.4662	7	82.5	2.7723	1	142.5	4.6956	1
30	0.7408	10	90	2.8851	1	150	5.0295	1
37.5	1.0746	10	97.5	2.9980	2	157.5	5.3041	1
45	1.4425	8	105	3.1451	2	165	5.5103	1
52.5	1.8106	6	112.5	3.3513	1	172.5	5.6574	1
60	2.1444	3	120	3.6260	1			

С учетом указанной апроксимации представим ядро $K(t)$ интегрального уравнения (1.3) в виде

$$K(t) = K^*(z) = \int_0^\infty \frac{L^*(\beta)}{\beta} \cos \beta z \, d\beta \qquad \left(z = \frac{t}{2\alpha}\right) \tag{1.8}$$

Если теперь ввести новые переменные и обозначения по формулам

$$\tau = \frac{\mu}{2\alpha} \ln \frac{\rho}{a} - 1, \qquad s = \frac{\mu}{2\alpha} \ln \frac{r}{a} - 1, \qquad \mu = 4\alpha \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{-1}$$
$$\rho q(\rho) = \varphi^*(\tau), \quad (2\alpha)^{-1} \Delta \vartheta \tilde{\omega}(r) = f^*(s) \tag{1.9}$$

то интегральное уравнение (1.3) с ядром (1.8) можно представить в форме

$$\int_{-1}^{1} \varphi^*(\tau) K^*\left(\frac{\tau - s}{\mu}\right) d\tau = \pi f^*(s) \quad (|s| < 1) \tag{1.10}$$

Легко убедиться (см., например, [2]), что в случае первой рассматриваемой задачи уравнение (1.10) совпадает с интегральным уравнением контактной задачи для упругой полосы с жестко защемленной нижней гранью. Поэтому в случае малых α могут быть полностью использованы все многочисленные результаты, полученные к настоящему времени при больших μ [2] и малых μ [3, 4] для задачи о вдавливании штампа в полосу.

Для второй рассматриваемой задачи уравнение (1.10), как можно показать, также совпадает с интегральным уравнением соответствующей контактной задачи для упругой полосы и здесь могут быть использованы асимптотические при больших и малых μ формулы, данные в работах [2—4].

Приведем необходимые значения постоянных a_i $(i=0,\ 1,\ 2)$, входящих в формулы (2.9), (2.10) [2] и B, C, входящих в апроксимацию (1.3) [4],

1) $a_0=-0.527,\quad a_1=0.716,\quad a_2=-0.245,\quad B=0.7,\quad C=1.715$

2) $a_0=0.420,\quad a_1=0.331,\quad a_2=-0.127,\quad B=0.7,\quad C=0.49$

Все постоянные подсчитаны при $\varkappa=1.8$. Погрешность апроксимации (1.3) [4] при указанных значениях B и C не превосходит $8\,\%$ для задачи 1) и $7\,\%$ для задачи 2).

§ 2. *Асимптотические решения рассматриваемых задач.* Произведем в интегральном уравнении (1.3) замену переменных и введем обозначения по формулам (1.3) работы [1], аналогичным вышеприведенным (1.9).

Будем иметь

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\xi)\,K\left(\frac{\xi-x}{\lambda}\right)d\xi=\pi f(x),\quad |x|\leqslant 1\qquad\left(\lambda=2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1}\right)\tag{2.1}$$

Безразмерный параметр $\lambda\in(0,\ \infty)$ характеризует, очевидно, относительное положение штампа или пластинки на грани клина.

Изучим сначала случай больших λ (штамп или пластинка находится относительно далеко от вершины клина). Для этого представим ядро $K(t)$ интегрального уравнения (2.1), определяемое второй формулой (1.3), в виде

$$K(t)=-\ln|t|+\sum_{i=0}^{\infty}a_i(\alpha)\,t^{2i}$$

$$a_0=\int_0^{\infty}\frac{1-L(u,\ \alpha)-\cos u}{u}\,du,\qquad a_i=\frac{(-1)^i}{(2i)!}\int_0^{\infty}[1-L(u,\ \alpha)]\,u^{2i-1}\,du\quad(i\geqslant 1)\tag{2.2}$$

При $\varkappa=1.8$ численным интегрированием для обеих рассматриваемых задач найдено

$\alpha=45^\circ\quad a_0=0.522\quad a_1=0.1442\quad a_2=-0.01631$

$\alpha=90^\circ\quad a_0=1.315\quad a_1=0.0230\quad a_2=0.000349$

$\alpha=135^\circ\quad a_0=1.708\quad a_1=0.01081\quad a_2=0.0000837$

Используя асимптотику функций $L(u,\ \alpha)$ вида (1.4) и (1.5) при больших значениях u

$$L(u,\ \alpha)\sim 1+O(e^{-4u\alpha})\tag{2.3}$$

можно показать, что ряд в (2.2) абсолютно сходится при $|t|<4\alpha$.

Отсюда следует, что все результаты, основанные на (2.2), будут, по крайней мере, иметь смысл при $\lambda > (2\alpha)^{-1}$.

Асимптотическое при больших λ решение интегрального уравнения вида (2.1) с ядром типа (2.2) получено в работе [2] и дается соотношениями (2.9), (2.10) с точностью до λ^{-6}. Возвращаясь в этих формулах к старым переменным и обозначениям в соответствии с формулами (1.3) [1], получим приближенное решение рассматриваемых контактных задач для клина при больших λ в виде

$$q(r) = \frac{Q}{\pi r \sqrt{\ln b/r \ln r/a}} \left[1 + 2a_1 \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} \right) + \right.$$

$$\left. + 4a_2 \left(\frac{7}{8\lambda^4} - \frac{1}{\lambda^2} \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} - \ln^4 \frac{r}{\sqrt{ab}} \right) + O(\lambda^{-6}) \right] -$$

$$- \frac{\lambda\Delta}{\pi r \sqrt{\ln b/r \ln r/a}} \int_a^b \sqrt{\ln b/\rho \ln \rho/a}\, \delta'(\rho) \left\{ \frac{1}{\lambda \ln \rho/r} - \frac{2a_1}{\lambda} \ln \frac{r}{\sqrt{ab}} - \right. \qquad (2.4)$$

$$- \frac{2a_2}{\lambda} \left[6 \ln^3 \frac{r}{\sqrt{ab}} - 6 \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} \ln \frac{\rho}{\sqrt{ab}} + 2 \ln \frac{r}{\sqrt{ab}} \ln^2 \frac{\rho}{\sqrt{ab}} - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{2}{\lambda^2} \ln \frac{r}{\sqrt{ab}} + \frac{3}{\lambda^2} \ln \frac{\rho}{\sqrt{ab}} \right] - \frac{2a_1^2}{\lambda^3} \ln \frac{r}{\sqrt{ab}} + O(\lambda^{-6}) \right\} d\rho$$

$$\lambda Q = \left[\ln 2\lambda + a_0 + \frac{a_1}{\lambda^2} - \frac{a_1^2}{4\lambda^4} + \frac{9a_2}{4\lambda^4} + O(\lambda^{-6}) \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[\lambda\Delta \int_a^b \frac{\delta(\rho)\, d\rho}{\rho \sqrt{\ln b/\rho \ln \rho/a}} - \lambda\Delta \int_a^b \sqrt{\ln b/\rho \ln \rho/a}\, \delta'(\rho) \ln \frac{\rho}{\sqrt{ab}} \times \right.$$

$$\left. \times \left(a_1 + a_2 \ln^2 \frac{\rho}{\sqrt{ab}} + \frac{7a_2}{2\lambda^2} \right) d\rho + O(\lambda^{-5}) \right]$$

Для важного частного случая $\delta(r) \equiv \delta$ формулы (2.4) принимают вид

$$q(r) = \frac{Q}{\pi r \sqrt{\ln b/r \ln r/a}} \left[1 + 2a_1 \left(\frac{1}{2\lambda^2} - \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} \right) + \right.$$

$$\left. + 4a_2 \left(\frac{7}{8\lambda^4} - \frac{1}{\lambda^2} \ln^2 \frac{r}{\sqrt{ab}} - \ln^4 \frac{r}{\sqrt{ab}} \right) + O(\lambda^{-6}) \right] \qquad (2.5)$$

$$Q = \pi\Delta\delta \left[\ln 2\lambda + a_0 + \frac{a_1}{\lambda^2} - \frac{a_1^2}{4\lambda^4} + \frac{9a_2}{4\lambda^4} + O(\lambda^{-6}) \right]^{-1}$$

для первой рассматриваемой задачи определим еще из условия (3.12) [1] расстояние H от вершины клина, на котором нужно приложить силу Q, чтобы обеспечить поступательное перемещение штампа

$$H = \sqrt{ab}\left[1 + \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{64\lambda^4} - \frac{a_1}{8\lambda^4} + O(\lambda^{-5})\right] \tag{2.6}$$

Перейдем, наконец, к рассмотрению случая малых λ (штамп или пластинка находится относительно близко к вершине клина).

Апроксимируем функцию $\delta(r)$ на отрезке $a \leqslant r \leqslant b$ выражением

$$\delta(r) = \sum_{n=1}^{N} A_n r^{\nu_n} \tag{2.7}$$

где все ν_n различны. Увеличивая номер N, можно достигнуть любой точности этой апроксимации, если при $N \to \infty$ $\lim \sum_{n=1}^{N} \nu_n^{-1} = \infty$ [5].

Учитывая сказанное и линейность рассматриваемых задач, ограничимся далее изучением случая

$$\delta(r) = r^{\nu}, \quad f(x) = \Delta\lambda (ab)^{\nu/2} e^{\nu x/\lambda} \tag{2.8}$$

Согласно изложенному в работе [4], нулевой член асимптотики решения интегрального уравнения (2.1) с правой частью (2.8) при малых λ может быть представлен в форме (1.12) [4]. Возвращаясь к старым переменным и обозначениям согласно формулам (1.3) [1], сформулируем этот результат для интегрального уравнения (1.3) с правой частью (2.8) следующим образом: нулевой член асимптотики решения уравнения (1.3) при малых λ имеет вид

$$q(r) = q_1(r)\, q_2(r)\, v^{-1}(r) \quad (a \leqslant r \leqslant b) \tag{2.9}$$

где функции $q_1(r)$, $q_2(r)$ и $v(r)$ являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$\begin{aligned}
&\int_0^b q_1(\rho)\, K(\ln \rho/r)\, d\rho = \pi\Delta r^{\nu} \quad (0 \leqslant r \leqslant b) \\
&\int_a^\infty q_2(\rho)\, K(\ln \rho/r)\, d\rho = \pi\Delta r^{\nu} \quad (a \leqslant r < \infty) \\
&\int_0^\infty v(\rho)\, K(\ln \rho/r)\, d\rho = \pi\Delta r^{\nu} \quad (0 \leqslant r < \infty)
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Здесь отметим, что анализ приближенного решения (3.10) [1] для случая $\delta(r) \equiv \delta$ при малых λ подтверждает правильность структуры нулевого члена асимптотики (2.9).

Решения первых двух интегральных уравнений (2.10) могут быть найдены методом Винера-Хопфа [6]. Для получения практически приемлемых результатов апроксимируем функции $L(u, \alpha)$ вида (1.4) и (1.5) выражением

$$L(u, \alpha) = u\frac{\sqrt{u^2 + B^2(\alpha)}}{u^2 + C^2(\alpha)}, \quad \left(C(\alpha) = \sqrt{\frac{B(\alpha)}{A(\alpha)}}\right) \tag{2.11}$$

где $A(\alpha)$ имеет вид (1.6), а постоянная $B(\alpha)$ подбирается из условия наилучшего приближения апроксимирующей функции (2.11) к заданным значениям $L(u, \alpha)$ при всех $u \in [0, \infty)$. В апроксимации (2.11) учтены свойства функций $L(u, \alpha)$, определяемые соотношениями (2.3) и

$$L(u, \alpha) \sim uA(\alpha) + O(u^3) \quad \text{при} \quad u \to 0 \tag{2.12}$$

Если для некоторых значений угла α точность апроксимации (2.11) окажется недостаточной, то могут быть использованы более сложные апроксимации (1.4), (1.5) работы [4].

При $\varkappa = 1.8$ и всех $u \in [0, \infty)$ для углов $\alpha = 45°, 90°, 135°$ погрешность апроксимации (2.11) не превосходит 3%, если постоянная $B(\alpha)$ соответственно равна

$$B = 1.035, \quad B = 0.814, \quad B = 0.522$$

Не останавливаясь на подробностях применения метода Винера-Хопфа, приведем полученные решения первых двух интегральных уравнений (2.10) при апроксимации (2.11)

$$\begin{gathered}
q_1(r) = \frac{\Delta b^\nu (C+\nu)}{r\sqrt{B+\nu}}\left[\frac{(C-\nu)}{\sqrt{B-\nu}}\left(\frac{r}{b}\right)^\nu \operatorname{erf}\sqrt{(B-\nu)\ln b/r} + \right. \\
\left. + (\pi \ln b/r)^{-1/2}\left(\frac{r}{b}\right)^B\right] \\
q_2(r) = \frac{\Delta a^\nu (C-\nu)}{r\sqrt{B-\nu}}\left[\frac{(C+\nu)}{\sqrt{B+\nu}}\left(\frac{a}{r}\right)^\nu \operatorname{erf}\sqrt{(B+\nu)\ln r/a} + \right. \\
\left. + (\pi \ln r/a)^{-1/2}\left(\frac{a}{r}\right)^B\right]
\end{gathered} \tag{2.13}$$

Решение третьего интегрального уравнения (2.10) находится без труда применением теоремы о свертках для преобразования Меллина. При апроксимации (2.11) это решение имеет вид

$$\tau(r) = \frac{\Delta(C^2 - \nu^2)}{\sqrt{B^2 - \nu^2}} r^{\nu - 1} \tag{2.14}$$

Заметим, что формулы (2.13) и (2.14) получены в предположении $-B < \nu < B$. Однако, их можно формально распространить и на случаи $\nu > B$ и $\nu < -B$, учитывая, что

$$\operatorname{erf} ix = \frac{2i}{\sqrt{\pi}} F(x), \quad F(x) = \int_0^x e^{t^2} dt \tag{2.15}$$

(таблица функции $F(x)$ имеется в [7]). Появляющаяся при этом мнимость в некоторых из формул (2.13) и (2.14) сокращается при составлении нулевого члена асимптотики решения при малых λ по формуле (2.9).

Для важного частного случая $\delta(r) \equiv \delta$ приближенное решение в форме (2.9) имеет вид

$$q(r) = \frac{\Delta\delta}{Ar} g(\ln b/r)\, g(\ln r/a), \qquad g(x) = \operatorname{erf}\sqrt{Bx} + \sqrt{\frac{A}{\pi x}} e^{-Bx} \tag{2.16}$$

Подставляя (2.16) в формулы (3.9) и (3.12) [1] и интегрируя, найдем выражения для силы Q, а также расстояния H в случае первой рассматриваемой задачи

$$Q = \Delta\delta \left[\frac{2}{A\lambda} + D(2-D) - (1-D)^2 \exp\left(-\frac{2B}{\lambda}\right) \right] \quad \left(D = \frac{1}{AC}\right)$$

$$H = 2\Delta\delta a \left[\frac{d}{ds} A_\beta\left(\frac{s}{2}\right) + e^s C(C+1) A_\gamma\left(\frac{s}{2}\right) - \right.$$

$$\left. - C(C-1) A_\beta\left(\frac{s}{2}\right) \right] \tag{2.17}$$

$$A_\alpha(x) = \int_0^x e^{\alpha\tau} I_0(\tau)\, d\tau, \qquad s = \frac{2}{\lambda}, \qquad \beta = -2B + 1, \qquad \gamma = -2B - 1$$

При вычислении интегралов здесь использован прием § 3 работы [4] и методы контурного интегрирования.

В табл. 2 для сравнения даны некоторые результаты расчетов по формулам (3.10), (3.11), (3.13) [1] (строки I), формулам (2.5), (2.6) (строки II) и формулам (2.16), (2.17) (строки III). Выбраны такие значения угла α, при которых результаты для обеих рассматриваемых задач совпадают. В 1-х, 2-х, 3-х, 4-х и 5-х колонках табл. 2 даны соответственно значения величин

$$\frac{q(\sqrt{ab})\,a}{\Delta\delta}, \quad \frac{a}{\Delta\delta} \lim_{r\to a} q(r)\sqrt{\ln r/a}, \quad \frac{a}{\Delta\delta} \lim_{r\to b} q(r)\sqrt{\ln b/r}, \quad \frac{Q}{\Delta\delta}, \quad \frac{H}{\sqrt{ab}}$$

На основании числового материала, приведенного в табл. 2, и аналогичных расчетов, произведенных для ряда других углов α, можно заключить, что при $x = 1.8$ и использовании апроксимации (2.11) происходит надежное смыкание асимптотических решений (2.5), (2.6) и (2.16), (2.17) для всех $7.5° \leqslant \alpha \leqslant 172.5°$. Смыкание наблюдается при $\lambda = \alpha^{-1}$.

Таким образом, для случая $\delta(r) \equiv \mathrm{const}$ асимптотические решения для больших и малых λ в комплексе позволяют полностью и эффективно исследовать рассматриваемые задачи. Окончательные формулы достаточно просты и могут быть использованы при инженерных расчетах.

Таблица 2

№ п/п		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$\alpha = 45°$	λ	$8/\pi$					$4/\pi$					$2/\pi$				
	I	0.775	0.494	0.225	1.396	1.038	0.383	0.474	$0.984 \cdot 10^{-1}$	1.966	1.155	0.145	0.470	$0.203 \cdot 10^{-1}$	3.060	1.650
	II	0.809	0.509	0.232	1.447	1.038	0.405	0.490	0.102	2.053	1.153					
	III						0.408	0.486	0.101	2.062	1.154	0.154	0.472	$0.204 \cdot 10^{-1}$	3.146	1.656
$\alpha = 90°$	λ	$4/\pi$					$2/\pi$					$1/\pi$				
	I	0.262	0.349	$0.726 \cdot 10^{-1}$	1.396	1.159	$0.872 \cdot 10^{-1}$	0.335	$0.145 \cdot 10^{-1}$	1.966	1.700	$0.155 \cdot 10^{-1}$	0.332	$0.621 \cdot 10^{-3}$	3.060	5.115
	II	0.260	0.348	$0.723 \cdot 10^{-1}$	1.388	1.159	$0.882 \cdot 10^{-1}$	0.334	$0.144 \cdot 10^{-1}$	1.968	1.694					
	III						$0.877 \cdot 10^{-1}$	0.338	$0.146 \cdot 10^{-1}$	1.959	1.700	$0.155 \cdot 10^{-1}$	0.332	$0.621 \cdot 10^{-3}$	3.058	5.081
$\alpha = 135°$	λ	$8/3\pi$					$4/3\pi$					$2/3\pi$				
	I	0.118	0.285	$0.270 \cdot 10^{-1}$	1.396	1.376	$0.265 \cdot 10^{-1}$	0.273	$0.246 \cdot 10^{-2}$	1.966	2.896	$0.214 \cdot 10^{-2}$	0.271	$0.219 \cdot 10^{-1}$	3.060	19.14
	II	0.118	0.286	$0.271 \cdot 10^{-1}$	1.397	1.374	$0.265 \cdot 10^{-1}$	0.274	$0.247 \cdot 10^{-2}$	1.967	2.828					
	III						$0.268 \cdot 10^{-1}$	0.276	$0.248 \cdot 10^{-2}$	1.967	2.894	$0.216 \cdot 10^{-2}$	0.272	$0.219 \cdot 10^{-1}$	3.067	19.09

В случае первой задачи для ряда неплоских штампов (наклонный штамп, параболический штамп) численным анализом также установлено смыкание асимптотических решений при больших и малых λ. В тех же случаях, когда смыкания не удается достигнуть с достаточной для практики степенью точности, приближенные решения интегрального уравнения (1.3) или (2.1) могут быть получены в области отсутствия смыкания методом сведения его к системе линейных алгебраических уравнений [8, 9]. Возможность такого подхода показана, кстати, в недавно вышедшей работе [10].

Ростовский государственный
университет

Поступила 3 VII 1967

Վ. Մ. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՈՎ

ՄԵԿ ՆԻՍՏՈՎ ԿՈՇՏ ԱՄՐԱԿՑՎԱԾ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՍԵՊԻ ԿՈՆՏԱԿՏԱՅԻՆ ԽՆԴԻՐՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Առաձգական սեպի համար երկու հարթ կոնտակտային խնդիրները հանգեցված են (1.3) ինտեգրալ հավասարման հետազոտմանը: Գտնված են այդ հավասարման ասիմպտոտիկ լուծումները չափողականություն չունեցող պարամետրի մեծ և փոքր արժեքների դեպքում $\lambda = 2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1}$.

Ցույց է տրված, որ պրակտիկորեն հետաքրքիր բոլոր դեպքերի համար, ստացված պարզ ասիմպտոտիկ բանաձևերով տրվում են դիտարկվող խնդիրների լուծումները:

Միաժամանակ ուղղված է [1] նկատված անճշտությունը:

V. M. ALEXANDROV

ON CONTACT PROBLEMS FOR AN ELASTIC WEDGE WITH ONE FIXED SIDE

Summary

Two plane contact problems for an elastic wedge are reduced to exploring the integral equation (1.3). Asymptotic solutions are found for this equation under big and little rates of undimensional parameter $\lambda = 2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^{-1}$. It is shown that for all obtained practical interesting cases, simple asymptotic formulas give full solutions of examined problems. By the way, the noticed inaccuracy is corrected in [1].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Об одной контактной задаче для упругого клина. Изв. АН АрмССР, механика, т. 20, № 1, 1967.
2. *Александров В. М.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, т. 26, вып. 5, 1962.
3. *Александров В. М.* К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, т. 27, вып. 5, 1963.
4. *Александров В. М., Бабешко В. А.* Контактные задачи для упругой полосы малой толщины. Изв. АН СССР, механика, № 2, 1965.
5. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории апроксимации. Изд. „Наука", 1965.
6. *Нобл Б.* Метод Винера-Хопфа. Изд. иностр. лит., 1962.
7. *Янке Е.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959.
8. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 14, № 3, 1961.
9. *Александров В. М.* О приближенном решении одного класса интегральных уравнений. Изв. АН АрмССР, серия физ.-мат. наук, т. 17, № 2, 1964.
10. *Лутченко С. А.* О вдавливании штампа в боковую поверхность упругого основания в виде клина. Прикл. механика, т. 2, вып. 12, 1966.