ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 2, 1968 Механика

А. А. БАБЛОЯН, В. С. ТОНОЯН

О ВДАВЛИВАНИИ КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА В УПРУГОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

Задача о давлении кольцевого штампа в упругое полупространство рассматривалась в работах [1—6]. Однако, в работах [1—3] результаты получены в форме, мало пригодной для практического применения.

Приближенное решение рассматриваемой задачи было предложено К. Е. Егоровым [4] и З. Олесяком [5].

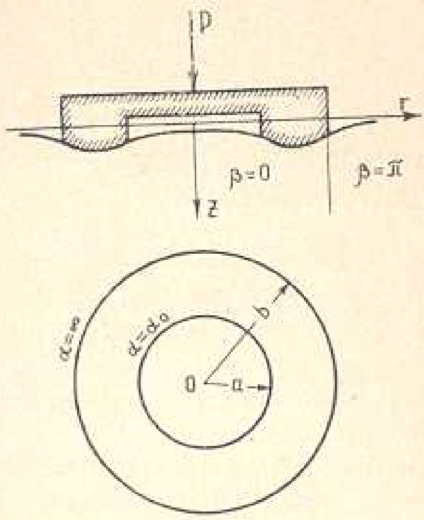
В работе [6] при помощи цилиндрической системы координат решение указанной задачи (когда штамп имеет плоское основание) сведено к „тройным“ интегральным уравнениям. Решение „тройных“ интегральных уравнений обоими способами, приведенными в этой работе, для более общего случая подробно исследовано в работах Дж. К. Кука [7, 8].

В настоящей статье рассмотрена задача о давлении жесткого штампа, имеющего в плане форму кругового концентрического кольца, на упругое полупространство. Предполагается, что трение между штампом и полупространством отсутствует. Для простоты принимается также, что граница полупространства вне штампа свободна от внешних усилий.

Задача решается в тороидальной системе координат [9]. Решение представлено в виде интеграла по присоединенным сферическим функциям $P_{-1/2+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$. Определение коэффициентов интегрирования сведено к решению „парных“ интегральных уравнений по функциям Лежандра с комплексным индексом действительного аргумента [10—13]. Решение этих „парных“ интегральных уравнений сводится к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

В частности, получено решение задачи о вдавливании круглого в плане жесткого штампа на упругое полупространство, рассматривавшееся в работах многих авторов. В качестве примера решена задача о давлении жесткого кольцевого штампа с плоским основанием на упругое полупространство. Приведен численный пример.

§ 1. Рассмотрим задачу о давлении кольцевого в плане жесткого штампа с произвольной формой основания на упругое изотропное полупространство (фиг. 1). На штамп действует вертикальная сила, направленная по оси симметрии. Для простоты предполагается, что вне штампа поверхность полупространства свободна от напряжений, а силы трения между штампом и упругим полупространством отсутствуют. Граничные условия при $z=0$ для рассматриваемой контактной задачи имеют следующий вид:



Фиг. 1.

$$\begin{aligned} &\sigma_z(r,\ 0)=0 \qquad 0\leqslant r<a \\ &u_z(r,\ 0)=g(r) \quad a\leqslant r\leqslant b \qquad (1.1) \\ &\sigma_z(r,\ 0)=0 \qquad b<r<\infty \end{aligned}$$

$$\tau_{rz}(r,\ 0)=0 \quad 0\leqslant r<\infty \qquad (1.2)$$

(r, φ, z — цилиндрические координаты).

Здесь σ_z и τ_{rz} — соответственно нормальные и касательные напряжения, u_z — проекция вектора перемещения на ось oz.

Для сведения рассматриваемой задачи к краевым задачам теории упругости, используем представление упругих смещений и напряжений, в осесимметричном случае, через две гармонические функции Папковича-Нейбера [9]

$$2Gu_r=-\frac{\partial f}{\partial r}-z\frac{\partial\Phi}{\partial r},\qquad 2Gu_z=(3-4\nu)\,\Phi-\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

$$\sigma_z=2\,(1-\nu)\,\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-z\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

$$\tau_{rz}=\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-2\nu)\,\Phi-\frac{\partial f}{\partial z}-z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right] \qquad (1.3)$$

$$\sigma_r=2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{\partial^2 f}{\partial r^2}-z\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2},\qquad \sigma_\varphi=2\nu\frac{\partial\Phi}{\partial z}-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{z}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}$$

(G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона).

Для гармонической функции

$$\Psi=(1-2\nu)\,\Phi-\frac{\partial f}{\partial z} \qquad (1.4)$$

из граничного условия (1.2) сразу находим $\Psi=0$* и остается найти гармоническую в полупространстве $z>0$ функцию, удовлетворяющую смешанным граничным условиям (1.1) при $z=0$.

Исключая теперь с помощью (1.4) одну из двух функций Папковича-Нейбера (например, f), находим из (1.1), что гармоническая

* Если вместо условия (1.2) было бы $\tau_{rz}(r,\ 0)=\varphi(r)$, то функцию Ψ можно было бы считать известной из решения задачи Дирихле для полупространства.

функция $\Phi(r, z)$ должна удовлетворять следующим смешанным краевым условиям на границе полупространства:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \qquad 0 \leqslant r < a$$

$$\Phi\Big|_{z=0} = \frac{G}{1-\nu} g(r) \qquad a \leqslant r \leqslant b \tag{1.5}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{z=0} = 0 \qquad b < r < \infty$$

Вводя тороидальные координаты (α, β) соотношениями [9]

$$r = \frac{b \operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}, \qquad z = \frac{b \sin\beta}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta} \tag{1.6}$$

и учитывая, что

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{\beta=0} = \frac{\operatorname{ch}\alpha + 1}{b} \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right|_{\beta=0}, \qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{\beta=\pi} = \frac{\operatorname{ch}\alpha - 1}{b} \left.\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right|_{\beta=\pi} \tag{1.7}$$

можно переписать условия (1.5) в виде

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right|_{\beta=0} = 0 \quad 0 \leqslant \alpha < \alpha_0$$

$$\Phi\Big|_{\beta=0} = \frac{G}{1-\nu} g(\alpha) \quad \alpha_0 \leqslant \alpha < \infty \tag{1.8}$$

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right|_{\beta=\pi} = 0 \quad 0 < \alpha < \infty \tag{1.9}$$

где $\operatorname{th}\frac{\alpha_0}{2} = a/b$.

В тороидальной системе координат $\Phi(\alpha, \beta)$ удовлетворяет следующему уравнению:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}\frac{\partial\Phi}{\partial\alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\operatorname{sh}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}\frac{\partial\Phi}{\partial\beta}\right) = 0 \tag{1.10}$$

Решение уравнения (1.10), ограниченные при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$, ищем в виде

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{G}{1-\nu}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta} \int_0^\infty [A(\tau)\operatorname{ch}\beta\tau + B(\tau)\operatorname{sh}\beta\tau] P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\, d\tau \tag{1.11}$$

где $P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)$ — функция Лежандра первого рода.

Удовлетворяя граничным условиям (1.9) и используя преобразования Мелера-Фока, получим

$$A(\tau)\operatorname{sh}\pi\tau + B(\tau)\operatorname{ch}\pi\tau = 0 \tag{1.12}$$

Исключая $B(\tau)$ из уравнений (1.11) и (1.12), найдем

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{G}{1-\nu}\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}\int_0^\infty A(\tau)\frac{\operatorname{ch}(\pi-\beta)\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau \quad (1.13)$$

Удовлетворяя теперь граничным условиям (1.8), для определения функции $A(\tau)$ получим следующие „парные" интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \tau \operatorname{th}\pi\tau A(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = 0 \qquad 0 \leqslant \alpha < \alpha_0 \\ &\int_0^\infty A(\tau) P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = \frac{g(\alpha)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + 1}} \qquad \alpha_0 \leqslant \alpha < \infty \end{aligned} \quad (1.14)$$

„Парные" интегральные уравнения типа (1.14) рассматривались в работах [10—12]. Однако, уравнения (1.14) по своей структуре несколько отличаются от уравнений, рассмотренных в работах [10—12].

§ 2. Для решения уравнений (1.14) поступим следующим образом. Имея в виду, что

$$\frac{1}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\alpha + 1)}} = \int_0^\infty \frac{1}{\operatorname{ch}\pi\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau \quad (2.1)$$

а полагая $A(\tau) - \sqrt{2}\,g(\infty)/\operatorname{ch}\pi\tau = \operatorname{th}\pi\tau\, C(\tau)$, приходим к уравнениям

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \tau C(\tau)[1 + N(\tau)] P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = f_1(\alpha) \qquad 0 \leqslant \alpha < \alpha_0 \\ &\int_0^\infty C(\tau) \operatorname{th}\pi\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = f_2(\alpha) \qquad \alpha_0 \leqslant \alpha < \infty \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} &f_1(\alpha) = -\sqrt{2}\,g(\infty)\int_0^\infty \frac{\tau \operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau = -\frac{g(\infty)}{\sqrt{2}\,\pi \operatorname{ch}^2\frac{\alpha}{2}} \\ &f_2(\alpha) = \frac{g(\alpha) - g(\infty)}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2}}, \qquad N(\tau) = -\frac{1}{\operatorname{ch}^2\pi\tau} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Решение парных уравнений (2.2) представим в виде

$$\frac{\pi}{2}\tau C(\tau) = \tau\int_0^{\alpha_0} G_1(s)\sin\tau s\,ds - \tau\int_{\alpha_0}^\infty H'(s)\sin\tau s\,ds = -G_1(\alpha_0)\cos\tau\alpha_0 +$$

$$+\int_0^{\alpha_0} G(s)\cos\tau s\,ds+\int_{\alpha_0}^{\infty} H''(s)\cos\tau s\,ds \tag{2.4}$$

где

$$G_1(s)=\int_0^s G(s)\,ds,\qquad G_1'(s)=G(s)$$

$$H(s)=\int_s^{\infty}\frac{f_2(\alpha)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}} \tag{2.5}$$

$G(s)$ — пока неизвестная функция.

Тогда, учитывая значения интеграла

$$\int_0^{\infty}\operatorname{th}\pi\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\sin\tau s\,ds=\begin{cases}[2(\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha)]^{-1/2} & (0<\alpha<s)\\ 0 & (0<s<\alpha)\end{cases} \tag{2.6}$$

и пользуясь преобразованием Абеля, получим, что второе уравнение (2.2) удовлетворяется тождественно.

Пользуясь формулами

$$\int_0^{\infty}P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos\tau s\,ds=\begin{cases}[2(\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s)]^{-1/2} & (0<s<\alpha)\\ 0 & (0<\alpha<s)\end{cases} \tag{2.7}$$

и (2.4), для первого интеграла (2.2) найдем выражение

$$\int_0^{\infty}\tau C(\tau)[1+N(\tau)]P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\,d\tau=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{\pi}G_1(\alpha_0)\int_0^{\infty}N(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos\alpha_0\tau\,d\tau+\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha}\frac{G(s)\,ds}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_0^{\alpha_0}G(s)\,ds\int_0^{\infty}N(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos\tau s\,d\tau-$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int_{\alpha_0}^{\infty}H''(s)\,ds\int_0^{\infty}N(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos\tau s\,d\tau \tag{2.8}$$

Из первого уравнения (2.2) и (2.8) получим интегральное уравнение Абеля

$$\int_0^{\alpha}\frac{G(s)\,ds}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}}=-\sqrt{2}\int_0^{\alpha_0}G(s)\,ds\int_0^{\infty}N(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos\tau s\,d\tau+$$

$$+\sqrt{2}\,G_1(\alpha_0)\int_0^\infty N(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos\alpha_0\tau d\tau+\pi f_1(\alpha)+$$

$$+\sqrt{2}\int_{\alpha_0}^\infty H''(s)\,ds\int_0^\infty N(\tau)P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos\tau s d\tau \tag{2.9}$$

Решая интегральное уравнение Абеля (2.9), для определения функции $G(s)$ получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$G(s)=\int_0^{\alpha_0}K(s,\ z)\,G(z)\,dz+\Omega(s) \tag{2.10}$$

где

$$K(s,\ z)=\frac{1}{\pi^2}\left[\frac{(s+z)/2}{\operatorname{sh}(s+z)/2}+\frac{(s-z)/2}{\operatorname{sh}(s-z)/2}\right] \tag{2.11}$$

$$\Omega(s)=-\frac{g(\infty)}{\pi}\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{\operatorname{ch}s/2}\right)-\frac{G_1(\alpha_0)}{\pi^2}\left[\frac{(s+\alpha_0)/2}{\operatorname{sh}(s+\alpha_0)/2}+\right.$$

$$\left.+\frac{(s-\alpha_0)/2}{\operatorname{sh}(s-\alpha_0)/2}\right]-\frac{1}{\pi^2}\int_{\alpha_0}^\infty H''(z)\left[\frac{(s+z)/2}{\operatorname{sh}(s+z)/2}+\frac{(s-z)/2}{\operatorname{sh}(s-z)/2}\right]dz \tag{2.12}$$

При этом были использованы равенство

$$\sqrt{2}\cos\tau s=\frac{d}{ds}\int_0^s\frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\operatorname{sh}\alpha d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}} \tag{2.13}$$

и значения интегралов

$$\int_0^\infty N(\tau)\cos\tau z\cos\tau s d\tau=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{(s+z)/2}{\operatorname{sh}(s+z)/2}+\frac{(s-z)/2}{\operatorname{sh}(s-z)/2}\right]$$

$$\int_0^s\frac{f_1(\alpha)\operatorname{sh}\alpha d\alpha}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}=-\frac{g(\infty)}{\pi}\frac{s}{\operatorname{ch}s/2} \tag{2.14}$$

Так как ядро интегрального уравнения (2.10) симметрично и четно относительно своих аргументов и свободный член также четный, то, продолжая функцию $G(s)$ четно в интервале $(-\alpha_0,\ 0)$, интегральное уравнение приведем к виду

$$G(s)=\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0}K_1(s-z)\,G(z)\,dz+\Omega(s) \tag{2.15}$$

где

$$K_1(x) = \frac{1}{\pi^2} \frac{x/2}{\operatorname{sh} x/2} \tag{2.16}$$

Чтобы решить интегральное уравнение (2.15) методом последовательных приближений, докажем, что

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} |K_1(s-z)|\, dz < 1 \tag{2.17}$$

Действительно,

$$\int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} |K_1(s-z)|\, dz = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\alpha_0}^{\alpha_0} \frac{(s-z)/2}{\operatorname{sh}\dfrac{s-z}{2}} dz < \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx = \frac{1}{\pi^2} \frac{\pi^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, уравнение (2.15) можно решить методом последовательных приближений, после чего нетрудно найти функции $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$ посредством квадратуры, а следовательно, напряжения и перемещения в любой точке полупространства.

Решение интегрального уравнения (2.15) выражается через постоянную $G_1(\alpha_0)$, так как свободный член интегрального уравнения (2.12) содержит эту постоянную. Подставляя найденное решение в первое выражение (2.5) и принимая $s = \alpha_0$, получим линейное уравнение относительно $G_1(\alpha_0)$, откуда и определяется эта постоянная.

Нормальное напряжение $\sigma_z(r, 0)$ под штампом, выраженное через функцию $G(z)$, имеет вид

$$\sigma_z(r, 0) = \frac{\operatorname{ch}\alpha + 1}{b} \frac{\partial \Phi}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0} = -\frac{2Gg(\infty)}{\pi b(1-\nu)} \operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} +$$

$$+\frac{GG_1(\alpha_0)}{\pi^2 b(1-\nu)} \frac{2}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\alpha_0}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}\alpha_0}} -$$

$$-\frac{2G}{\pi^2 b(1-\nu)} \int_0^{\alpha_0} \frac{G(s)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}}\, ds +$$

$$+\frac{2G}{\pi^2 b(1-\nu)} \int_{\alpha_0}^{\alpha} \frac{H''(s)}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}} \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha - \operatorname{ch}s}}\, ds -$$

$$-\frac{2G}{\pi^2 b(1-\nu)} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{H''(s)}{\sqrt{\operatorname{ch}s - \operatorname{ch}\alpha}} \ln\frac{\sqrt{\operatorname{ch}s + 1} + \sqrt{\operatorname{ch}s - \operatorname{ch}\alpha}}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha + 1}}\, ds \tag{2.18}$$

$$(\alpha_0 < \alpha < \infty)$$

При этом были использованы формула (2.7) и значения интеграла

$$\int_0^\infty \frac{P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)\cos\tau s}{\operatorname{ch}^2\pi\tau}\,d\tau =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}{1+\operatorname{ch}\alpha}} & (s<\alpha) \\ \dfrac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}\ln\dfrac{\sqrt{\operatorname{ch}s+1}+\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}}{\sqrt{2}\operatorname{ch}\dfrac{\alpha}{2}} & (\alpha<s) \end{cases} \tag{2.19}$$

Нормальное перемещение вне штампа выражается через функцию $G_1(s)$ следующими формулами:

$$u_z(r,\ 0)\,|_{\beta=0} = g(\alpha) + \frac{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}}{\pi}\int_\alpha^{\alpha_0}\frac{G_1(s)\,ds}{\sqrt{\operatorname{ch}s-\operatorname{ch}\alpha}} \quad 0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0 \tag{2.20}$$

$$u_z(r,\ 0)\,|_{\beta=\pi} = \frac{2g(\infty)}{\pi}\operatorname{arctg}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} +$$

$$+\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\int_0^{\alpha_0}\frac{G_1(s)}{\sqrt{\operatorname{ch}s+\operatorname{ch}\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\operatorname{ch}s+\operatorname{ch}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ch}s-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}}\,ds -$$

$$-\frac{2\sqrt{2}}{\pi^2}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\int_{\alpha_0}^{\infty}\frac{H'(s)}{\sqrt{\operatorname{ch}s+\operatorname{ch}\alpha}}\ln\frac{\sqrt{\operatorname{ch}s+\operatorname{ch}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ch}s-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}}\,ds \tag{2.21}$$

$$(0\leqslant\alpha<\infty)$$

Здесь использованы преобразования Абеля, формула (2.6) и значения интеграла

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{th}\pi\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(\operatorname{ch}\alpha)}{\operatorname{ch}\pi\tau}\sin\tau s\,d\tau =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+\operatorname{ch}s}}\ln\frac{\sqrt{\operatorname{ch}s+\operatorname{ch}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ch}s-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}} \tag{2.22}$$

В частном случае, подставляя $a=0$ $(\alpha_0=0)$, получим задачу о давлении жесткого штампа с произвольным основанием, имеющего в плане форму круга, на упругое полупространство, рассмотренную в работах многих авторов. В этом случае $G_1(\alpha_0)=0$ и интегральное уравнение (2.15) отпадает, а неизвестная функция приравнивается свободному члену (2.12). Следовательно, решение этой задачи получается в замкнутом виде и совпадает с решением Я. С. Уфлянда [9].

Если в этом частном случае положим и $g(\alpha)=\delta=\text{const}$ (штамп с плоским основанием), то будем иметь

$$H(s) = C(\tau) = 0$$

$$G(s) = -\frac{\delta}{\pi}\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{\operatorname{ch} s/2}\right), \quad A(\tau) = \frac{\sqrt{2}\,\delta}{\operatorname{ch} \pi\tau}$$

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{2G\delta}{\pi(1-\nu)} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{\operatorname{ch}\alpha + \cos\beta}{1-\cos\beta}} \tag{2.23}$$

$$\sigma_z(r, 0) = -\frac{2G\delta}{\pi b(1-\nu)} \operatorname{ch} \alpha/2$$

$$u_z(r, 0) = \frac{2\delta}{\pi} \operatorname{arctg} \operatorname{sh} \alpha/2, \qquad P = 4\frac{G\delta b}{1-\nu}$$

т. е. решение, полученное ранее Я. С. Уфляндом [9].

§ 3. В качестве примера рассмотрим задачу вдавливания жесткого кольцевого штампа с плоским основанием в упругое полупространство. В этом случае $g(\alpha) = \delta = \mathrm{const}$, $f_2(\alpha) = 0$, и формула (2.5) дает $H(s) = 0$.

Следовательно, в свободном члене (2.12) интегрального уравнения (2.10) последний член исчезает. Решения интегрального уравнения (2.10) в этом случае ищем в виде

$$G(s)/\delta = A \operatorname{ch} s + B/\operatorname{ch}^2 s + C(1-\operatorname{sh}^2 s)/\operatorname{ch}^3 s \tag{3.1}$$

где A, B, C — постоянные, значения которых при различных отношениях $\varepsilon = a/b$ приведены в табл. 1.

Таблица 1

ε	0.25	0.5	0.75
A	0.0108	−0.0333	0.0738
B	0.0012	0.0552	−0.3941
C	−0.0866	−0.1321	0.1758
Относительная погрешность	0.11 %	0.31 %	0.55 %

При замене решения интегрального уравнения (2.10) функцией (3.1), как видно из табл. 1, максимальная погрешность не превышает 0.6 %.

Из (2.5) имеем

$$G_1(s)/\delta = A \operatorname{sh} s + B \operatorname{th} s + C \operatorname{th} s/\operatorname{ch} s \tag{3.2}$$

Далее из (2.18), (2.20) и (2.21) находим

$$\sigma_z(r, 0) = -\frac{2G\delta}{\pi b(1-\nu)}\left[\operatorname{ch}\frac{\alpha}{2} - \right.$$

$$-\frac{A\operatorname{sh}\alpha_0+B\operatorname{th}\alpha_0+C\operatorname{th}\alpha_0/\operatorname{ch}\alpha_0}{\pi\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}\alpha_0}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}\alpha_0}}+$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^{\alpha_0}\frac{A\operatorname{ch}s+B/\operatorname{ch}^2 s+C(1-\operatorname{sh}^2 s)/\operatorname{ch}^3 s}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1+\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha-\operatorname{ch}s}} \qquad (3.3)$$

$$(\alpha_0<\alpha<\infty)$$

$$u_z(r,\ 0)/\delta=1+\frac{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}}{\pi}\left[\sqrt{\operatorname{ch}\alpha_0-\operatorname{ch}\alpha}\left(2A+\frac{C}{\operatorname{ch}\alpha\operatorname{ch}\alpha_0}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}\alpha_0-\operatorname{ch}\alpha}{\operatorname{ch}\alpha}}\left(2B+\frac{C}{\operatorname{ch}\alpha}\right)\right] \qquad (3.4)$$

$$(0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_0)$$

$$u_z(r,\ 0)/\delta=\frac{2}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}+\right.$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{\pi}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2}\int_0^{\alpha_0}\frac{A\operatorname{sh}s+B\operatorname{th}s+C\operatorname{th}s/\operatorname{ch}s}{\sqrt{\operatorname{ch}s+\operatorname{ch}\alpha}}\times$$

$$\left.\times\ln\frac{\sqrt{\operatorname{ch}s+\operatorname{ch}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ch}s-1}}{\sqrt{\operatorname{ch}\alpha+1}}\,ds\right) \qquad (3.5)$$

$$(0\leqslant\alpha<\infty)$$

Сила, вдавливающая штамп в упругое полупространство, определяется формулой

$$P=-2\pi\int_a^b\sigma_z(r,\ 0)\,r\,dr=-2\pi b^2\int_{\alpha_0}^{\infty}\frac{\sigma_z(r,\ 0)\operatorname{sh}\alpha\,d\alpha}{(\operatorname{ch}\alpha+1)^2} \qquad (3.6)$$

Некоторые значения напряжения $\sigma_z(r,\ 0)$ и перемещения $u_z(r,\ 0)$, вычисленные по формулам (3.3)–(3.5) для различных точек границы

Таблица 2

$-\sigma_z(r,\ 0)/K$

r \ ε	0.25	0.5	0.75
$(7a+b)/8$	1.2515	0.9841	0.8643
$(3a+b)/4$	0.8757	0.7563	0.7523
$(5a+3b)/8$	0.7219	0.6744	0.7330
$(a+b)/2$	0.6491	0.6494	0.7575
$(3a+5b)/8$	0.6302	0.6667	0.8250
$(a+3b)/4$	0.6615	0.7413	0.9650
$(a+7b)/8$	0.8224	0.9661	1.3052

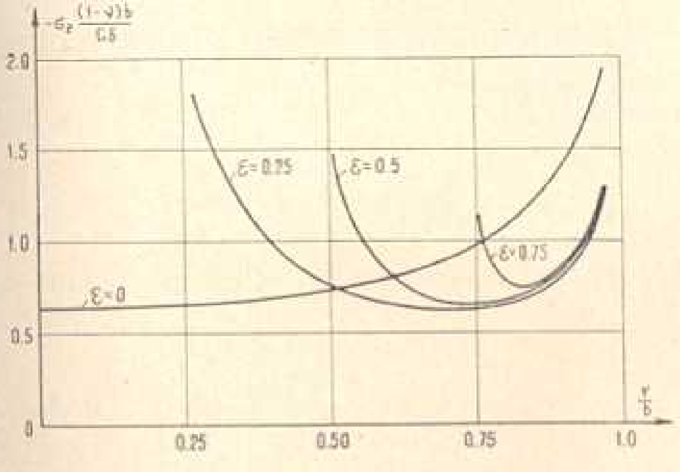
полупространства в зависимости от ε, приведены в табл. 2 и 3. В этих таблицах напряжения $\sigma_z(r, 0)$ приведены в долях $K = G\delta/b(1-\nu)$, а перемещения $u_z(r, 0)$ — в долях δ.

Таблица 3

$u_z(r, 0)/\delta$

r \ ε	0.25	0.5	0.75
0	0.9689	0.9397	0.8628
$a/8$	0.9690	0.9405	0.8637
$a/4$	0.9696	0.9429	0.8665
$3a/8$	0.9704	0.9468	0.8721
$a/2$	0.9716	0.9520	0.8814
$5a/8$	0.9732	0.9585	0.8958
$3a/4$	0.9750	0.9664	0.9170
$7a/8$	0.9772	0.9765	0.9470
a	1.0000	1.0000	1.0000
b	1.0000	1.0000	1.0000
$(a+8b)/8$	0.8428	0.7795	0.7263
$(a+4b)/4$	0.7805	0.6957	0.6277
$(3a+8b)/8$	0.7344	0.6359	0.5600
$(a+2b)/2$	0.6969	0.5888	0.5084
$(5a+8b)/8$	0.6651	0.5462	0.4670

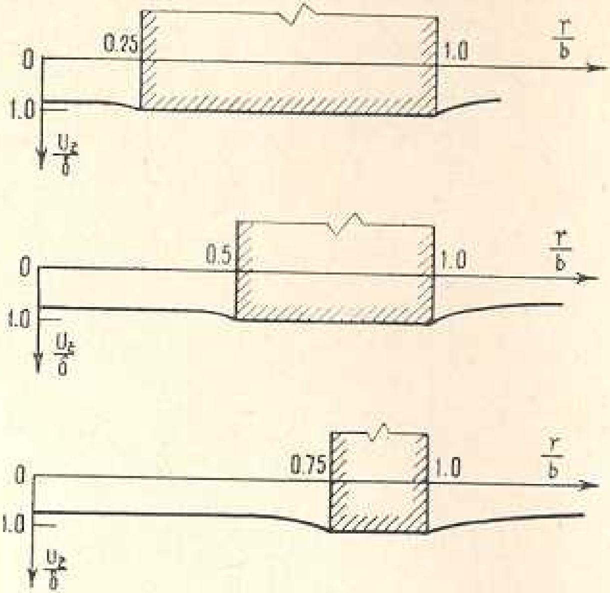
Для наглядного представления закона распределения нормальных напряжений $\sigma_z(r, 0)$ под штампом и нормальных перемещений $u_z(r, 0)$



Фиг. 2.

вне штампа на фиг. 2 и 3 приведены эпюры этих напряжений и перемещений.

Далее по формуле (3.6) находим связь между глубиной вдавливания штампа δ и величиной силы P, приложенной к штампу.



Фиг. 3.

Для рассмотренных частных случаев эта связь имеет вид

$$(1-\nu)\,P = 4.0000\, Gb\delta \qquad \varepsilon = 0$$
$$(1-\nu)\,P = 3.8818\, Gb\delta \qquad \varepsilon = 0.25$$
$$(1-\nu)\,P = 3.1870\, Gb\delta \qquad \varepsilon = 0.5$$
$$(1-\nu)\,P = 2.1627\, Gb\delta \qquad \varepsilon = 0.75$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 7 VI 1967

Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ, Վ. Ս. ՏՈՆՈՅԱՆ

ՕՂԱԿԱՅԻՆ ԴՐՈՇՄԻ ՃՆՇՈՒՄԸ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ԿԻՍԱՏԱՐԱԾՈՒԹՅԱՆ ՎՐԱ

Ամփոփում

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում է կոշտ օղակային դրոշմի ճնշման խնդիրը առաձգական կիսատարածության վրա: Ենթադրվում է, որ շփումը դրոշմի և կիսատարածության միջև, բացակայում է: Պարզության համար, ընդունված է նաև, որ կիսատարածության եզրը՝ դրոշմից դուրս, ազատ է արտաքին ուժերից: Խնդիրը լուծված է տորոիդալ կոորդինատական սիստեմում [9]: Լուծումը ներկայացված է ըստ գնդային ֆունկցիաների ինտեգրալի տեսքով: Ինտեգրման գործակիցների որոշումը բերվել է՝ ըստ Լեժանդրի կոմպլեքս ինդեքսով իրական արգումենտից ֆունկցիաների, «զույգ» ինտեգրալ հավասարումների լուծմանը [10—13]։ «Զույգ» ինտեգրալ հավասարումների լուծումը բերվում է Ֆրեդհոլմի երկրորդ սեռի ինտեգրալ հավասարման լուծմանը։ Մասնավոր դեպքում, ստացված է կոշտ շրջանային դրոշմի ճնշման խնդիրը առաձգական կիսատարածության վրա՝ դիտարկված շատ հեղինակների կողմից։ Որպես օրինակ, լուծված է՝ կոշտ օղակային հարթ հիմքով դրոշմի ճնշման խնդիրը առաձգական կիսատարածության վրա։ Բերված է թվային օրինակ։

A. H. BABLOYAN, V. S. TONOYAN

THE PRESSING OF AN ANNULAR PUNCH IN ELASTIC SEMI-SPACE

Summary

The subject of the present paper is the solution of an axially symmetric problem of an annular punch. We consider the problem for which the entire smooth base surface of the punch adheres to the semi-space; we neglect the influence of shear stresses. The problem is solved in the toroidal system of coordinates. Here, the problem can be reduced to dual integral equations with Legendre functions of real arguments with complex index.

The solution of this dual integral equations after some evaluations can be reduced to a single Fredholm integral equation of the second kind. For example, we consider an annular flat-ended punch which penetrates the elastic semi-space to a depth δ below the level of the undisturbed boundary. The numerical examples are given for three cases: $a/b = 0.25$, 0.5, 0.75.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губенко В. С., Моссаковский В. И.* Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругое полупространство. ПММ, т. 24, вып. 2, 1960.
2. *Губенко В. С.* Давление осесимметричного кольцевого штампа на упругий слой и упругое полупространство. Изв. АН СССР, ОТН, механика и машиностроение, № 3, 1960.
3. *Аркадьева Ю. О.* Задача прок льцевий штамп. Доповіді АН УССР, № 3, 1962.
4. *Егоров К. Е.* Вдавливание в полупространство штампа с плоской подошвой кольцевой формы. Изв. АН СССР, механика и машиностроение, № 5, 1963.
5. *Olesiak Z.* Annular punch on elastic semi-space. Archiwum mechaniki stosowanej, vol. 17, № 4, 1965.
6. *Бородачев Н. М., Бородачева Ф. Н.* Вдавливание кольцевого штампа в упругое полупространство. МТТ, № 4, 1966.
7. *Cooke J. C.* Triple integral equations. Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. 16, part 2, 1963.

8. *Cooke J. C.* Some further triple integral equation solution. Proc. Edinburgh Math. Soc., vol. 13, part 4, 1963.
9. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд-во АН СССР, М.-Л., 1963.
10. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, вып. 6, 1964.
11. *Руховец А. Н., Уфлянд Я. С.* Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. ПММ, т. 30, вып. 2, 1966.
12. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. Инж. физ. ж., т. 5, вып. 10, 1963.
13. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Растяжение упругого пространства, ослабленного кольцевой трещиной. Прикл. механика, т. 1, вып. 10, 1965.