

Р. М. КИРАКОСЯН

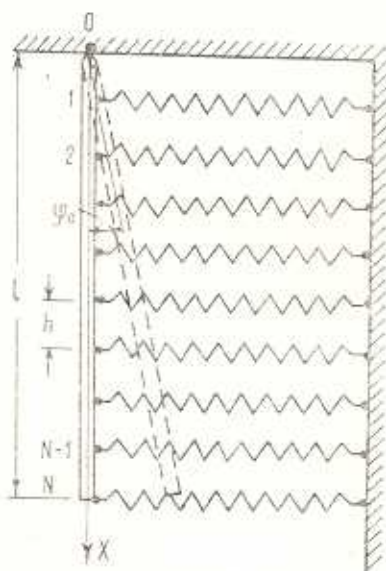
ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ В СИСТЕМЕ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКИ ДЕФОРМИРУЕМЫХ ПРУЖИН

Вопросам упруго-пластических колебаний конструкций посвящено немало работ ([1—5] и др.), но, тем не менее, этот раздел современной механики изучен недостаточно полно.

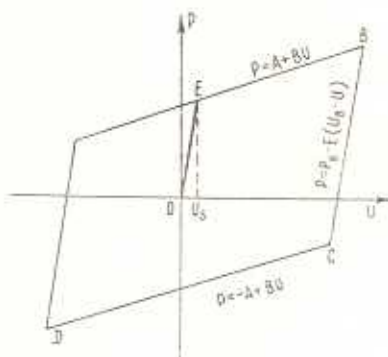
В настоящей работе рассматривается один случай свободных колебаний вертикально подвешенного на шарнире жесткого стержня в системе упруго-пластически деформируемых пружин. В рамках деформационной теории пластичности линейно упрочняющегося материала [6], учитывающей эффект Баушингера при обратном нагружении, определяется максимальное отклонение стержня в процессе колебания. Приведен численный пример.

1. Рассмотрим вертикально подвешенный на шарнире абсолютно жесткий стержень, который горизонтальными пружинами связан с

жесткой вертикальной стеной. Для простоты будем считать, что пружины одинаковы и расположены с постоянным шагом $h=l/N$ (l —длина стержня, N —число пружин, фиг. 1).



Фиг. 1.



Фиг. 2.

В качестве зависимостей между усилием и удлинением (укорачиванием) пружин будем принимать соотношения деформационной теории пластичности линейно упрочняющегося материала [6], учитывающие эффект Баушингера при обратном нагружении (фиг. 2)

$$\begin{aligned}
 P &= Eu \text{ на } OE \quad (0 < u < u_s) \\
 P &= A + Bu \text{ на } EB \quad (u \geq u_s) \\
 P &= P_B - E(u_s - u) \text{ на } BC \quad (0 < u_s - u < 2u_s) \\
 P &= -A + Bu \text{ на } DC
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь P — усилие, u — удлинение (укорачивание), u_s — предел упругих удлинений, E , B , $A = (E - B)u_s$ — механические характеристики пружин.

Пусть стержень выведен из вертикального положения равновесия на некоторый малый угол φ_0 . Рассмотрим случай, когда в некоторых пружинах в результате этого отклонения создается упруго-пластическое напряженно-деформированное состояние. Пронумеровав пружины, начиная с шарнирного конца стержня, для номеров упруго-деформируемых пружин будем иметь

$$1 < n \leq n_s = \frac{1}{h} \left(\frac{u_s}{\varphi_0} - \delta \right), \quad (0 < \delta < h) \tag{1.2}$$

Пружины с остальными номерами

$$n_s < n \leq N \tag{1.3}$$

будут испытывать упруго-пластические деформации.

Очевидно, что если отпустить таким образом отклоненный стержень без начальной скорости, то он совершит свободные колебания, а пружины будут претерпевать как упругие (1.2), так и упруго-пластические (1.3) деформации.

В силу наличия остаточных деформаций в пружинах (1.3) можно утверждать, что всегда

$$|\varphi| < \varphi_0 \tag{1.4}$$

При этом наибольшее отклонение в обратном направлении φ_0 стержень получит в первом цикле колебаний, так как полная энергия системы в дальнейшем уменьшится в результате ее израсходования на образование новых пластических деформаций в пружинах (1.3).

Цель настоящей работы заключается в нахождении максимального отклонения стержня в обратном направлении φ_0 , для чего на основе вышесказанного достаточно исследовать движение стержня до момента времени, когда его угловая скорость в первый раз обратится в нуль.

В силу условия (1.4) в пружинах с номерами (1.2) всегда реализуется упругое напряженно-деформированное состояние. Следовательно, для усилий этих пружин с учетом (1.1) будем иметь

$$P = Ehn\varphi \quad (1 \leq n \leq n_s, \quad \varphi \leq \varphi_0) \tag{1.5}$$

В каждой из остальных пружин (1.3) с начала движения стержня будет происходить разгрузка, потом — обратное упругое нагружение до

достижения в них предела упругости, после чего—процесс нагружения с сопровождением обратных упруго-пластических деформаций. В силу эффекта Баушингера предел упругости при обратном нагружении меньше, чем начальный предел упругости и зависит от уровня первоначального напряженного состояния.

Имея в виду (1.1), для предела обратных упругих удлинений пружин произвольных номеров $n > n_s$ получим

$$u'_s = nh\varphi_0 - 2u_s \quad (1.6)$$

Очевидно, что впервые своего нового предела упругих удлинений достигнет крайняя пружина с номером N . Это будет тогда, когда стержень с вертикалью образует угол φ_N

$$\varphi_N = \varphi_0 - \frac{2u_s}{l} \quad (1.7)$$

При дальнейшем движении стержня предел упругих удлинений обратного нагружения u'_s поочередно будет достигаться в пружинах с номерами $N-1$, $N-2$, $N-3$ и т. д. Для значения угла φ_q , при котором в пружине с номером q достигнется этот предел, с помощью (1.6) получим

$$\varphi_q = \varphi_0 - \frac{2u_s}{qh} \quad (1.8)$$

номер последней пружины, входящей в упруго-пластическую область обратного деформирования, при произвольном значении угла φ будет

$$n_{\varphi} = \frac{2u_s}{h(\varphi_0 - \varphi)} + \frac{\eta}{h}, \quad (0 < \eta < h) \quad (1.9)$$

Попутно заметим, что в силу (1.4) справедливо неравенство

$$n_{\varphi} > n_s \quad (1.10)$$

Связь между усилием и удлинением пружин (1.3) при $\varphi_N \leq \varphi \leq \varphi_0$ с учетом (1.1) можно представить в виде

$$P_n = A - (E - B)\varphi_0 hn + Ehn\varphi \quad (1.11)$$

$$(n_s < n \leq N, \quad \varphi_N \leq \varphi < \varphi_0)$$

При дальнейшем движении стержня вместо соотношений (1.11) будем иметь

$$а) \quad P_n = A - (E - B)\varphi_0 hn + Ehn\varphi$$

при

$$n_s < n \leq n_{\varphi} = \frac{1}{h} \left(\frac{2u_s}{\varphi_0 - \varphi} + \eta \right), \quad (0 < \eta < h) \quad (1.12)$$

$$б) \quad P_n = -A + Bnh\varphi \quad \text{при} \quad n_{\varphi} < n \leq N \quad (1.13)$$

Пренебрегая массой пружин по сравнению с массой стержня и пользуясь теорией о кинетическом моменте системы, для описания движения стержня получим следующее дифференциальное уравнение:

$$J_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -h \sum_{n=1}^N n P_n - \frac{mgl^2}{2} \varphi \quad (1.14)$$

где $J_0 = ml^3/3$ — момент инерции стержня относительно оси шарнира подвеса, m — масса единичной длины стержня, g — ускорение силы тяжести.

Внося выражения усилий P_n из (1.5) и (1.11) в (1.14), после некоторых преобразований для уравнения движения стержня при $\varphi_N \leq \varphi \leq \varphi_0$ получим

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k^2 \varphi = c, \quad (\varphi_N \leq \varphi \leq \varphi_0) \quad (1.15)$$

где

$$k^2 = \frac{Eh^2}{6J_0} N(N+1)(2N+1) + \frac{mgl^2}{2J_0}$$

$$c = \frac{(E-B)\varphi_0 h^2}{6J_0} [N(N+1)(2N+1) - n_s(n_s+1)(2n_s+1)] -$$

$$- \frac{Ah}{2J_0} (N^2 + N - n_s^2 - n_s) \quad (1.16)$$

Для полноты присоединим к уравнению (1.15) соответствующие начальные условия

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0, \quad \omega|_{t=0} = \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t=0} = 0 \quad (1.17)$$

Решение уравнения (1.15) с учетом начальных условий (1.17) будет

$$\varphi = \left(\varphi_0 - \frac{c}{k^2} \right) \cos kt + \frac{c}{k^2}, \quad (\varphi_N \leq \varphi \leq \varphi_0) \quad (1.18)$$

При $\varphi = \varphi_N$, когда в крайней пружине с номером N достигается предел упругих удлинений обратного нагружения, для угловой скорости стержня из (1.18) получим

$$\omega_N = \left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{\varphi = \varphi_N} = -\frac{1}{k} \sqrt{(\varphi_0 k^2 - c)^2 - (\varphi_N k^2 - c)^2} \quad (1.19)$$

Из (1.19) следует, что

$$\omega_N < 0$$

т. е. при $\varphi = \varphi_N$ стержень продолжает вращаться в том же направлении.

Внеся выражения усилий P_n из (1.5), (1.12) и (1.13) в (1.14) и произведя суммирование в соответствующих промежутках номеров пружин, для дальнейшего движения стержня получим

$$J_0 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \frac{Ah}{2} (n_s^2 + n_s + N^2 + N) - \frac{(E-B) \tau_0 h^2}{6} n_s (n_s + 1) (2n_s + 1) - \\ - \left[\frac{mg l^2}{2} + \frac{Bh^2}{6} N(N+1)(2N+1) \right] \varphi - Ah n_s (n_s - 1) + \\ + \frac{(E-B)}{6} h^2 n_s (n_s - 1) (2n_s - 1) (\tau_0 - \varphi) \quad (1.20)$$

Заметим, что фигурирующая в этом уравнении n_s является кусочно-постоянной разрывной функцией угла φ с единичным шагом разрыва.

Уравнение (1.20) в любом интервале углов $\varphi_q - \varphi_{q-1}$, в течение которого

$$n_s = q = \text{const}, \quad (q = N-1, N-2, \dots)$$

можно представить в виде

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k_q^2 \varphi = Q_q \quad (1.21)$$

где

$$k_q^2 = \frac{1}{6J_0} [3mg l^2 + Bh^2 N(N+1)(2N+1) + (E-B) h^2 q(q-1)(2q-1)] \\ Q_q = \frac{1}{6J_0} [3Ah [n_s^2 + n_s + N^2 + N - 2q(q-1)] - (E-B) \tau_0 h^2 [n_s (n_s + \\ + 1) (2n_s + 1) - q(q-1)(2q-1)]] \quad (1.22)$$

В качестве начальных условий следует брать значения угла φ и угловой скорости ω в момент времени t_q , при котором в пружине с номером q достигается предел упругих удлинений обратного нагружения u_s , т. е.

$$\varphi|_{t=t_q} = \varphi_q = \tau_0 - \frac{2u_s}{qh}, \quad \omega|_{t=t_q} = \omega_q$$

Так как в настоящей работе нас не интересует само время, сделаем замену

$$\tau_q = t - t_q \quad (1.23)$$

которая не меняет уравнения (1.21), но упрощает начальные условия, приводя их к виду

$$\varphi|_{\tau_q=0} = \varphi_q, \quad \omega|_{\tau_q=0} = \omega_q \quad (1.24)$$

Решение уравнения (1.21), с учетом (1.23) и (1.24), будет

$$\ddot{\varphi} = \left(\ddot{\varphi}_q - \frac{Q_q}{k_q^2} \right) \cos k_q \tau_q + \frac{\omega_q}{k_q} \sin k_q \tau_q + \frac{Q_q}{k_q^2}, \quad (q = N-1, N-2, \dots) \quad (1.25)$$

Для значения угловой скорости стержня ω_q , используя рекуррентное выражение (1.25), записанное для интервала углов $\ddot{\varphi}_{q+1} - \ddot{\varphi}_q$, получим

$$\omega_q = - \sqrt{\omega_{q+1}^2 + k_{q+1}^2 (\ddot{\varphi}_{q+1} - \ddot{\varphi}_q^2) - 2Q_{q+1} (\ddot{\varphi}_{q+1} - \ddot{\varphi}_q)} \quad (1.26)$$

Таким образом, движение стержня для $t > t_N$ до его первой остановки можно описать рекуррентными выражениями (1.25) и (1.26).

Предположим, что максимальное отклонение стержня в обратном направлении $\ddot{\varphi}_*$ находится между углами φ_r и φ_{r-1} , т. е.

$$|\ddot{\varphi}_*| < |\ddot{\varphi}_{r-1}| \quad (1.27)$$

Тогда, используя условия

$$\omega|_{\varphi=\varphi_*} = \frac{d\varphi}{dt} \Big|_{\varphi=\varphi_*} = 0$$

из (1.25) находим

$$\ddot{\varphi}_* = \ddot{\varphi}_r = \frac{1}{k_r^2} \left[Q_r - \sqrt{(\ddot{\varphi}_r k_r^2 - Q_r)^2 + \omega_r^2 k_r^2} \right] \quad (1.28)$$

Поэтому для нахождения значения $\ddot{\varphi}_*$ следует с помощью значения угловой скорости стержня ω_N , формулы (1.8) и рекуррентных выражений (1.22), (1.26) и (1.28) последовательно вычислить значения угла φ_q ($q = N-1, N-2, \dots$) до тех пор, пока удовлетворится условие (1.27).

При достаточно большом N эти вычисления целесообразно делать на ЭВМ.

2. Рассмотрим случай, когда пружины с характеристиками (1.1) равномерно расположены настолько плотно (l — пружин на единичной длине), что их можно считать непрерывно распределенными.

Обозначая через ε суммарное усилие соседних l пружин, вместо уравнения движения стержня (1.14) будем иметь

$$J_0 \frac{d^2 \ddot{\varphi}}{dt^2} = - \int_0^l \varepsilon x dx - \frac{mgl^2}{2} \ddot{\varphi} \quad (2.1)$$

(x — вертикальная координата, отсчитываемая от центра шарнира подвеса „ O “).

Не вдаваясь в подробности, приведем соотношения между ε и $\ddot{\varphi}$, аналогичные соотношениям (1.5), (1.11)–(1.13):

а) при $\ddot{\varphi}_0 - \frac{2u_*}{l} = \ddot{\varphi}_1 < \ddot{\varphi} < \ddot{\varphi}_0$

$$\begin{aligned} \sigma &= E_1 \varphi x, \quad \left(0 \leq x \leq x_s = \frac{u_s}{\varphi_0} \right) \\ \sigma &= A_1 - (E_1 - B_1) \varphi_0 x + E_1 \varphi x, \quad (x_s \leq x \leq l) \end{aligned} \quad (2.2)$$

б) при $\varphi \leq \varphi_1 = \varphi_0 - \frac{2u_s}{l}$

$$\begin{aligned} \sigma &= E_1 \varphi x, \quad (0 \leq x \leq x_s) \\ \sigma &= A_1 - (E_1 - B_1) \varphi_0 x + E_1 \varphi x, \quad \left(x_s \leq x \leq x_2 = \frac{2u_s}{\varphi_0 - \varphi} \right) \\ \sigma &= -A_1 + B_1 \varphi x, \quad (x_2 \leq x \leq l) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь $A_1 = \lambda A$, $B_1 = \lambda B$, $E_1 = \lambda E$ — постоянные.

В результате выкладок, аналогичных соответствующим выкладкам п. 1, для значения угловой скорости ω_1 при $\varphi = \varphi_1 = \varphi_0 - \frac{2u_s}{l}$ получим

$$\omega_1 = -\frac{1}{k_1} \sqrt{(\varphi_0 k_1^2 - Q_1)^2 - (\varphi_1 k_1^2 - Q_1)^2} < 0 \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{l^2}{6J_0} (2E_1 l + 3mg) \\ Q_1 &= \frac{E_1 - B_1}{6J_0} \varphi_0 (l - x_s) (2l^2 - lx_s - x_s^2) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Внося (2.3) в (2.1), для дальнейшего движения стержня до его первой остановки ($\omega = 0$) получим следующее нелинейное дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + k_2^2 \varphi + \frac{k_3^2}{(\varphi_0 - \varphi)^2} = Q_2 \quad (\varphi \leq \varphi_1) \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} k_2^2 &= \frac{l^2}{6J_0} (2B_1 l + 3mg) \\ Q_2 &= \frac{E_1 - B_1}{6J_0} u_s (x_2^2 + 3l^2) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Представим уравнение (2.6) в виде

$$\omega d\omega = \left[Q_2 - k_2^2 \varphi - \frac{k_3^2}{(\varphi_0 - \varphi)^2} \right] d\varphi \quad (2.8)$$

Интегрируя обе части этого уравнения и имея в виду начальное условие

$$\omega \Big|_{\varphi=\varphi_1} = \omega_1$$

получим

$$\omega^2 = \omega_1^2 + 2Q_2(\varphi - \varphi_1) - k_2^2(\varphi^2 - \varphi_1^2) - \frac{2k_3^2(\varphi - \varphi_1)}{(\varphi_0 - \varphi_1)(\varphi_0 - \varphi)} \quad (2.9)$$

Полагая в этом выражении $\omega = 0$, относительно наибольшего отклонения стержня в обратном направлении φ_* получим следующее кубическое уравнение:

$$\begin{aligned} \varphi_*^3 - \frac{2Q_2 + k_2^2 \varphi_0}{k_2^2} \varphi_*^2 + \frac{1}{k_2^2} \left[2Q_2(\varphi_0 + \varphi_1) - \omega_1^2 - k_2^2 \varphi_1^2 - \frac{2k_3^2}{\varphi_0 - \varphi_1} \right] \varphi_* + \\ + \frac{\varphi_0}{k_2^2} (\omega_1^2 - 2Q_2 \varphi_1 + k_2^2 \varphi_1^2) + \frac{2k_3^2 \varphi_1}{k_2^2 (\varphi_0 - \varphi_1)} = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

При этом, из действительных корней этого уравнения в силу (2.4) следует брать тот, который удовлетворяет условию

$$\varphi_* < \varphi_1 \quad (2.11)$$

3. Рассмотрим следующий числовой пример:

$$\begin{aligned} l = 100 \text{ см}, \quad m = 0.1 \frac{\text{кг} \cdot \text{сек}^2}{\text{см}^2}, \quad \varphi_0 = 0.2 \\ N = 100, \quad u_s = 10 \text{ см}, \quad E = 1 \frac{\text{кг}}{\text{см}}, \quad B = 0.5 \frac{\text{кг}}{\text{см}} \\ A = 5 \text{ кг}, \quad h = 1 \text{ см} \end{aligned} \quad (3.1)$$

С помощью (3.1) и формул (1.8), (1.16), (1.19) получим

$$\begin{aligned} \omega_N = \omega_{100} = -0.930919 \frac{\text{см}}{1} \\ \varphi_N = \varphi_{100} = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя рекуррентные выражения (1.22), (1.26) и (1.28) и имея в виду (3.1), (3.2), для значения максимального отклонения стержня в обратную сторону находим

$$\varphi_* = -0.182918$$

Считая распределение пружин непрерывным $\left(\lambda = 1 \frac{1}{\text{см}}\right)$, при этом имея в виду (3.1) и (2.7), кубическое уравнение (2.10) перепишем в виде

$$\varphi_*^3 - 0.28242 \varphi_*^2 - 0.03746 \varphi_* + 0.00876 = 0$$

Все корни этого уравнения действительны:

$$\varphi_{..1} = -0.183172, \quad \varphi_{..2} = 0.152981, \quad \varphi_{..3} = 0.312610$$

Однако, так как $\varphi_1 = 0$, то из них только первый удовлетворяет условию (2.11).

Следовательно, значение максимального отклонения стержня в обратную сторону, в предположении непрерывности распределения пружин, будет

$$\varphi_{\varphi} = -0.183172$$

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 27 II 1967

Ռ. Մ. ԿԻՐԱԿՈՍԻԱՆ

ԱՌԱՋԳԱՆՊԼԱՍՏԻԿՈՐԵՆ ԴԵՖՈՐՄԱՅՎՈՂ ՉՍՊԱՆԱԿՆԵՐԻ ՄԻՍՏԵՄՈՒՄ
ՉՈՂԻ ՏԱՏԱՆՈՒՄՆԵՐԻ ՄԻ ԳԵՊՔԻ ՄԱՍԻՆ

Ա մ փ ո փ ո ռ ի մ

Դիտարկված է առաձգա-պլաստիկորեն դեֆորմացվող զսպանակների սխեմում՝ հողակապից վերաիկալ կախված, ձողի ազատ տատանումների խնդիրը: Փոքր առաձգա-պլաստիկական դեֆորմացիաների [6] տեսաթվան շրջանակներում, բառշինգերի էֆեկտի հաշվառմամբ, որոշված են ձողի մաքսիմալ շեղումները: Բերված է թվային օրինակ:

R. M. KIRAKOSIAN

ON THE CASE OF VIBRATIONS OF BAR IN THE SYSTEM OF ELASTIC-PLASTIC DEFORMING SPRINGS

S u m m a r y

The problem of free vibrations of vertical suspending on the hinge bar in the system of elastic-plastic deforming springs is considered.

On the basis of theory of few elastic-plastic deformations [6], accounting the effect of Bayshinger the maximum deflexions of a bar are defined.

A numerical example is considered.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Рабинович И. М. К динамическому расчету сооружений за пределом упругости. Исследования по динамике сооружений. Стройиздат, М., 1947.
2. Москвитин В. В. Продольные колебания упруго-пластической системы с конечным числом степеней свободы. Изв. АН СССР, ОТН, № 2, 1957.
3. Москвитин В. В. Упруго-пластические колебания плоских ферм. Вестник МГУ, № 3, 1957.
4. Хачиян Э. Е. Расчет сооружений на сейсмостойкость с учетом упруго-пластических деформаций. Изв. АН АрмССР, сер. техн. наук, т. XVII, № 4, 1964.
5. Дарбинян С. С. Сдвиговые колебания системы с двумя степенями свободы с учетом упруго-пластических деформаций. Докл. АН АрмССР, т. XXIX, № 2, 1959.
6. Ильюшин А. А. Пластичность. Гостехиздат, М., 1948.
- 5 Известия АН АрмССР, Механика, № 1