ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XXI, № 1, 1968 Механика

Б. М. НУЛЛЕР

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ О КРУЧЕНИИ УСЕЧЕННОГО КОНУСА

В статье методом однородных решений совместно с интегральным преобразованием Меллина рассматривается несколько смешанных задач о кручении конуса, ограниченного одной или двумя сферическими поверхностями. На торцах задаются произвольные перемещения (или касательные напряжения), а на боковой поверхности — касательные напряжения (перемещения). Рассмотрен также случай составного конуса со сферической поверхностью раздела материалов. Решение получается в виде интегралов и рядов по функциям Лежандра.

Сходная по постановке задача о кручении конуса с жестко защемленными торцами рассмотрена в работе А. К. Даса [1], который получил решение в рядах по коническим функциям. Многочисленные и подробные литературные указания на другие работы о кручении конических тел имеются в книге Н. Х. Арутюняна и Б. Л. Абрамяна [2].

1. В сферических координатах r, θ, φ осесимметричное кручение конуса характеризуется одним перемещением и двумя касательными напряжениями [3]:

$$u_\varphi = \frac{1}{G}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \tau_{\theta\varphi} = \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\theta}\right), \quad \tau_{r\varphi} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)\right] \tag{1.1}$$

где G — модуль сдвига, а v — гармоническая функция, удовлетворяющая уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\operatorname{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\theta} = 0 \tag{1.2}$$

По методу Фурье функцию v можно представить в виде произведения

$$v = r^\nu \psi(\theta) \tag{1.3}$$

при этом функция $\psi(\theta)$ должна быть решением уравнения Лежандра

$$\psi'' + \operatorname{ctg}\theta\,\psi' + \nu(\nu+1)\,\psi = 0 \tag{1.4}$$

(штрих здесь и ниже обозначает производную по θ).

Подставив (1.3) в формулы (1.1), получим

$$u_\varphi = \frac{r^\nu\psi'}{G}, \quad \tau_{r\varphi} = (\nu-1)\,r^{\nu-1}\psi'$$
$$\tau_{\theta\varphi} = r^{\nu-1}(\psi'' - \operatorname{ctg}\theta\,\psi') = -r^{\nu-1}(\nu(\nu+1)\,\psi + 2\operatorname{ctg}\theta\,\psi') \tag{1.5}$$

Рассмотрим класс однородных решений [4] для бесконечного полого конуса, ограниченного поверхностями $\theta = \gamma_1$ и $\theta = \gamma_2$ $(0 < \gamma_1 < < \gamma_2 < \pi)$, свободными от напряжений $\tau_{\theta\varphi}$,

$$\tau_{\theta\varphi} = 0 \quad \text{при } \theta = \gamma_1 \text{ и } \theta = \gamma_2 \tag{1.6}$$

Введем обозначения: $\eta = \psi'$ и $\lambda = \nu(\nu + 1)$. Как видно из (1.4) и (1.5), отыскание значений индекса ν, при которых выполняется однородное условие (1.6), сводится к регулярному случаю задачи Штурма-Лиувилля для уравнения

$$(\sin\theta\eta')' - \frac{1}{\sin\theta}\eta + \lambda\sin\theta\eta = 0 \tag{1.7}$$

с граничными условиями

$$\eta' - \mathrm{ctg}\,\theta\eta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \gamma_1 \quad \text{и} \quad \theta = \gamma_2 \tag{1.8}$$

Известно, что собственные значения λ_k задачи (1.7)—(1.8) —простые и положительные, система собственных функций $\{\eta_k\}$ полна в $L_2(\gamma_1, \gamma_2)$ и ортогональна с весом $\sin\theta$, для произвольной функции $f(\theta) \in L_2(\gamma_1, \gamma_2)$ имеет место разложение

$$f(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\eta_k, \qquad c_k \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} \eta_k^2(\theta)\sin\theta d\theta = \int_{\gamma_1}^{\gamma_2} f(\theta)\,\eta_k(\theta)\sin\theta d\theta \tag{1.9}$$

Соответственно, задача (1.5)—(1.6) имеет класс однородных решений $\{u_\varphi^{(k)}, \tau_{\theta\varphi}^{(k)}, \tau_{r\varphi}^{(k)}\}$, порождаемый двумя симметричными относительно $\nu = -{}^1/_2$ последовательностями вещественных чисел $\nu_k = -{}^1/_2 \pm \pm\sqrt{{}^1/_4 + \lambda_k}$:

$$u_\varphi^{(k)} = (A_k r^{\nu_k} + B_k r^{-\nu_k - 1})\frac{\psi_k'}{G}$$

$$\tau_{r\varphi}^{(k)} = [A_k(\nu_k - 1)r^{\nu_k - 1} - B_k(\nu_k + 2)r^{-\nu_k - 2}]\,\psi_k' \tag{1.10}$$

$$\tau_{\theta\varphi}^{(k)} = -(A_k r^{\nu_k - 1} + B_k r^{-\nu_k - 2})\,[\nu(\nu + 1)\,\psi_k + 2\,\mathrm{ctg}\,\theta\psi_k']$$

а системы $\{u_\varphi^{(k)}\}$ и $\{\tau_{r\varphi}^{(k)}\}$ на координатных поверхностях $r = \mathrm{const}$, $\gamma_1 \leqslant \theta \leqslant \gamma_2$ замкнуты и ортогональны (с весом единица, поскольку элемент площади на $r = a$ равен $ds = a^2\sin\theta\, d\varphi\, d\theta$).

Однородные решения, отвечающие жесткому защемлению конических поверхностей, т. е. условиям

$$u_\varphi = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \gamma_1 \quad \text{и} \quad \theta = \gamma_2 \tag{1.11}$$

обладают теми же свойствами, так как в приведенных выше рассуждениях изменится лишь граничное условие (1.8), которое будет иметь вид

$$\eta = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \gamma_1 \quad \text{и} \quad \theta = \gamma_2 \tag{1.12}$$

и γ_k, которое должно удовлетворять условию (1.12).

Построение класса однородных решений для сплошного конуса сводится к сингулярному случаю задач (1.7)—(1.8) или (1.7)—(1.12) (имеется особенность на левом конце интервала $0 \leqslant \theta \leqslant \gamma_2$), но все перечисленные свойства собственных значений и собственных функций этих задач остаются в силе [5].

Рассмотрим теперь неоднородную осесимметричную задачу о кручении бесконечного полого конуса местными касательными усилиями (или перемещениями), приложенными на конических поверхностях. С этой целью применим преобразование Меллина [6]

$$\psi(\nu) = \int_0^\infty v(r)\, r^\nu dr \tag{1.13}$$

к уравнению (1.2), умножив его на $r^{\nu+2}$ и почленно интегрируя по r от 0 до ∞. Предположив, что при $r \to \infty$ v убывает как r^{-2}, сразу приходим к уравнению (1.4) для функции ψ и с помощью формулы обращения Меллина

$$v(r) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \psi(\nu)\, r^{-\nu-1}\, d\nu \tag{1.14}$$

находим из (1.1)

$$\begin{gathered} u_\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \frac{\psi'(\nu)\, d\nu}{G r^{\nu+1}}, \qquad \tau_{r\varphi} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \frac{(\nu+2)\,\psi'(\nu)\, d\nu}{r^{\nu+2}} \\ \tau_{\theta\varphi} = -\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \frac{[\nu(\nu+1)\,\psi(\nu) + 2\operatorname{ctg}\theta\,\psi'(\nu)]\, d\nu}{r^{\nu+2}} \end{gathered} \tag{1.15}$$

Путь интегрирования (L) по условию сходимости интеграла (1.13) лежит в полосе $-1 < \operatorname{Re}\nu < 0$, а входящие в $\psi(\nu)$ две произвольные функции $A(\nu)$ и $B(\nu)$ определяются из граничных условий. В дальнейшем решения задач о конусе, ограниченном одной или двумя координатными сферическими поверхностями, мы будем искать в виде сумм рядов по однородным решениям (1.10) и интегралов (1.15).

2. Рассмотрим смешанную задачу о симметричном кручении сплошного конуса $0 \leqslant \theta \leqslant \gamma$, $0 \leqslant r \leqslant b$, по окружности $r = R$, $\theta = \gamma$ которого приложены сосредоточенные касательные усилия $\tau_{\theta\varphi} = T$, а на торцевой сферической поверхности заданы произвольные касательные перемещения. Выпишем соответствующие граничные условия:

$$\tau_{\theta\varphi} = \begin{cases} T & \text{при} \quad r = R,\ \theta = \gamma \\ 0 & \text{при} \quad r \neq R,\ \theta = \gamma \end{cases} \tag{2.1}$$

$$u_z = f(\theta) \quad \text{при} \quad r = b, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \gamma \tag{2.2}$$

Чтобы функция $\psi(\theta)$ не давала особенности на оси конуса при $\theta = 0$, положим

$$\psi(\theta) = A(\nu) P_\nu(\cos\theta) \tag{2.3}$$

где $P_\nu(\cos\theta)$ — функция Лежандра первого рода.

Условие (2.1), представленное в виде

$$\tau_{\theta z}\big|_{\theta=\gamma} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L)} \frac{TR^{\nu+1} d\nu}{r^{\nu+2}}$$

совместно с (1.15) и (2.3) определяет для бесконечного конуса функцию $A(\nu)$

$$A(\nu) = -\frac{TR^{\nu+1}}{\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P_\nu'(\cos\gamma)} \tag{2.4}$$

Однородные решения (1.10) не вносят изменений в условие (2.1), поэтому решение для конечного конуса запишем в виде суммы (1.5) и (1.10)

$$u_z = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L)} \frac{TR^{\nu+1} P_\nu'(\cos\theta)\, r^{-\nu-1} d\nu}{G[\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P_\nu'(\cos\gamma)]} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k r^{\nu_k} + B_k r^{-\nu_k-1}]\, P_{\nu_k}'(\cos\theta)$$

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L)} \frac{TR^{\nu+1} (\nu+2) P_\nu'(\cos\theta)\, r^{-\nu-2} d\nu}{\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P_\nu'(\cos\gamma)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k(\nu_k - 1) r^{\nu_k-1} - B_k(\nu_k+2) r^{-\nu_k-2}] P_{\nu_k}'(\cos\theta) \tag{2.5}$$

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L)} \frac{TR^{\nu+1} [\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\theta) + 2\operatorname{ctg}\theta P_\nu'(\cos\theta)]\, d\nu}{[\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P_\nu'(\cos\gamma)]\, r^{\nu+2}} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} [A_k r^{\nu_k-1} + B_k r^{-\nu_k-2}][\nu_k(\nu_k+1) P_{\nu_k}(\cos\theta) + 2\operatorname{ctg}\theta P_{\nu_k}'(\cos\theta)]$$

где ν_k — положительные корни уравнения

$$\nu_k(\nu_k+1) P_{\nu_k}(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P_{\nu_k}'(\cos\gamma) = 0 \tag{2.6}$$

Приближенно их можно определить формулой

$$\nu_k = \frac{\pi}{\gamma}(k - {}^1/_4) - {}^1/_2 + O(k^{-1})$$

которую нетрудно получить, подставив в (2.6) асимптотическое разложение по ν функции Лежандра [7]

$$P_\nu^\mu(\cos\theta)=\frac{\Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu+{}^3/_2)}\left(\frac{\pi}{2}\sin\theta\right)^{-1/2}\left\{\cos\left[(\nu+{}^1/_2)\theta-\pi/_4+\frac{\mu\pi}{2}\right]+0(\nu^{-1})\right\} \tag{2.7}$$

Каждое однородное решение дает особенность либо в вершине конуса (множитель при B_k в (2.5)), либо при $r\to\infty$ (множитель при A_k), и, если одна из этих точек — в данном случае вершина — принадлежит конусу, соответствующие однородные решения следует отбросить. Учитывая это, положим $B_k=0$ $(k=1, 2, \cdots)$, а коэффициенты A_k найдем из условия (2.2), которое согласно (1.9) представимо при $r=b$ как

$$u_\varphi=f(\theta)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k P'_{\nu_k}(\cos\theta)$$

$$c_k\int_0^\gamma [P'_{\nu_k}(\cos\theta)]^2\sin\theta d\theta=\int_0^\gamma f(\theta)P'_{\nu_k}(\cos\theta)\sin\theta d\theta \tag{2.8}$$

При $r=b$ входящий в выражение (2.5) для u_φ интеграл тоже разлагается по однородным решениям:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)}\frac{TR^{\nu+1}b^{-\nu-1}P'_\nu(\cos\theta)\,d\nu}{G[\nu(\nu+1)P_\nu(\cos\gamma)+2\operatorname{ctg}\gamma P'_\nu(\cos\gamma)]}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{TR^{\nu_k+1}P'_{\nu_k}(\cos\theta)\,b^{-\nu_k-1}}{GD_k(\gamma)} \tag{2.9}$$

где

$$D_k(\gamma)=\frac{\partial}{\partial\nu}[\nu(\nu+1)P_\nu(\cos\gamma)+2\operatorname{ctg}\gamma P'_\nu(\cos\gamma)]\Big|_{\nu=\nu_k}$$

Справедливость этого разложения нетрудно установить, замыкая (L) системой дуг окружностей $|\nu|=\rho_k$, проходящих в правой полуплоскости между k-ым и $(k+1)$-ым корнями уравнения (2.6), оценивая подинтегральную функцию с помощью формулы (2.7), а затем применяя лемму Жордана и теорему о вычетах.

Подставив функцию u_φ из (2.5) в левую часть равенства (2.8), заменив интеграл рядом (2.9) и приравнивая в обеих частях коэффициенты при $P'_{\nu_k}(\cos\theta)$, получим искомые

$$A_k=\frac{c_k}{b^{\nu_k}}+\frac{TR^{\nu_k+1}}{Gb^{2\nu_k+1}D_k(\gamma)}$$

Выпишем полностью решение задачи для полушара ($\gamma=\pi/_2$) при $r>R$. В этом случае $P_\nu^\mu(0)=2^\mu\sqrt{\pi}\left|\Gamma\left(\frac{\nu-\mu}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{-\nu-\mu+1}{2}\right)\right|^{-1}$, $\nu_k=2k-1$ $(k=1,2,\cdots)$, а вычет функции $\Gamma(-k)$ равен $(-1)^k/k!$ После некоторых упрощений получаем из (2.5)

$$u_\varphi=\sum_{k=1}^\infty\left\{\frac{M_k}{G}\left(\frac{r^{2k-1}}{b^{4k-1}}-\frac{1}{r^{2k}}\right)+\frac{c_k r^{2k-1}}{b^{2k-1}}\right\}P_{2k-1}'(\cos\theta)$$

$$\tau_{r\varphi}=\sum_{k=1}^\infty\left\{M_k\left[\frac{2k}{r^{2k+1}}+\frac{r^{2k-2}(2k-1)}{Gb^{4k-1}}\right]+\frac{(2k-1)\,c_k r^{2k-2}}{b^{2k-1}}\right\}P_{2k-1}'(\cos\theta)$$

$$\tau_{\theta\varphi}=\sum_{k=1}^\infty\left\{M_k\left(\frac{1}{r^{2k+1}}+\frac{r^{2k-2}}{Gb^{4k-1}}\right)+\frac{r^{2k-2}c_k}{b^{2k-1}}\right\}[(2k-1)\,2k\,P_{2k-1}(\cos\theta)+$$

$$+2\operatorname{ctg}\theta P_{2k-1}'(\cos\theta)]$$

где

$$M_k=\frac{\pi TR^{2k}(-1)^{2k-1}(2k-2)!}{2k2^{2k-1}[(k-1)!]^2},\qquad c_k=\frac{4k-1}{2k(2k-1)}\int_0^{\pi/2}f(\theta)P_{2k-1}'(\cos\theta)\sin\theta d\theta$$

причем для нахождения c_k использована формула

$$\int_0^{\pi/2}[P_\nu'(\cos\theta)]^2\sin\theta\,d\theta=-\frac{\sin\pi\nu}{\pi}+\frac{\nu(\nu+1)}{2\nu+1}$$

3. Рассмотрим теперь смешанную задачу об осесимметричном кручении конуса $0\leqslant\theta\leqslant\gamma$, $a\leqslant r\leqslant b$, усеченного двумя сферическими поверхностями, сохранив прежние граничные условия (2.1)—(2.2) и дополнив их заданными на торце $r=a$ произвольными касательными напряжениями $\tau_{r\varphi}$:

$$\tau_{\theta\varphi}=\begin{cases}T & \text{при}\quad r=R,\quad \theta=\gamma\\ 0 & \text{при}\quad r\neq R,\quad \theta=\gamma\end{cases}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}u_\varphi&=f_1(\theta)\quad\text{при}\quad r=b,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\gamma\\ \tau_{r\varphi}&=f_2(\theta)\quad\text{при}\quad r=a,\quad 0\leqslant\theta\leqslant\gamma\end{aligned}\tag{3.2}$$

Пусть $f_1(\theta),\ f_2(\theta)\in L_2(0,\gamma)$, тогда в силу (1.9) каждое из условий (3.2) можно записать в виде ряда Фурье по однородным решениям

$$u_\varphi|_{r=b}=\sum_{k=1}^\infty c_k^{(1)}P_{\nu_k}'(\cos\theta),\qquad \tau_{r\varphi}|_{r=a}=\sum_{k=1}^\infty c_k^{(2)}P_{\nu_k}'(\cos\theta)$$

$$c_k^{(1)}=\frac{1}{\delta_k^2}\int_0^\gamma f_1(\theta)P_{\nu_k}'(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta\tag{3.3}$$

$$c_k^{(3)} = \frac{1}{\delta_k^2}\int_0^{\gamma} f_2(\theta)\, P'_{\nu_k}(\cos\theta)\sin\theta d\theta, \qquad \delta_k^2 = \int_0^{\gamma}[P'_{\nu_k}(\cos\theta)]^2\sin\theta d\theta \quad (3.3)$$

Решение задачи будем искать в форме (2.5), при этом условие (3.1) выполнено.

Запишем равенство, аналогичное (2.9) при $r < R$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \frac{TR^{\nu+1} r^{-\nu-1} P'_\nu(\cos\theta)\, d\nu}{\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P'_\nu(\cos\gamma)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{Tr^{\nu_k} P'_{\nu_k}(\cos\theta)}{R^{\nu_k} D_k(\gamma)} \quad (3.4)$$

и применим к обеим его частям операцию $\left(\frac{1}{r} - \frac{\partial}{\partial r}\right)$. При $r = a$ получим (ряды (3.4) и (3.5) равномерно и абсолютно сходятся)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{(L)} \frac{TR^{\nu+1}(\nu+2) a^{-\nu-2} P'_\nu(\cos\theta)\, d\nu}{\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P'_\nu(\cos\gamma)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{T(1-\nu_k) a^{\nu_k - 1} P'_{\nu_k}(\cos\theta)}{R^{\nu_k} D_k(\gamma)} \quad (3.5)$$

Подставив в левые части граничных условий (3.3) u_φ и $\tau_{r\varphi}$ из (2.5), а затем ряды (2.9) и (3.5), получим для каждой пары неизвестных A_k и B_k систему двух уравнений

$$b^{\nu_k - 1} A_k + b^{-\nu_k - 2} B_k = c_k^{(1)} + \frac{TR^{\nu_k+1} b^{-\nu_k-1}}{GD_k(\gamma)}$$

$$(\nu_k - 1) a^{\nu_k - 1} A_k - (\nu_k + 2) a^{-\nu_k - 2} B_k = c_k^{(2)} - \frac{T(1-\nu_k) a^{\nu_k - 1}}{R^{\nu_k} D_k(\gamma)}$$

откуда

$$A_k = \frac{(\nu_k + 2) a^{-\nu_k - 2} R^{\nu_k}[c_k^{(1)} GD_k(\gamma) + TR^{\nu_k+1} b^{-\nu_k-1}]}{GR^{\nu_k} D_k(\gamma)[(\nu_k - 1) a^{\nu_k - 1} b^{-\nu_k-2} + (\nu_k+2) a^{-\nu_k-2} b^{\nu_k-1}]} +$$

$$+ \frac{Gb^{-\nu_k-2}[c_k^{(2)} R^{\nu_k} D_k(\gamma) - T(1-\nu_k) a^{\nu_k-1}]}{GR^{\nu_k} D_k(\gamma)[(\nu_k - 1) a^{\nu_k-1} b^{-\nu_k-2} + (\nu_k+2) a^{-\nu_k-2} b^{\nu_k-1}]}$$

$$B_k = \frac{(\nu_k - 1) a^{\nu_k - 1} R^{\nu_k}[c_k^{(1)} GD_k(\gamma) + TR^{\nu_k+1} b^{-\nu_k-1}]}{GR^{\nu_k} D_k(\gamma)[(\nu_k - 1) a^{\nu_k-1} b^{-\nu_k-2} + (\nu_k+2) a^{-\nu_k-2} b^{\nu_k-1}]} +$$

$$+ \frac{Gb^{\nu_k-1}[T(1-\nu_k) a^{\nu_k-1} - R^{\nu_k} c_k^{(2)} D_k(\gamma)]}{GR^{\nu_k} D_k(\gamma)[(\nu_k - 1) a^{\nu_k-1} b^{-\nu_k-2} + (\nu_k+2) a^{-\nu_k-2} b^{\nu_k-1}]}$$

4. Рассмотрим кручение конуса $0 \leqslant \theta \leqslant \gamma$, $0 \leqslant r \leqslant b$, состоящего из двух материалов, разделенных сферической поверхностью $r = a$, $0 \leqslant \theta \leqslant \gamma$. Индекс $n = 1$ будет обозначать величины, относящиеся к области с вершиной, $n = 2$ — к торцевой области.

Пусть граничные условия имеют вид

$$\tau_{\theta\varphi} = \begin{cases} T_n & \text{при} \quad r = R_n, \quad \theta = \gamma \\ 0 & \text{при} \quad r \neq R_n, \quad \theta = \gamma \; (n = 1, 2;\; 0 < R_1 < a < R_2 < b) \end{cases} \tag{4.1}$$

$$u_\varphi = f(\theta) \quad \text{при} \quad r = b, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \gamma \tag{4.2}$$

где функция $f(\theta) \in L_2(0, \gamma)$ и для нее справедливо разложение (2.8).

Решение задачи ищем отдельно для каждой области в прежней форме (2.5)

$$u_\varphi^{(n)} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{T_n R^{\nu+1} P'_\nu(\cos\theta)\, r^{-\nu-1}\, d\nu}{G_n\,[\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P'_\nu(\cos\gamma)]} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(n)} r^{\nu_k} + B_k^{(n)} r^{-\nu_k-1}]\, P'_{\nu_k}(\cos\theta)$$

$$\tau_{r\varphi}^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{T_n R_n^{\nu+1} (\nu+2) P'_\nu(\cos\theta)\, r^{-\nu-2}\, d\nu}{\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P'_\nu(\cos\gamma)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(n)} (\nu_k - 1)\, r^{\nu_k-1} - B_k^{(n)} (\nu_k + 2)\, r^{-\nu_k-2}]\, P'_{\nu_k}(\cos\theta) \tag{4.3}$$

$$\tau_{\theta\varphi}^{(n)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{T_n R_n^{\nu+1} [\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\theta) + 2\operatorname{ctg}\theta P'_\nu(\cos\theta)]\, d\nu}{[\nu(\nu+1) P_\nu(\cos\gamma) + 2\operatorname{ctg}\gamma P'_\nu(\cos\gamma)]\, r^{\nu+2}} -$$

$$- \sum_{k=1}^{\infty} [A_k^{(n)} r^{\nu_k-1} + B_k^{(n)} r^{-\nu_k-2}]\, [\nu_k(\nu_k+1) P_{\nu_k}(\cos\theta) + 2\operatorname{ctg}\theta P'_{\nu_k}(\cos\theta)]$$

с дополнительным условием сопряжения на границе раздела материалов

$$\begin{aligned} u_\varphi^{(1)} &= u_\varphi^{(2)} \quad \text{при} \quad r = a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \gamma \\ \tau_{r\varphi}^{(1)} &= \tau_{r\varphi}^{(2)} \quad \text{при} \quad r = a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \gamma \end{aligned} \tag{4.4}$$

Чтобы исключить особенность в области, содержащей вершину, положим $B_k^{(1)} = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$. При этом одно условие (4.1) автоматически удовлетворяется решением (4.3), а оставшиеся три, (4.2) и (4.4), после подстановки в них выражений (4.3) и равенств типа (2.9) и (3.5) дают систему трех уравнений, определяющих $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$ и $B_k^{(2)}$,

$$A_k^{(2)} b^{\nu_k} + B_k^{(2)} b^{-\nu_k-1} = c_k + \frac{T_2 R_2^{\nu_k+1}}{G_2 b^{\nu_k+1} D_k(\gamma)}$$

$$a^{\nu_k} A_k^{(1)} - a^{\nu_k} A_k^{(2)} - a^{-\nu_k-1} B_k^{(2)} = \frac{T_1 R_1^{\nu_k+1}}{a^{\nu_k+1} G_1 D_k(\gamma)} - \frac{T_2 a^{\nu_k}}{G_2 D_k(\gamma) R_2^{\nu_k}}$$

$$(\nu_k - 1) a^{\nu_k - 1} A_k^{(1)} - (\nu_k - 1) a^{\nu_k - 1} A_k^{(2)} +$$

$$+ (\nu_k + 2) a^{-\nu_k - 2} B_k^{(2)} = \frac{T_2 a^{\nu_k - 1} (1 - \nu_k)}{R_2^{\nu_k} D_k(\gamma)} - \frac{T_1 (\nu_k + 2) R_1^{\nu_k+1}}{a^{\nu_k+2} D_k(\gamma)}$$

5. Пусть произвольное касательное напряжение $\tau_{\theta\varphi}$ задано на торцевой сферической поверхности конуса $0 \leqslant \theta \leqslant \gamma$, $0 \leqslant r < a$, а на конической поверхности задано касательное перемещение u_φ. Будем искать решение при граничных условиях

$$\tau_{r\varphi} = f(\theta) \quad \text{при} \quad r = a, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \gamma \tag{5.1}$$

$$u_\varphi = \begin{cases} T & \text{при} \quad r = R, \quad \theta = \gamma \\ 0 & \text{при} \quad r \neq R, \quad \theta = \gamma \end{cases} \tag{5.2}$$

Рассмотрение такой „формальной" задачи дает возможность путем интегрирования по параметру R получить решение при произвольно заданных перемещениях на границе.

Неоднородное решение для бесконечного конуса при условии (5.2) выражается формулами (1.15), в которых $\psi = A^*(\nu) P_\nu(\cos\theta)$, а функция $A^*(\nu)$ определяется тем же путем, что и функция $A(\nu)$ (см. (2.4)) и равна

$$A^*(\nu) = \frac{TR^\nu}{P'_\nu(\cos\gamma)}$$

В соответствующем однородном решении (1.10), очевидно, $B_k = 0$ $(k = 1, 2, \cdots)$, а ν_k — положительные корни уравнения

$$P'_{\nu_k}(\cos\gamma) = 0 \tag{5.3}$$

Таким образом, решение поставленной задачи о конечном конусе выразится формулами

$$u_\varphi = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L)} \frac{TR^\nu P'_\nu(\cos\theta)\, d\nu}{GP'_\nu(\cos\gamma) r^{\nu+1}} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k} P'_{\nu_k}(\cos\theta)$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{(L)} \frac{TR^\nu (\nu + 2) P'_\nu(\cos\theta)\, d\nu}{P'_\nu(\cos\gamma) r^{\nu+2}} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\nu_k - 1) r^{\nu_k - 1} P'_{\nu_k}(\cos\theta)$$

(5.4)

$$\tau_{\theta\varphi} = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{TR^{\nu}\left[\nu(\nu+1)P_{\nu}(\cos\theta)+2\operatorname{ctg}\theta P_{\nu}'(\cos\theta)\right]d\nu}{P_{\nu}'(\cos\gamma)\,r^{\nu+2}} -$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} A_k r^{\nu_k-1}\left[\nu_k(\nu_k+1)P_{\nu_k}(\cos\theta)+2\operatorname{ctg}\theta P_{\nu_k}'(\cos\theta)\right]$$

Чтобы удовлетворить условию (5.1) на торце, докажем справедливость при $\theta \leqslant \gamma$ разложения

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{(L)} \frac{TR^{\nu}(\nu+2)P_{\nu}'(\cos\theta)\,d\nu}{P_{\nu}'(\cos\gamma)a^{\nu+2}} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{TR^{\nu_k}(\nu_k+2)P_{\nu_k}'(\cos\theta)}{D_k^{*}(\gamma)\,a^{\nu_k+2}} \tag{5.5}$$

где

$$D_k^{*}(\gamma) = \frac{\partial}{\partial\nu}\left[P_{\nu}'(\cos\gamma)\right]\Big|_{\nu=\nu_k}$$

Замкнем путь интегрирования (L) — прямую $\operatorname{Re}\nu = \varkappa$ $(-1<\varkappa<0)$ — системой прямоугольных контуров, образованных тремя отрезками α_k, β_k и γ_k:

α_k: $\quad \operatorname{Re}\nu = \rho_k, \quad |\operatorname{Im}\nu| \leqslant \rho_k$

β_k: $\quad \operatorname{Im}\nu = \rho_k, \quad \varkappa \leqslant \operatorname{Re}\nu \leqslant \rho_k$

γ_k: $\quad \operatorname{Im}\nu = -\rho_k, \quad \varkappa \leqslant \operatorname{Re}\nu \leqslant \rho_k, \quad (\nu_k < \rho_k < \nu_{k+1})$

и обозначим величину интеграла I на них соответственно через I_α, I_β и I_γ. При $k\to\infty$ с помощью асимптотической формулы (2.7) получим такие оценки роста интегралов:

$$|I_\alpha| < \frac{2T\rho_k^2}{a^2}\left(\frac{R}{a}\right)^{\rho_k}, \qquad |I_\beta|+|I_\gamma| < \frac{2T}{a^2}\rho_k^2\exp\left[\rho_k(\gamma-\theta)\right] \tag{5.6}$$

Если $\rho_k\to\infty$ и $\theta<\gamma$, интегралы (5.6) на дополнительном контуре обращаются в нули, и разложение (5.5) следует из теоремы Коши о вычетах. Если же $\theta=\gamma$, то обе части (5.5) становятся равными нулю: левая — в силу (5.2) и связи (1.1) между $\tau_{r\varphi}$ и u_φ, правая — ввиду условия (5.3).

Как и раньше предполагая, что $f(\theta)\in L_2(0,\gamma)$, запишем условие (5.1) в виде

$$\tau_{r\varphi}\big|_{\theta=\gamma} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k P_{\nu_k}'(\cos\theta), \qquad c_k = \frac{1}{\delta_k^2}\int\limits_0^{\gamma} f(\theta)\,P_{\nu_k}'(\cos\theta)\sin\theta\,d\theta \tag{5.7}$$

где ν_k — положительный корень уравнения (5.3).

Подставив в левую часть равенства (5.7) выражение $\tau_{r\varphi}$ из (5.4) и используя разложение (5.5), получим входящие в формулы (5.4) неизвестные коэффициенты

$$A_k = \left[\frac{c_k}{a^{\nu_k}} + \frac{TR^{\nu_k}(\nu_k+2)}{a^{2\nu_k+1} D_k^*(\gamma)} \right] \frac{1}{(\nu_k - 1)} \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

Всесоюзный научно-исследовательский
институт гидротехники им. Б. Е. Веденеева

Поступила 15 IV 1967

Բ. Մ. ՆՈՒԼԵՐ

ՀԱՏԱԾ ԿՈՆԻ ՈԼՈՐՄԱՆ ՄԻ ՔԱՆԻ ԽՆԴԻՐՆԵՐ

Ամփոփում

Մելլինի ինտեգրալ ձևափոխության և համասեռ լուծումների համատեղ օգտագործման ուղիով ստացված են՝ սֆերիկ ճակատով կոների ոլորման մի քանի եզրային խնդիրների ճշգրիտ լուծումները։

Դիտարկված են՝ հոծ կոնի խառը խնդիրները, երբ կողմնային մակերևույթի վրա տրված են լարումները (տեղափոխությունները), իսկ ճակատի վրա տեղափոխությունները (լարումները)։ Դիտարկված են նաև՝ հատած կոնի և կոնի խնդիրները, երբ նրանք պատրաստված են երկու նյութից, որոնք բաժանված են սֆերիկ մակերևույթով։ Լուծումները տրված են շարքերի տեսքով՝ ըստ Լեժանդրի ֆունկցիաների և Մելլինի ինտեգրալներով։

B. M. NULLER

SOME PROBLEMS ON THE TORSION OF THE TRUNCATED CONE

Summary

Using both the Mellin integral transform and homogeneous solutions, exact solutions of some boundary value problems on the torsion of cones with spherical ends are obtained.

Mixed problems on the massive cone with the vertex are considered when stresses (displacements) are given on the lateral surface and displacements (stresses) at the cone base. Problems on the truncated cone and on the cone composed of two kinds of materials separated by a spherical surface are also considered. The solutions are presented in the form of the Mellin integrals and in the series of the Legendre functions.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Das A. K.* Note on stresses in a truncated cone with the ends fixed due to shearing forces produced by a circular ring on the curved surface. „Indian J. Theor. Phys", 8, № 4, 1960.

2. *Арутюнян Н. Х.* и *Абрамян Б. Л.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
3. *Гутман С. Г.* Общее решение задачи теории упругости в обобщенных цилиндрических координатах. Докл. АН СССР, т. 58, № 6, 1947.
4. *Лурье А. И.* Пространственная задача теории упругости. Госиздат, М., 1955.
5. *Титчмарш Э. Ч.* Разложения по собственным функциям, связанные с дифференциальными уравнениями второго порядка, т. I, ИИЛ, М., 1960.
6. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Изд. АН СССР, М., 1963.
7. *Бейтмен Г.* и *Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Изд. „Наука", М., 1965.