

А. А. БАБЛОЯН, А. П. МЕЛКОНЯН

ОСЕСИММЕТРИЧНАЯ ЗАДАЧА ПОЛОГО БЕСКОНЕЧНОГО
ЦИЛИНДРА С ПЕРИОДИЧЕСКИ НАСАЖЕННЫМИ
НА НЕГО ДИСКАМИ

Осесимметричная контактная задача для сплошных и полых цилиндров исследовалась в работах Окубо [1], П. З. Лившица [2], Б. И. Когана [3], Т. А. Воронина [4], В. М. Александрова [5, 6], Г. Я. Попова [7], Олесяка [8, 9, 10] и других [11—16].

Окубо рассматривает контактную задачу о сопряжении по цилиндрической поверхности сплошного и полого конечных упругих цилиндров различной длины. Задача решается в рядах Фурье, граничные условия для нормальных напряжений на торцах цилиндров удовлетворяются приближенно — в интегральном смысле.

В работе П. З. Лившица рассмотрена задача о контактных напряжениях при горячей посадке с натягом упругого диска на сплошной вал бесконечной длины, с учетом сил трения, действующих по поверхности контакта. В работе использованы результаты А. И. Лурье, полученные для толстых плит [17] и сплошного цилиндра бесконечной длины [18]. Контактные напряжения представлены в виде рядов, коэффициенты которых определяются из бесконечной системы алгебраических уравнений.

Задача о деформации бесконечного цилиндра, сжатого по конечному участку поверхности жестким бандажом заданной формы, без учета касательных напряжений рассмотрена Т. А. Ворониным. Здесь радиальные перемещения точек поверхности вала от сосредоточенной единичной кольцевой радиальной нагрузки рассматриваются как функции влияния. Далее, при заданных на поверхности вала радиальных перемещениях контактные напряжения определяются из интегрального уравнения, рассмотренного Э. Рейснером. Однако, как указывалось в [5], результаты, полученные в работе [4], сомнительны ввиду ошибочного представления ядра интегрального уравнения.

Эта же задача рассмотрена В. А. Александровым, который в предельных случаях (при очень больших и очень малых значениях параметра $\lambda = \frac{R}{\alpha}$) получает практически точное решение интегрального уравнения в замкнутом виде. Для промежуточных значений параметра λ интегральное уравнение решается приближенно, путем сведения его к системе алгебраических уравнений.

Контактная задача о действии жесткого штампа на внутреннюю поверхность полого цилиндра, жестко закрепленного по внешней поверхности, исследована в работе [16]. Задача сведена к решению некоторого вырожденного интегро-дифференциального уравнения, которое легко решается.

Исследованию напряженного состояния бесконечно длинной упругой трубы постоянной толщины при посадке ее на полубесконечный жесткий гладкий вал посвящены работы [11, 13]. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную обойму, исследовано Б. И. Коганом и Г. Я. Поповым.

Работа [12] посвящена исследованию напряженного состояния в двух (конечных и бесконечных) трубах, соединенных соосно посредством натяга, при конечной длине поверхности контакта. Интегральное уравнение задачи, полученное из условий совместности деформаций, решается численным методом.

З. Олесяк рассматривает контактную задачу о прессовой посадке на вал (как полый, так и сплошной) ряда дисков, расположенных на равных расстояниях по длине вала. Интегральное уравнение первого рода, полученное обычным путем, заменяется конечной системой линейных алгебраических уравнений. В частности, получено приближенное решение задачи о посадке одного диска на бесконечно длинный вал.

В настоящей работе получено точное решение смешанной осесимметричной задачи для бесконечного полого цилиндра с насаженными по внешней поверхности жесткими дисками, равноудаленными друг от друга, когда на внутренней поверхности и части внешней поверхности цилиндра между дисками приложены радиальные нагрузки. Для простоты предполагаем, что касательные напряжения на поверхностях цилиндра (как под дисками, так и вне) отсутствуют. Решение задачи представлено в виде тригонометрического ряда. Определение постоянных интегрирования сведено к решению "парных" рядов-уравнений. Далее задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений.

Доказывается, что сумма коэффициентов при неизвестных стремится к нулю, как $O\left(\frac{\ln k}{k}\right)$, вследствие чего бесконечная система в общем случае квазивполне регулярна. Свободные члены этой системы имеют порядок $O(k^{-1})$.

Предельным переходом получено решение той же задачи для сплошного цилиндра.

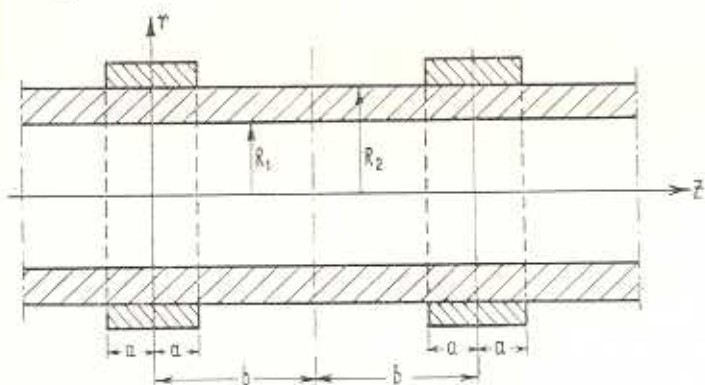
Получены также формулы для определения контактных напряжений как внутри контактной области, так и у краев дисков.

1. Рассмотрим осесимметричную задачу для полого круглого бесконечного цилиндра с радиусами R_1 , R_2 , на внешней поверхности которого насажены равноотстоящие друг от друга жесткие, абсолютно

гладкие одинаковые диски заданной формы (фиг. 1). На внутренней поверхности и части внешней поверхности цилиндра между дисками приложены радиальные нагрузки. Касательные же напряжения по внешней и внутренней поверхностям цилиндра отсутствуют.

Предположим, что граничные условия в интервалах $-b \leq z \leq 0$ и $0 \leq z \leq b$ симметричны относительно оси r . Примем также, что граничные условия по всей длине цилиндра являются периодическим повторением граничных условий, заданных в интервале $(-b, b)$. Ввиду этого сечения $z = 0$ и $z = b$ являются плоскостями симметрии.

В силу симметрии достаточно рассмотреть деформацию части цилиндра в интервале $0 \leq z \leq b$.



Фиг. 1.

Граничные условия для рассматриваемой части цилиндра имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_r(R_1, z) &= -f_1(z) = -\frac{\alpha_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \alpha_k z & 0 \leq z \leq b \\ \tau_{rz}(R_1, z) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u_r(R_2, z) &= f_2(z) & 0 < z < a \\ \sigma_r(R_2, z) &= f_3(z) & a < z < b \\ \tau_{rz}(R_2, z) &= 0 & 0 \leq z \leq b \end{aligned} \quad (1.2)$$

Полагаем, что $f_1(z)$ и $f_3(z)$ — кусочно-непрерывные функции, а $f_2(z)$ — непрерывная функция с кусочно-непрерывной производной.

Условия симметрии по сечениям $z = 0$ и $z = b$ представляются соотношениями

$$\begin{aligned} u_z(r, 0) = \tau_{rz}(r, 0) &= 0 \\ u_z(r, b) = \tau_{rz}(r, b) &= 0 \end{aligned} \quad R_1 \leq r \leq R_2 \quad (1.3)$$

Решение задачи осесимметричной деформации тела вращения сводится к нахождению функции $\Phi(r, z)$, которая в области осевого сечения тела удовлетворяет уравнению

$$\Delta \Delta \Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (1.4)$$

Напряжения и перемещения выражаются через функцию напряжений соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right), & \tau_{rz} &= \frac{\partial}{\partial r} \left[(1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \Delta \Phi - \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right), & u_r &= - \frac{1}{2G} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial z} \\ \sigma_z &= \frac{\partial}{\partial z} \left[(2 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right], & u_z &= \frac{1}{2G} \left[2(1 - \nu) \Delta \Phi - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (1.5)$$

где G — модуль сдвига, ν — коэффициент Пуассона.

Решение уравнения (1.5) для рассматриваемой нами задачи представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi(r, z) &= z(E_0 r^2 + F_0 z^2 + H_0 \ln r) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} [A_k I_0(\alpha_k r) + B_k K_0(\alpha_k r) + C_k \alpha_k r I_1(\alpha_k r) + D_k \alpha_k r K_1(\alpha_k r)] \sin \alpha_k z \end{aligned} \quad (1.6)$$

где $I_i(x)$, $K_i(x)$ — модифицированные цилиндрические функции, соответственно первого и второго рода, E_0 , F_0 , H_0 , A_k , B_k , C_k , D_k — произвольные постоянные,

$$\alpha_k = \frac{\pi k}{b}$$

Вычислив по формулам (1.5) с помощью (1.6) напряжения и перемещения, получим

$$\begin{aligned} \sigma_r(r, z) &= -2(1 - 2\nu) E_0 + 6F_0 \nu + \frac{H_0}{r^2} - \\ &- \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^3 \left\{ \left[I_0(\alpha_k r) - \frac{I_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r} \right] A_k + \left[K_0(\alpha_k r) + \frac{K_1(\alpha_k r)}{\alpha_k r} \right] B_k + \right. \\ &\quad \left. + [(1 - 2\nu) I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r I_1(\alpha_k r)] C_k - \right. \\ &\quad \left. - [(1 - 2\nu) K_0(\alpha_k r) - \alpha_k r K_1(\alpha_k r)] D_k \right\} \cos \alpha_k z \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$\begin{aligned} \sigma_z(r, z) &= 4(2 - \nu) E_0 + 6(1 - \nu) F_0 + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^3 \{ A_k I_0(\alpha_k r) + B_k K_0(\alpha_k r) + [2(2 - \nu) I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r I_1(\alpha_k r)] C_k + \\ &\quad + [-2(2 - \nu) K_0(\alpha_k r) + \alpha_k r K_1(\alpha_k r)] D_k \} \cos \alpha_k z \end{aligned} \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \tau_{rz}(r, z) = & \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 [A_k I_1(\alpha_k r) - B_k K_1(\alpha_k r) + \\ & + [2(1-\nu) I_1(\alpha_k r) + \alpha_k r I_0(\alpha_k r)] C_k + \\ & + [2(1-\nu) K_1(\alpha_k r) - \alpha_k r K_0(\alpha_k r)] D_k] \sin \alpha_k z \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\begin{aligned} u_r(r, z) = & -\frac{1}{2G} \left\{ 2E_0 r + \frac{H_0}{r} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 [A_k I_1(\alpha_k r) - B_k K_1(\alpha_k r) + \right. \\ & \left. + C_k \alpha_k r I_0(\alpha_k r) - D_k \alpha_k r K_0(\alpha_k r)] \cos \alpha_k z \right\} \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} u_z(r, z) = & \frac{1}{2G} \left\{ 6(1-2\nu) F_0 z + 8(1-\nu) E_0 z + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \left[A_k I_0(\alpha_k r) + B_k K_0(\alpha_k r) + [4(1-\nu) I_0(\alpha_k r) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \alpha_k r I_1(\alpha_k r)] C_k + [-4(1-\nu) I_0(\alpha_k r) + \alpha_k r K_1(\alpha_k r)] D_k \right] \sin \alpha_k z \right\} \end{aligned} \quad (1.11)$$

Как следует из (1.9) и (1.11), три из условий (1.3) удовлетворяются тождественно, а из условия $u_z(r, b) = 0$ получим

$$E_0 = -\frac{3(1-2\nu)}{4(1-\nu)} F_0 \quad (1.12)$$

Удовлетворяя условиям (1.1) и третьему из условий (1.2), получим

$$H_0 = -\frac{R_1^2}{2} \left[a_0 + \frac{3F_0}{1-\nu} \right] \quad (1.13)$$

$$\begin{aligned} & \left[I_0(\beta_k) - \frac{I_1(\beta_k)}{\beta_k} \right] A_k + \left[K_0(\beta_k) + \frac{K_1(\beta_k)}{\beta_k} \right] B_k + \\ & + [(1-2\nu) I_0(\beta_k) + \beta_k I_1(\beta_k)] C_k - [(1-2\nu) K_0(\beta_k) - \beta_k K_1(\beta_k)] D_k = -\frac{a_k}{\alpha_k} \\ & A_k I_1(\beta_k) + B_k K_1(\beta_k) + [2(1-\nu) I_1(\beta_k) + \beta_k I_0(\beta_k)] C_k + \\ & + [2(1-\nu) K_1(\beta_k) - \beta_k K_0(\beta_k)] D_k = 0 \quad (1.14) \\ & A_k I_1(\gamma_k) - B_k K_1(\gamma_k) + C_k [2(1-\nu) I_1(\gamma_k) + \gamma_k I_0(\gamma_k)] + \\ & + [2(1-\nu) K_1(\gamma_k) - \gamma_k K_0(\gamma_k)] D_k = 0 \end{aligned}$$

где

$$\beta_k = \alpha_k R_1, \quad \gamma_k = \alpha_k R_2$$

Из первого и второго условий (1.2) получим

$$\begin{aligned}
 & -2(1-\nu)c_0X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k^2 \{A_k I_1(\gamma_k) - B_k K_1(\gamma_k) + \\
 & + C_k \gamma_k I_0(\gamma_k) - D_k \gamma_k K_0(\gamma_k)\} \cos z_k z = -2Gf_2(z) + \frac{(1-\nu)a_0 R_1^2 R_2}{R_2^2 - R_1^2} \quad (1.15) \\
 & \quad (0 < z < a)
 \end{aligned}$$

$$\frac{\pi}{6} X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} z_k X_k \cos z_k z = f_2(z) \quad (a < z < b) \quad (1.16)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$c_0 = \frac{\pi[(1-2\nu)R_2^2 + R_1^2]R_2}{2(1-\nu)(R_2^2 - R_1^2)b} \quad (1.17)$$

$$X_0 = \left| \frac{3F_0}{2(1-\nu)} + \frac{H_0}{R_1^2} \right| \frac{b}{\pi} = -\frac{a_0 b}{2\pi} \frac{R_1^2}{R_2^2} + \frac{3b}{2(1-\nu)\pi} \left(1 - \frac{R_1^2}{R_2^2}\right) F_0 \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}
 X_k = & -z_k^2 \left\{ \left[I_0(\gamma_k) - \frac{I_1(\gamma_k)}{\gamma_k} \right] A_k + \left[K_0(\gamma_k) + \frac{K_1(\gamma_k)}{\gamma_k} \right] B_k + \right. \\
 & \left. + [(1-2\nu)I_0(\gamma_k) - \gamma_k I_1(\gamma_k)] C_k - [(1-2\nu)K_0(\gamma_k) - \gamma_k K_1(\gamma_k)] D_k \right\} \quad (1.19)
 \end{aligned}$$

Решая полученную систему алгебраических уравнений (1.14), (1.19), получим

$$A_k = \frac{\Delta_{k1}}{\Delta_k}, \quad B_k = \frac{\Delta_{k2}}{\Delta_k}, \quad C_k = \frac{\Delta_{k3}}{\Delta_k}, \quad D_k = \frac{\Delta_{k4}}{\Delta_k} \quad (1.20)$$

где

$$\begin{aligned}
 \Delta_k = & \frac{4(1-\nu)}{\gamma_k \beta_k} + \frac{\gamma_k^2 + \beta_k^2}{\gamma_k \beta_k} + \gamma_k \beta_k S_1^2(\beta_k, \gamma_k) - \\
 & - \gamma_k \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] S_2^2(\beta_k, \gamma_k) - \beta_k \left[\frac{2(1-\nu)}{\gamma_k} + \gamma_k \right] S_3^2(\beta_k, \gamma_k) + \\
 & + \left| \frac{2(1-\nu)}{\gamma_k} + \gamma_k \right| \left| \frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right| S_4^2(\beta_k, \gamma_k) \quad (1.21)
 \end{aligned}$$

$$\Delta_{k1} = \frac{X_k}{\alpha_k^2} q_1(\beta_k, \gamma_k) + \frac{a_k}{\alpha_k^3} q_1^*(\beta_k, \gamma_k)$$

$$\Delta_{k2} = \frac{X_k}{\alpha_k^2} q_2(\beta_k, \gamma_k) + \frac{a_k}{\alpha_k^3} q_2^*(\beta_k, \gamma_k)$$

$$\Delta_{k3} = \frac{X_k}{\alpha_k^2} q_3(\beta_k, \gamma_k) + \frac{a_k}{\alpha_k^3} q_3^*(\beta_k, \gamma_k)$$

$$\Delta_{k4} = \frac{X_k}{\alpha_k^2} q_4(\beta_k, \gamma_k) + \frac{a_k}{\alpha_k^3} q_4^*(\beta_k, \gamma_k) \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned}
 q_1(\beta_k, \gamma_k) = & 2(1-\nu) \frac{\gamma_k}{\beta_k} K_0(\gamma_k) - \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] K_1(\gamma_k) - \\
 & - \gamma_k \beta_k K_0(\beta_k) S_1(\beta_k, \gamma_k) + \gamma_k \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] K_1(\beta_k) S_2(\beta_k, \gamma_k) - \\
 & - 2(1-\nu) \beta_k K_0(\beta_k) S_3(\beta_k, \gamma_k) + 2(1-\nu) \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] K_1(\beta_k) S_4(\beta_k, \gamma_k)
 \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned}
 q_2(\beta_k, \gamma_k) = & -2(1-\nu) \frac{\gamma_k}{\beta_k} I_0(\gamma_k) - \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] I_1(\gamma_k) + \\
 & + \gamma_k \beta_k S_1(\beta_k, \gamma_k) I_0(\beta_k) + \gamma_k \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] I_1(\beta_k) S_2(\beta_k, \gamma_k) + \\
 & + 2(1-\nu) \beta_k I_0(\beta_k) S_3(\beta_k, \gamma_k) + 2(1-\nu) \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] I_1(\beta_k) S_4(\beta_k, \gamma_k)
 \end{aligned} \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned}
 q_3(\beta_k, \gamma_k) = & -\frac{\gamma_k}{\beta_k} K_0(\gamma_k) + \beta_k K_0(\beta_k) S_3(\beta_k, \gamma_k) - \\
 & - \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] K_1(\beta_k) S_4(\beta_k, \gamma_k)
 \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$\begin{aligned}
 q_k(\beta_k, \gamma_k) = & -\frac{\gamma_k}{\beta_k} I_0(\gamma_k) + \beta_k I_0(\beta_k) S_3(\beta_k, \gamma_k) + \\
 & + \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] I_1(\beta_k) S_4(\beta_k, \gamma_k)
 \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$q_j^*(\beta_k, \gamma_k) = q_j(\gamma_k, \beta_k) \quad (j=1, 2, 3, 4) \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned}
 S_1(\beta_k, \gamma_k) &= I_0(\gamma_k) K_0(\beta_k) - K_0(\gamma_k) I_0(\beta_k) \\
 S_2(\beta_k, \gamma_k) &= I_0(\gamma_k) K_1(\beta_k) + K_0(\gamma_k) I_1(\beta_k) \\
 S_3(\beta_k, \gamma_k) &= I_1(\gamma_k) K_0(\beta_k) + K_1(\gamma_k) I_0(\beta_k) \\
 S_4(\beta_k, \gamma_k) &= I_1(\gamma_k) K_1(\beta_k) - K_1(\gamma_k) I_1(\beta_k)
 \end{aligned} \quad (1.28)$$

Подставив значения A_k, B_k, C_k, D_k по формулам (1.20)–(1.27) в уравнение (1.15) и далее в (1.15) и (1.16), переходя к новой переменной $\varphi = \frac{\pi z}{b}$, окончательно получим следующие парные тригонометрические ряды-уравнения относительно X_k :

$$\begin{aligned}
 c_0 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (1 - N_k) X_k \cos k\varphi = g(\varphi) \quad \left(0 < \varphi < \lambda = \frac{\pi a}{b} \right) \\
 X_0 + \sum_{k=1}^{\infty} k X_k \cos k\varphi = h(\varphi) \quad (\lambda < \varphi < \pi)
 \end{aligned} \quad (1.29)$$

где

$$N_k = 1 + \frac{1}{\Delta_k} \left\{ \frac{1}{\beta_k} - \beta_k S_3^2 + \left[\frac{2(1-\nu)}{\beta_k} + \beta_k \right] S_1^2 \right\} \quad (1.30)$$

$$g(\varphi) = \frac{G}{1-\nu} f_2\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right) - \frac{\alpha_0 R_1^2 R_2}{2(R_2^2 - R_1^2)} + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k \left[\frac{\beta_k}{\gamma_k} S_3(\beta_k, \gamma_k) - S_2(\beta_k, \gamma_k) \right]}{\alpha_k \Delta_k} \cos k\varphi \quad (1.31)$$

$$h(\varphi) = \frac{b}{\pi} f_3\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right) \quad (1.32)$$

Таким образом, коэффициенты $E_0, H_0, F_0, A_k, B_k, C_k, D_k$, выражаемые формулами (1.12), (1.13), (1.18) и (1.20), будут определены, если будут найдены X_k из парных рядов (1.29). Далее могут быть найдены компоненты напряжений и перемещения в любой точке цилиндра.

Отметим, что если в вышеприведенных выражениях положить

$$H_0 = B_k = D_k = 0, \quad R_1 = 0, \quad f_1(z) = 0, \quad (\alpha_0 = \alpha_k = 0) \quad (1.33)$$

то получим выражения, соответствующие задаче сплошного вала радиуса $R_2 = R$, определяемой условиями (1.2) и (1.3). Решение этой задачи также сводится к решению уравнений (1.29), в которых, однако, следует положить

$$c_0 = \frac{(1-2\nu)\pi R}{2(1-\nu)b}, \quad g(\varphi) = \frac{G}{1-\nu} f_2\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right), \quad h(\varphi) = \frac{b}{\pi} f_3\left(\frac{b\varphi}{\pi}\right) \quad (1.34)$$

$$N_k = 1 - \frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k [I_0^2(\gamma_k) - I_1^2(\gamma_k)] - 2(1-\nu) \frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k}} \quad (1.35)$$

где $\gamma_k = \alpha_k R$; коэффициенты же F_0, E_0, A_k, C_k , входящие в выражения напряжений и перемещений, определяются через X_k посредством формул

$$E_0 = -\frac{(1-2\nu)\pi}{2b} X_0, \quad F_0 = \frac{2(1-\nu)\pi}{3b} X_0 \\ A_k = -\frac{X_k}{\alpha_k^2} \frac{2(1-\nu) I_1(\gamma_k) + \gamma_k I_0(\gamma_k)}{\gamma_k [I_0^2(\gamma_k) - I_1^2(\gamma_k)] - 2(1-\nu) \frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k}} \quad (1.36) \\ C_k = \frac{X_k}{\alpha_k^2} \frac{I_1(\gamma_k)}{\gamma_k [I_0^2(\gamma_k) - I_1^2(\gamma_k)] - 2(1-\nu) \frac{I_1^2(\gamma_k)}{\gamma_k}}$$

Отметим также, что асимптотические формулы выражений (1.30) и (1.35) для больших „ k “, получаемые на основании асимптотического представления модифицированных цилиндрических функций для больших значений аргумента совпадают и имеют вид

$$N_k = \frac{(1-2\nu)b}{\pi R_2} \frac{1}{k} + \frac{(1-32\nu-32\nu^2)b^2}{8\pi^2 R_2^2} \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^3}\right) \quad (1.37)$$

Таким образом, числа N_k , ограниченные сверху, при возрастании индекса „ k “ стремятся к нулю, как $O\left(\frac{1}{k}\right)$.

2. Решение парных рядов-уравнений типа (1.29) в случае, когда $N_k = 0$, получено в работах [19, 20] и имеет вид

$$X_0 = \frac{1}{2 \left[c_0 - \ln \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right]} \left[2g(0) - \int_0^\lambda g_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \int_\lambda^\pi h_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \right] \quad (2.1)$$

$$X_k = \frac{y_k(\cos \lambda)}{k} X_0 + \omega_k \quad (2.2)$$

где

$$\omega_k = \frac{1}{2} \int_0^\lambda g_1(\theta) Z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_\lambda^\pi h_1(\theta) Z_k(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (2.3)$$

$$g_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_0^\theta \frac{g'(\varphi) \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} \quad (2.4)$$

$$h_1(\theta) = -\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \int_\theta^\pi \frac{h(\varphi) \sin \frac{\varphi}{2} d\varphi}{\sqrt{\cos \theta - \cos \varphi}}$$

$$y_k(x) = P_{k-1}(x) + P_k(x), \quad Z_k = P_{k-1}(x) - P_k(x)$$

$P_k(x)$ — полиномы Лежандра $|x| \leq 1$.

В нашем случае, для решения (1.29), в первом уравнении этой системы член, содержащий N_k , перенесем вправо. Далее, пользуясь решениями (2.1) и (2.2), после некоторых преобразований для определения неизвестных X_k из (1.29) получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений:

$$X_k = \sum_{p=0}^{\infty} a_{kp} X_p + \omega_k \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \quad (2.5)$$

где

$$\begin{aligned}
 a_{k0} &= \frac{y_k(\cos \lambda)}{k}, & a_{kp} &= \frac{p N_p Q_{kp}(\lambda)}{2} \\
 Q_{kp}(\lambda) &= \int_0^\lambda Z_k(\cos \theta) Z_p(\cos \theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta = \\
 &= \frac{k y_k(\cos \lambda) Z_p(\cos \lambda) - p y_p(\cos \lambda) Z_k(\cos \lambda)}{p^2 - k^2} \quad (p \neq k) \\
 Q_{kk}(\lambda) &= \frac{2 + P_k^2(\cos \lambda) - P_{k-1}^2(\cos \lambda) - 2P_{k-1}(\cos \lambda) P_k(\cos \lambda)}{2k} + \\
 &+ \frac{2}{k} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{j+1} [\cos \lambda P_j(\cos \lambda) - P_{j-1}(\cos \lambda)] P_j(\cos \lambda) \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

ψ_k определяется по формуле (2.3).

При получении (2.5) мы предварительно продифференцировали первое из уравнений (1.29). Поэтому (2.5) тождественно удовлетворяет только второму из уравнений (1.29). После подстановки (2.5) в первое из уравнений (1.29) и некоторых преобразований, члены, содержащие независимую переменную φ , исчезают, и для определения X_0 получим следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
 2 \left(c_0 - \ln \sin^2 \frac{\lambda}{2} \right) X_0 &= 2g(0) + \sum_{k=1}^{\infty} N_k X_k y_k(\cos \lambda) - \\
 &- \int_0^\lambda g_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta - \int_0^\pi h_1(\theta) \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} d\theta \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что числа N_k , входящие в (1.29), (2.5)–(2.7), ограничены сверху и, как следует из (1.37), стремятся к нулю, как $O\left(\frac{1}{k}\right)$, докажем квазивполнерегулярность системы (2.5). Для этого

оценим сумму ряда $\sum_{n=0}^{\infty} |a_{kn}|$. Учитывая неравенства

$$|N_k| < \frac{m}{k}, \quad |y_k(x)| \leq \frac{2}{\sqrt{k}}, \quad |Z_k(x)| \leq \frac{2}{k}; \quad |x| < 1 - \varepsilon \quad (2.8)$$

легко показать, что

$$|a_{k0}| \leq \frac{2}{k^2}, \quad Q_{kk} < \frac{2}{k}, \quad |Q_{kp}| < \frac{4}{\sqrt{kp}|k-p|} \quad (2.9)$$

и для суммы модулей коэффициентов при неизвестных получим

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| = |a_k| + \frac{1}{2} \sum_{p=1}^{\infty} p |N_p Q_{kp}(\lambda)| + \frac{1}{2} k |N_k Q_{kk}(\lambda)| <$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \frac{2}{k^{3/2}} + \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \left[\sum_{p=1}^{p=k-1} \frac{1}{\sqrt{p}(k-p)} + \sum_{p=k+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{p}(p-k)} \right] \right\rangle = \\
& = \frac{2}{k^{3/2}} + \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \left[\sum_{p=1}^{p=k-1} \frac{1}{\sqrt{p}(k-p)} + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{p\sqrt{k+p}} \right] \left\langle \right. \\
& \left. \left\langle \frac{2}{k^{3/2}} + \frac{m}{k} + \frac{2m}{\sqrt{k}} \left[\frac{\sqrt{k-1}+1}{k-1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} + \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{k}} \ln \frac{(\sqrt{1+k} + \sqrt{k})^2 (\sqrt{k} + \sqrt{k-1})^2 (\sqrt{k}-1)}{\sqrt{k+1}} \right] \right\rangle \right\langle \\
& \left. \left. \left. \left\langle m \frac{4 + 2 \ln 4k}{k} + \frac{2(1+m)}{k^{3/2}} \right\rangle \right\rangle \right. \quad (2.10)
\end{aligned}$$

Полученная оценка, являющаяся весьма грубой, при возрастании „ k “ стремится к нулю, откуда следует, что, начиная с некоторого k_0 , будет иметь место неравенство

$$\sum_{p=0}^{\infty} |a_{kp}| < 1 - \varepsilon \quad (k \geq k_0)$$

т. е. система (2.5) квази-вполнерегулярна. Для сплошного вала можно положить $m = 1$, т. к. $|N_k| < 1$. Нетрудно показать, что при сделанных предположениях относительно функций $f_2(z)$ и $f_3(z)$ свободные члены ω_k системы (2.5) ограничены сверху и при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, как $0(k^{-3/2})$.

Таким образом, система (2.5) квази-вполнерегулярна и имеет ограниченные сверху и стремящиеся к нулю свободные члены, что позволяет определять неизвестные X_k с желаемой точностью. При этом, пользуясь методом последовательных приближений, легко доказать, что неизвестные коэффициенты X_k стремятся к нулю, как $0(k^{-3/2})$.

После нахождения X_k можно определить значение рядов, входящих в уравнения (1.29). Т. к. числа X_k при $k \rightarrow \infty$ стремятся к нулю, как $0(k^{-3/2})$, то сумма первого ряда системы (1.29) будет ограниченной и непрерывной функцией, которую можно будет вычислить численно. Второй же ряд системы (1.29) абсолютно не сходится. Однако вдали от концов дисков сумму этого ряда можно вычислить непосредственной подстановкой значения X_k . У краев диска $\varphi = \lambda - 0$ ряд расходится, поэтому для получения формул, пригодных вблизи краев диска, целесообразно предварительно преобразовать выражение этого ряда. Для этого X_k из бесконечной системы (2.5) представим в виде

$$2X_k = [2X_0 - g_1(\lambda) + h_2(\lambda)] \frac{y_k(\cos \lambda)}{k} + \frac{1}{k} \int_0^{\lambda} g_1(\theta) y_k(\cos \theta) d\theta +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{k} \int_{\lambda}^{\pi} h_1'(\theta) y_k(\cos \theta) d\theta + \frac{1}{k} \sum_{p=1}^{\infty} p N_p X_p \left[p \int_0^{\lambda} y_k(\cos \theta) y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta - \right. \\
 & \left. - y_k(\cos \lambda) Z_p(\cos \lambda) \right] \quad (2.11)
 \end{aligned}$$

и далее, подставив (2.11) во второе уравнение системы (1.29) и используя значение ряда [20]

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} y_k(\cos \theta) \cos k\varphi = \begin{cases} \frac{\sqrt{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} & \varphi < \theta \\ 0 & \varphi > \theta \end{cases}$$

с учетом $0 < \varphi < \lambda$, окончательно получим

$$\sigma_r(R_2, \varphi) = \frac{M \cos \frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \lambda}} + F(\varphi) \quad (0 < \varphi < \lambda)$$

где

$$\begin{aligned}
 M &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[2X_0 - g_1(\lambda) + h_1(\lambda) - \sum_{k=1}^{\infty} k N_k X_k Z_k(\cos \lambda) \right] \\
 F(\varphi) &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left[\int_{\varphi}^{\lambda} \frac{g_1'(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} + \int_{\lambda}^{\pi} \frac{h_1'(\theta) d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} + \right. \\
 & \left. + \sum_{p=1}^{\infty} p^2 N_p X_p \int_{\varphi}^{\lambda} \frac{y_p(\cos \theta) \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} d\theta}{\sqrt{\cos \varphi - \cos \theta}} \right] \cos \frac{\varphi}{2}
 \end{aligned}$$

Институт математики и механики
АН АрмССР

Поступила 3 IV 1967

Ս. Հ. ԲԱԲԼՅԱՆ, Ա. Պ. ՄԵԼԿՈՆՅԱՆ

ՊԱՐՔԵՐԱՔԱՐ ՀԱԳՑՎԱԾ ՍԿԱՎԱՌԱԿՆԵՐՈՎ ՍՆԱՄԵՋ ԱՆՎԵՐՋ ԳՎԱՆԻ
ԱՌԱՆՑՔԱՍԻՄԵՏՐԻԿ ԽՆԴԻՐԸ

Ա. մ. փ. ո. փ. ո. ի. մ.

Աշխատանքում բերվում է մասմեջ անվերջ երկար գլանի առանցքա-
սիմետրիկ խնդրի ճշգրիտ լուծումը, երբ գլանի արտաքին մակերևույթի
վրա հազցված են միանման, իրարից հավասարապես հեռացված կոշտ սկա-

վառաններ, իսկ արտաքին մակերևույթի մնացած մասի և ներքին մակերևույթի վրա կիրառված են արտաքին ուժեր, որոնք ազդում են մակերևույթների նորմալի ուղղությամբ:

Ոնդրի լուծումը ներկայացվում է հոանկլոնաչափական շարքերի տեսքով, որոնց գործակիցների որոշման համար ստացված են զույգ շարք-հավասարումներ: Վերջինս բերվում է դժային համասարումների անվերջ սխեմանի լուծմանը, որի համար ապացուցված է քվադր-լիտին սեզուլյարությունը:

A. A. BABLOYAN, A. A. MELKONIAN

AXISYMETRICAL PROBLEM FOR CORED INFINITE CYLINDER WITH PERIODICALLY IMPLANTED DISKS

S u m m a r y

In this paper the exact solution of the axisymmetric mixed problem for infinite cylinder with rigid disks implanted on equal distance from one another on the external surface is obtained. On the internal surface and in the part of the external surface between the disks a radial pressure is applied.

The solution of the problem is represented in trigonometrical series. Determination of arbitrary constant is brought to the dual series-equations. Later the problem is brought to the solution of an infinite system of algebraic equations, for which quasi-quite regularity is proved.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Okubo H. The Stress Distribution in Shaft Press-fitted with a Coller. Zeitschr. für ang. Math. and Mech., Bd. 32, № 6, 1952.
2. Лившиц П. Э. О распределении напряжений по контактной поверхности при горячей посадке диска постоянной толщиной на сплошной вал. Изв. АН СССР, ОТН, № 4, 1955.
3. Колян Б. И. Напряженное состояние бесконечного цилиндра, зажатого в абсолютно жесткую полубесконечную цилиндрическую обойму. ПММ, т. XX, № 2-1956.
4. Воронин Т. А. Контактные напряжения, возникающие при тугой посадке жесткой втулки на бесконечный цилиндр. Изв. АН СССР, ОТН, № 8, 1957.
5. Александров В. М. Осесимметричная контактная задача для упругого бесконечного цилиндра. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1962.
6. Александров В. М. К решению некоторых контактных задач теории упругости. ПММ, т. XXVII, № 5, 1963.
7. Попов Г. Я. К решению контактных (смешанных) задач теории упругости для бесконечно длинного кругового цилиндра. Изв. АН АрмССР, сер. физ.-мат. наук, т. XVII, № 4, 1964.

8. *Olesiak Z.* Stan naprezen i odkształcen rurze lub wale współpracujących z pierścieniami lub tarczami kołowymi. *Archiwum Budowy maszyn*, T. IV, № 2, 1957.
9. *Olesiak Z.* The State of Stress and Strain in Tubes Reinforced with Rings. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, Classe quatrieme*, Vol. V, № 3, Varsovie, 1957.
10. *Olesiak Z.* The state of stress and strain in shaft with press-fitted rings or circular disks. *Bulletin de l'Academie Polonaise des Science. Class quatrieme*, Vol. V, № 3, 1957.
11. *Sparenberg J. A.* On a shrink-fit problem. *Appl. Scient. Res.*, A-7, 2-3, 1958.
12. *Severn R. T.* Shrink-fit stresses between tubes having a finite interval of contact. *Quart. J. Mech. and Appl. Math.*, т. 12, № 1, 1959.
13. *Коган Б. И., Хрусталеv А. Ф.* Об одной осесимметричной задаче теории упругости для полого цилиндра. *ПММ*, т. XXII, № 5, 1958.
14. *Хрусталеv А. Ф.* Осесимметрическая смешанная задача теории упругости для трансверсально-изотропного материала. *Изв. высш. учебных заведений, Математика*, № 1, 1964.
15. *Хрусталеv А. Ф., Вайнштейн Ф. А.* Об одной смешанной задаче теории упругости для трансверсально-изотропного полого цилиндра. *Изв. высш. учебных заведений, Математика*, № 3, 1963.
16. *Александров В. М., Бабешко В. А., Белоконов А. В., Воронин И. И., Устинов Ю. А.* Контактная задача для кольцевого слоя малой толщины. *Инж. ж., Мех. тв. тела*, № 1, 1966.
17. *Лурье А. И.* К теории толстых плит. *ПММ*, т. VI, вып. 2-3, 1942.
18. *Лурье А. И.* Напряженное состояние в упругом цилиндре, нагруженном по боковой поверхности. *Инж. сб.*, т. XVII, 1953.
19. *Srivastav R. P.* III. Dual relations involving trigonometric series. *Proc. Roy. Soc. Edinb. (Sec. A)*, vol. 66, Pt. III, 1964, 173-184.
20. *Баблюя А. А.* Решение некоторых парных уравнений, встречающихся в задачах теории упругости. *ПММ*, т. 31, вып. 4, 1967.