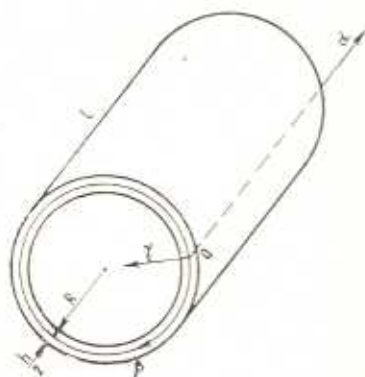


Г. З. МИКАЕЛЯН

### УСТОЙЧИВОСТЬ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ПРИ ПЕРЕМЕННОМ ПО ДЛИНЕ ВНЕШНЕМ ДАВЛЕНИИ С УЧЕТОМ НАЧАЛЬНОГО МОМЕНТНОГО СОСТОЯНИЯ

В данной статье рассматривается устойчивость моментного напряженного состояния упругой пологой круговой цилиндрической оболочки и исследуется влияние деформации невозмущенного состояния на величину критической нагрузки. Разбираются случаи однослойной изотропной и многослойной ортотропной оболочек.

1. Пусть изотропная цилиндрическая оболочка (фиг. 1) подвергается действию осесимметрично-сжимающей распределенной нагрузки  $q$ , которая нормально приложена к внешней цилиндрической поверхности и изменяется вдоль образующих по заданному закону. Очевидно, что состояние равновесия ( $F_0$ ) до потери устойчивости будет осесимметричным. Для определения этого состояния имеем следующую разрешающую систему дифференциальных уравнений:



Фиг. 1.

$$D \frac{d^4 w_0}{dx^4} = \frac{1}{R} \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} + q \quad (1.1)$$

$$\frac{1}{Eh} \frac{d^4 \varphi_0}{dx^4} = - \frac{1}{R} \frac{d^2 w_0}{dx^2}$$

где  $w_0$  — нормальное перемещение,  $\varphi_0$  — функция напряжений,  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  — жесткость оболочки на изгиб,  $E$  и  $\nu$  — упругие постоянные материала оболочки.

Допустим, что по торцам оболочка шарнирно скреплена с абсолютно жесткими шпангоутами, которые свободны в осевом направлении; тогда граничные условия для краев  $x = 0$ ,  $x = l$  имеют вид

$$M_1^0 = 0, \quad w_0 = 0, \quad T_1^0 = 0 \quad (1.2)$$

Решая систему уравнений (1.1), с учетом граничных условий (1.2), можно определить функции  $w_0$  и  $\varphi_0$ , характеризующие невозмущенное состояние оболочки.

2. Рассмотрим устойчивость напряженного состояния  $F_0$ . Пусть при определенном соотношении параметров осесимметричное напря-

женное состояние оболочки теряет устойчивость и появляется неосесимметричное равновесное состояние  $F^*$ .

В силу осесимметричности состояния  $F_0$  будем иметь следующую систему дифференциальных уравнений устойчивости оболочки [1, 2]:

$$D\nabla^4 w_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \beta^2} + \frac{d^2 \varphi_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \beta^2} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \varphi_1 = - \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}$$

Здесь  $w_1$  — дополнительное малое нормальное перемещение, которое нужно сообщить оболочке, чтобы перевести ее из положения  $F_0$  в положение  $F^*$ ;  $\varphi_1$  — соответствующее приращение функции напряжений;

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}$$

К уравнениям (2.1) необходимо присоединить следующие однородные граничные условия:

$$M_1^1 = T_1^1 = w_1 = 0 \quad \text{при } x = 0, \quad x = l \quad (2.2)$$

Таким образом, задача сводится к исследованию системы линейных однородных дифференциальных уравнений относительно функций  $w_1$ ,  $\varphi_1$ . Отметим, что переменные коэффициенты этих уравнений отражают влияние докритической деформации.

Из условия существования нетривиальных решений уравнений (2.1) определяется критическое значение нагрузки.

3. Рассмотрим устойчивость оболочки в случае, когда осесимметричная нагрузка изменяется вдоль образующих по закону

$$q = q_0 \sin \lambda x \quad \left( \lambda = \frac{\pi}{l} \right) \quad (3.1)$$

Решая совместно уравнения (1.1) и удовлетворяя всем граничным условиям (1.2), для  $w_0$  и  $\varphi_0$  получим

$$w_0 = A_0 q, \quad \varphi_0 = \frac{Eh}{l^2 R} A_0 q$$

где

$$A_0 = \frac{1}{Dl^4 + \frac{Eh}{R^2}}$$

Предполагая, что выпучивание оболочки характеризуется законом

$$w_1 = A_1 \sin \lambda x \sin \mu \beta \quad \left( \mu = \frac{\pi}{R} \right) \quad (3.2)$$

а соответствующая функция напряжений —

$$\varphi_1 = B_1 \sin \lambda x \sin \mu \beta \quad (3.3)$$

и интегрируя уравнения (2.1) методом Бубнова-Галеркина, находим критическое значение параметра нагрузки  $q_0$

$$q_0^* = q_0^* K \quad (3.4)$$

$$q_0^* = \frac{\frac{Eh}{R^2} i^4 + D(\lambda^2 + \mu^2)^4}{R\mu^2(i^2 + \mu^2)^2} \quad (3.5)$$

$$K = \frac{3\pi}{8} \frac{1 + \frac{\pi^4}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{h}{R}\right)^2 \left(\frac{l}{R}\right)^{-4}}{1 + 2 \left| 1 + \frac{n^2}{\pi^2} \left(\frac{l}{R}\right)^2 \right|^{-2}} \quad (3.6)$$

Здесь  $q_0^*$  — критическое значение равномерного внешнего давления в предположении безмоментности начального напряженного состояния;  $K$  — безразмерный параметр нагрузки.

Минимизируя  $q_0^*$  по  $n$ , определим верхнее значение критической нагрузки.

4. Рассмотрим влияние докритической деформации на величину критической нагрузки.

Как видно из (3.4)–(3.6), указанное влияние в основном характеризуется отношением длины оболочки к ее радиусу и числом волн  $n$  в окружном направлении оболочки.

Исследование зависимости (3.6) показывает, что при возрастании отношения  $\frac{l}{R}$  от нуля до некоторого значения в окрестности  $\frac{l}{R} = 0.5$  коэффициент  $K$ , начиная от  $\infty$ , убывает и получает минимальное значение в пределах  $\frac{1}{3} < K < \frac{3\pi}{8}$ ; при дальнейшем увеличении  $\frac{l}{R}$  коэффициент  $K$  возрастает и асимптотически стремится к пределу  $\frac{3\pi}{8}$ .

С увеличением числа волн  $n$  значения  $q_0^*$  все более приближаются к соответствующим значениям  $q_0^*$ .

Отметим также, что при  $\frac{l}{R} \gg 1$  последним членом в числителе выражения  $K$  можно пренебречь.

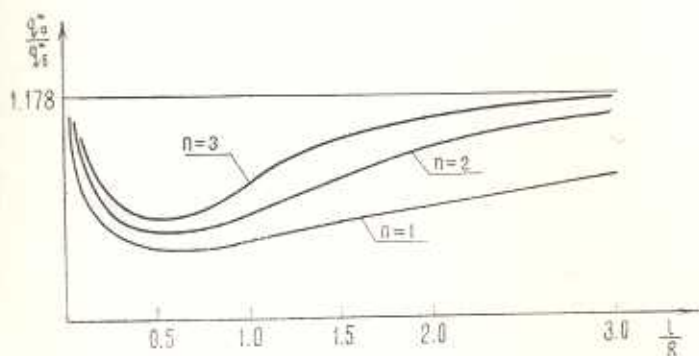
На фиг. 2 изображена зависимость между безразмерным параметром нагрузки  $\frac{q_0^*}{q_0^*}$  и отношением  $\frac{l}{R}$  при  $\nu = 0.3$ ,  $\frac{h}{R} = \frac{1}{100}$ ,  $n = 1, 2, 3$ .

Рассмотрение фиг. 2 позволяет определить интервал изменения  $\frac{l}{R}$ , когда различие между  $q_0^*$  и  $q_0^*$  становится более существенным.

При  $n = 2$ ,  $n = 3$ , можно считать, что указанные значения  $\frac{l}{R}$  лежат в пределах

$$0.25 < \frac{l}{R} < 2$$

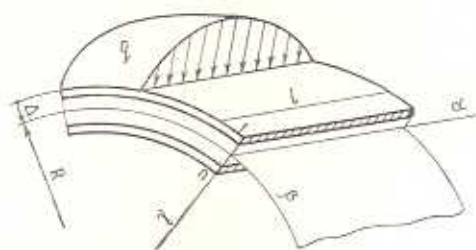
При  $l = 1$  поперечные сечения оболочки перемещаются как жесткое целое. В этом частном случае искомые значения  $\frac{l}{R}$  занимают почти весь встречающийся на практике диапазон значений этого отношения.



Фиг. 2.

5. Приводим решение аналогичной задачи для многослойной ортотропной цилиндрической оболочки, отнесенной к системе криволинейных ортогональных координат  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  (фиг. 3). В этой системе цилиндрическая координатная поверхность радиуса  $R$  находится на расстоянии  $\Delta$  от внешней поверхности оболочки.

Будем считать, что плоскости упругой симметрии материала каждого слоя перпендикулярны координатным линиям  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ .



Фиг. 3.

Осесимметричная равновесная форма  $F_0$  оболочки описывается следующей системой дифференциальных уравнений [3]:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{d^4 \varphi_0}{dx^4} + a_4 \frac{d^4 w_0}{dx^4} &= -\frac{1}{R} \frac{d^2 w_0}{dx^2} \\ b_1 \frac{d^4 w_0}{dx^4} - a_4 \frac{d^4 \varphi_0}{dx^4} &= \frac{1}{R} \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} + q \end{aligned} \quad (5.1)$$

где

$$a_1 = \frac{C_{11}}{\Omega}, \quad a_4 = \frac{1}{\Omega} (K_{12} C_{11} - K_{11} C_{12})$$

$$b_1 = D_{11} - \frac{1}{\Omega} (K_{11}^2 C_{22} - 2K_{11}K_{12}C_{12} + K_{12}^2 C_{11})$$

$$\Omega = C_{11}C_{22} - C_{12}^2$$

Для жесткостей  $C_{jk}$ ,  $K_{jk}$ ,  $D_{jk}$  имеем

$$C_{jk} = \sum_{i=1}^n B_{jk}^i (\delta_i - \delta_{i-1})$$

$$K_{jk} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n B_{jk}^i [(\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) - 2\Delta (\delta_i - \delta_{i-1})]$$

$$D_{jk} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n B_{jk}^i [(\delta_i^3 - \delta_{i-1}^3) - 3\Delta (\delta_i^2 - \delta_{i-1}^2) + 3\Delta^2 (\delta_i - \delta_{i-1})]$$

Здесь  $\delta_i$  — расстояние внутренней поверхности  $i$ -го слоя от внешней поверхности оболочки,

$$B_{11}^i = \frac{E_1^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{22}^i = \frac{E_2^i}{1 - \nu_1^i \nu_2^i}, \quad B_{66}^i = G_1^i$$

$$B_{12}^i = \nu_1^i B_{22}^i = \nu_2^i B_{11}^i$$

Уравнения устойчивости напряженного состояния  $F_0$  оболочки имеют вид [4—6]

$$L(a_j) \varphi_1 + L(a_k) w_1 = - \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \beta^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \quad (5.2)$$

$$L(b_j) w_1 - L(a_k) \varphi_1 = \frac{1}{R} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} + \frac{d^2 w_0}{dx^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \beta^2} + \frac{d^2 \varphi_0}{dx^2} \frac{\partial^2 w_1}{\partial \beta^2}$$

где

$$L(a_j) = a_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + a_3 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}$$

$$L(a_k) = a_4 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + a_5 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + a_6 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}$$

$$L(b_j) = b_1 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + b_2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial \beta^2} + b_3 \frac{\partial^4}{\partial \beta^4}$$

Коэффициенты имеют следующие значения:

$$a_2 = \frac{1}{C_{66}} - 2 \frac{C_{12}}{\Omega}, \quad a_3 = \frac{C_{22}}{\Omega}$$

$$a_5 = \frac{1}{\Omega} (K_{11}C_{22} - 2K_{12}C_{12} + K_{22}C_{11}) - 2 \frac{K_{66}}{C_{66}}$$

$$a_6 = \frac{1}{\Omega} (K_{12}C_{22} - K_{22}C_{12})$$

$$b_2 = 2 \left\{ D_{12} - \frac{1}{2} [K_{11}K_{12}C_{22} - (K_{11}K_{22} + K_{12}^2)C_{12} + K_{22}K_{12}C_{11}] + \right. \\ \left. + 2 \left( D_{46} - \frac{K_{46}^2}{C_{44}} \right) \right\}$$

$$b_3 = D_{22} - \frac{1}{2} (K_{22}^2C_{11} - 2K_{22}K_{12}C_{12} + K_{12}^2C_{22})$$

Пусть оболочка находится под действием нагрузки (3.1) при граничных условиях (1.2). Повторяя предыдущие рассуждения и выкладки, определим критическое значение синусоидального внешнего давления.

Из (5.1) для определения  $w_0$  получаем дифференциальное уравнение

$$\left( b_1 + \frac{a_1^2}{a_1} \right) \frac{d^4 w_0}{dz^4} + \frac{2a_1}{a_1 R} \frac{d^2 w_0}{dz^2} + \frac{w_0}{a_1 R^2} = q$$

С учетом (1.2) находим решение этого уравнения в виде

$$w_0 = A_0 q_0 \sin \lambda z$$

Функция напряжений  $\tau_0$  определяется выражением

$$\tau_0 = \frac{A_0}{a_1 \lambda^2} \left( \frac{1}{R} - a_1 \lambda^2 \right) q_0 \sin \lambda z$$

Здесь

$$A_0 = \left[ \left( b_1 + \frac{a_1^2}{a_1} \right) \lambda^4 + \frac{2a_1}{a_1 R} \lambda^2 + \frac{1}{a_1 R^2} \right]^{-1}$$

Принимая выражения для  $w_1$ ,  $\tau_1$  в виде (3.2), (3.3) и интегрируя уравнения (5.2), находим

$$q_0^* = q_0^* K \quad (5.3)$$

$$q_0^* = \frac{\left( \Phi(a_k) - \frac{\lambda^2}{R} \right)^2 + \Phi(a_j) \Phi(b_j)}{R \mu^2 \Phi(a_j)}$$

$$K = \frac{3\pi}{8} \frac{1 + 2a_1 R \lambda^2 + (a_1 b_1 + a_1^2) R^2 \lambda^4}{1 - a_1 R \lambda^2 + \frac{2a_1 R \lambda^2}{\Phi(a_j)} \left( \frac{\lambda^2}{R} - \Phi(a_k) \right)}$$

где

$$\Phi(a) = a_1 \lambda^4 + a_2 \lambda^2 \mu^2 + a_3 \mu^4$$

$$\Phi(a_k) = a_4 \lambda^4 + a_5 \lambda^2 \mu^2 + a_6 \mu^4$$

$$\Phi(b_j) = b_1 \lambda^4 + b_2 \lambda^2 \mu^2 + b_3 \mu^4$$

Сравнивая полученный результат с аналогичным результатом для однослойной изотропной оболочки, замечаем, что слоистость и ани-

зотропия, как и следовало ожидать, вносят только количественные поправки в выражение критической нагрузки.

6. Рассмотрим численные примеры.

Определим верхнее критическое значение синусоидального внешнего давления для дюралюминиевой и стальной однослойных оболочек и двухслойной оболочки, составленной из этих оболочек.

Пусть для дюралюминиевой оболочки

$$E_1 = 0.75 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \nu = 0.3, \quad h = 0.1 \text{ см}$$

для стальной оболочки

$$E_2 = 2 \cdot 10^6 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2}, \quad \nu = 0.3, \quad h = 0.1 \text{ см}$$

Будем считать, что  $R = 40 \text{ см}$ ,  $l = 2R$ .

Минимизируя  $q_0^*$  по  $n$ , для дюралюминиевой оболочки находим

$$q_{0, \min}^* = 0.168 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \text{при } n = 9$$

для стальной оболочки

$$q_{0, \min}^* = 0.448 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \text{при } n = 9$$

для двухслойной оболочки

$$q_{0, \min}^* = 1.221 \frac{\text{кг}}{\text{см}^2} \quad \text{при } n = 7$$

Интересно отметить, что для однослойных изотропных оболочек, при одинаковых размерах и граничных условиях, форма потери устойчивости, соответствующая  $q_{0, \min}^*$ , зависит только от коэффициента Пуассона.

Ереванский политехнический институт  
им. К. Маркса

Поступила 28 XII 1966

Հ. Զ. ՄԻԿԱԵԼՅԱՆ

ՇԵՐՏԱՎՈՐ ԵՎ ՕՐԹՈՏՐՈՊ ՇՐՋԱՆԱՅԻՆ ԳԼԱՆԱՅԻՆ ԹԱՂԱՆԹԻ  
ԿԱՅՈՒՆՈՒԹՅՈՒՆԸ ԱՐՏԱՔԻՆ ՃՆՇՄԱՆ ԳԵՊՔՈՒՄ

Ա մ փ ո փ ու լ մ

Դիտարկվում է՝ փոքր կորույթյուն ունեցող, շրջանային, գլանային առաձգական թաղանթի մոմենտային լարվածային վիճակի կայունությունը: Ուսումնասիրվում է՝ արտաքին գլանային մակերևույթով առանցքաժամկ-

արիկ նշման դեպքը: Հետազոտվում է թաղանթի տանցքափմեարիկ գե-  
ֆորմացիայի ազդեցությունը կրիտիկական ուժի մեծության վրա: Խնդիրը  
լուծվում է՝ բարակ և շերտավոր անիզոտրոպ թաղանթների առաջին  
համաձայն, չդեֆորմացվող նորմալների հիպոթեզի հաշվառմամբ:

G. Z. MIKAELIAN

## STABILITY OF MULTILAYER ORTHOTROPIC CIRCULAR CYLINDRICAL SHELL UNDER PRESSURE

### S u m m a r y

In this paper the stability of momental stress state of flexibility of a cylindrical shell is considered.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Новожилов В. В. Основы нелинейной теории упругости. Гостехиздат, Л.-М., 1948.
2. Муштарі Х. М., Галимов К. Э. Нелинейная теория упругих оболочек. Татки-  
гоиздат, Казань, 1957.
3. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
4. Вольмир А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, М., 1963.
5. Гичин В. Ц. О границах динамической неустойчивости оболочек. Труды конфе-  
ренции по теории пластин и оболочек, Казань, 1961.
6. Микаэлян Г. З. Известия АН АрмССР, Механика, т. XIX, № 5, 1966.