ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР
Մեխանիկա XX, № 6, 1967 Механика

К. С. ЧОБАНЯН, А. С. ХАЧИКЯН

ПЛОСКОЕ ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ УПРУГОГО ТЕЛА С ТОНКОСТЕННЫМ ГИБКИМ ВКЛЮЧЕНИЕМ

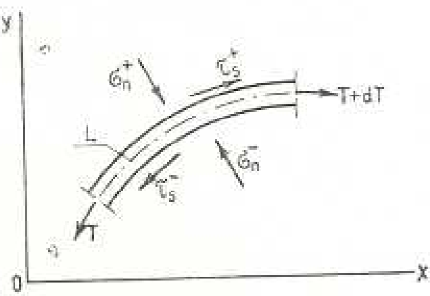
В работе рассмотрены условия на тонкостенном гибком включении, которым удовлетворяют предельные значения напряжений и перемещений в подвергнутом плоской деформации упругом теле.

Исследованы две задачи упругого равновесия бесконечной плоскости с прямолинейным тонким включением, находящейся под действием сосредоточенных сил, приложенных симметрично относительно включения.

1. Рассмотрим плоское деформированное состояние упругого тела с тонкостенным цилиндрическим гибким включением, когда плоскость деформаций перпендикулярна к образующим цилиндрического включения. Принимаем, что контакт между частями тела и включения осуществляется полным сцеплением.

Величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние упругого тела, слева от включения обозначим индексом „+“, а справа — индексом „−“, величины же, относящиеся к внутренним точкам включения — без индекса. Составляя условия равновесия узкого элемента включения, имеющего единичную длину в направлении оси z (фиг. 1), находим

$$
\begin{aligned}
&\sigma_n^+ - \sigma_n^- + \frac{1}{\rho} T = 0 \\
&\tau_s^+ - \tau_s^- + \frac{\partial T}{\partial s} = 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$



Фиг. 1.

где $\sigma_n^{\pm}$ и $\tau_s^{\pm}$ — нормальные и касательные напряжения на контактах, s и n—направления касательной и нормали к средней линии L поперечного сечения включения, ρ — радиус кривизны L, а T — натяжение включения

$$
T = \int_{-h}^{h} \sigma_s dn \tag{1.2}
$$

Здесь $2h$ — толщина включения.

Деформации включения в криволинейных координатах s, n, где n — расстояние точки по нормали до средней поверхности включения, определяются соотношениями

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_n &= \frac{\partial u_n}{\partial n} \\
\varepsilon_s &= \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n}{\rho} \\
\gamma_{sn} &= \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial u_n}{\partial s} - \frac{u_s}{\rho}
\end{aligned}
\tag{1.3}
$$

Материал включения принимаем ортотропным, причем направления s, n и z являются главными направлениями изотропии

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_s &= \frac{\sigma_s}{E_s} - \frac{\nu_{sn}}{E_s}\sigma_n - \frac{\nu_{sz}}{E_s}\sigma_z \\
\varepsilon_n &= \frac{\sigma_n}{E_n} - \frac{\nu_{ns}}{E_n}\sigma_s - \frac{\nu_{nz}}{E_n}\sigma_z \\
\varepsilon_z &= \frac{\sigma_z}{E_z} - \frac{\nu_{zs}}{E_z}\sigma_s - \frac{\nu_{zn}}{E_n}\sigma_n \\
\gamma_{sn} &= \frac{\tau_{sn}}{G_{sn}}, \qquad \gamma_{sz} = \gamma_{nz} = 0
\end{aligned}
\tag{1.4}
$$

Между коэффициентами поперечных деформаций имеются зависимости

$$
\frac{\nu_{sn}}{E_s} = \frac{\nu_{ns}}{E_n}, \qquad \frac{\nu_{sz}}{E_s} = \frac{\nu_{zs}}{E_z}, \qquad \frac{\nu_{nz}}{E_n} = \frac{\nu_{zn}}{E_z} \tag{1.5}
$$

Используя условие $\varepsilon_z = 0$, из первых двух соотношений (1.4) исключаем σ_z

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_s &= a_{ss}\sigma_s - a_{sn}\sigma_n \\
\varepsilon_n &= a_{nn}\sigma_n - a_{ns}\sigma_s \\
\gamma_{sn} &= b_{sn}\tau_s
\end{aligned}
\tag{1.6}
$$

Здесь введены обозначения

$$
\begin{aligned}
a_{ss} &= \frac{1}{E_s}(1 - \nu_{sz}\nu_{zs}), \qquad a_{sn} = \frac{1}{E_s}(\nu_{sn} + \nu_{sz}\nu_{zn}) \\
a_{nn} &= \frac{1}{E_n}(1 - \nu_{nz}\nu_{zn}), \qquad a_{ns} = \frac{1}{E_n}(\nu_{ns} + \nu_{nz}\nu_{zs}) \\
b_{sn} &= \frac{1}{G}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

На основании (1.5) $a_{sn} = a_{ns}$.

Используя тонкостенность включения, получаем следующие приближенные зависимости:

$$u_s = \frac{u_s^+ + u_s^-}{2}, \qquad u_n = \frac{u_n^+ + u_n^-}{2}, \qquad \varepsilon_n = \frac{u_n^+ - u_n^-}{2h}$$

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n^+ + u_n^-}{2\rho}, \qquad \gamma_{sn} = \frac{u_s^+ - u_s^-}{2h} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_n^+}{\partial s} + \frac{1}{2}\frac{\partial u_n^-}{\partial s} - \frac{u_s^+ + u_s^-}{2\rho} \tag{1.8}$$

$$\sigma_n = \frac{\sigma_n^+ + \sigma_n^-}{2}, \qquad \tau_s = \frac{\tau_s^+ + \tau_s^-}{2}, \qquad \sigma_s = \frac{T}{2h} \tag{1.9}$$

Подставляя (1.8) и (1.9) в (1.6), получаем

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{u_n^+ - u_n^-}{2\rho} = a_{ss}\frac{T}{2h} - a_{sn}\frac{\sigma_n^+ + \sigma_n^-}{2}$$

$$\frac{u_n^+ - u_n^-}{2h} = a_{nn}\frac{\sigma_n^+ + \sigma_n^-}{2} - a_{ns}\frac{T}{2h} \tag{1.10}$$

$$\frac{u_s^+ - u_s^-}{h} + \frac{\partial u_n^+}{\partial s} + \frac{\partial u_n^-}{\partial s} - \frac{u_s^+ + u_s^-}{\rho} = b_{sn}(\tau_s^+ + \tau_s^-)$$

Таким образом, получено пять условий (1.1) и (1.10) для предельных значений напряжений и перемещений на тонкостенном гибком включении и для натяжения T.

Считая поперечные деформации включения малыми и пренебрегая отношением h/ρ по сравнению с единицей, условия (1.10) можно упростить

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{a_{ss}}{2h}T - \frac{a_{sn}}{2}(\sigma_n^+ + \sigma_n^-)$$

$$u_n^+ - u_n^- = a_{nn}h(\sigma_n^+ + \sigma_n^-) - a_{ns}T \tag{1.11}$$

$$u_s^+ - u_s^- = hb_{sn}(\tau_s^+ + \tau_s^-) - h\left(\frac{\partial u_n^+}{\partial s} + \frac{\partial u_n^-}{\partial s}\right)$$

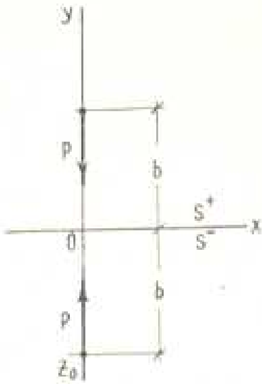
Пренебрегая совсем поперечными деформациями и считая толщину включения достаточно малой, вместо (1.11) получаем предельно упрощенные условия

$$\frac{\partial u_s}{\partial s} = \frac{a_{ss}}{2h}T, \qquad u_n^+ = u_n^-, \qquad u_s^+ = u_s^- \tag{1.12}$$

2. Рассмотрим упругое равновесие двух полупространств, соединенных между собой при помощи тонкой упругой пластинки, под действием перпендикулярных к пластинке сил, равномерно распределенных по двум равноудаленным от пластинки параллельным прямым, лежащим по разные стороны от пластинки. Исключая перемещения в направлении этих прямых, будем иметь задачу плоского деформированного состояния для упругой плоскости с бесконечным упругим прямолинейным включением при действии двух сосредоточенных сил (фиг. 2).

Вследствие симметрии имеем

$$u_n^-(x,\ 0) = 0, \qquad \tau^-(x,\ 0) = -\tau^+(x,\ 0) \tag{2.1}$$



Фиг. 2.

На основании (1.1), (1.12) и (2.1) получаем

$$\tau_{xy}^- = k\frac{\partial^2 u_s^-}{\partial x^2} \tag{2.2}$$

где

$$k = \frac{hE_s}{1-\nu_{sz}\nu_{zs}}$$

а в случае изотропного включения

$$k = \frac{hE}{1-\nu^2} \tag{2.3}$$

Рассматриваемую задачу решим путем приведения к задаче сопряжения [1].

В силу симметрии будем рассматривать только нижнюю полуплоскость.

Напряжения σ_y, τ_{xy} и производные перемещений $u_s = u$, $u_n = v$ выражаются через две функции комплексного переменного следующими формулами:

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \tag{2.4}$$

$$2G(u' + iv') = \varkappa\Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)} \tag{2.5}$$

где

$$u' = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad v' = \frac{\partial v}{\partial x}, \qquad \varkappa = 3 - 4\nu$$

В точке приложения сосредоточенной силы P функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ имеют особенность

$$\Phi(z) = -\frac{iP}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{1}{z-z_0} + \Phi_0(z) \tag{2.6}$$

$$\Psi(z) = -\frac{i\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{1}{z-z_0} - \frac{i\bar{z}_0 P}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{1}{(z-z_0)^2} + \Psi_0(z) \tag{2.7}$$

Здесь $z_0 = -ib$ — точка приложения силы P, $\Phi_0(z)$ и $\Psi_0(z)$ — аналитические в нижней полуплоскости функции.

Следуя [1], в верхней полуплоскости определим функцию $\Phi_0(z)$ при помощи следующего соотношения:

$$\Phi_0(z) = -\overline{\Phi}_0(z) - z\overline{\Phi}'_0(z) - \overline{\Psi}_0(z) \quad \text{при} \quad z \ \text{в} \ S^+ \tag{2.8}$$

где

$$\overline{\Phi}_0(z) = \overline{\Phi_0(\bar{z})}, \qquad \overline{\Psi}_0(z) = \overline{\Psi_0(\bar{z})}$$

Переходя в (2.8) к сопряженным значениям, находим

$$\Psi_0(z) = -\Phi_0(z) - \overline{\Phi}_0(z) - z\Phi_0'(z) \tag{2.9}$$

Внося (2.6), (2.7) и (2.9) в (2.4) и (2.5), получаем

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = A(z) + \Phi_0(z) - \Phi_0(\overline{z}) + (z - \overline{z})\overline{\Phi_0'(z)} \tag{2.10}$$

$$2G(u' + iv') = B(z) + \varkappa\Phi_0(z) + \Phi_0(\overline{z}) - (z - \overline{z})\overline{\Phi_0'(z)} \tag{2.11}$$

где введены обозначения

$$\begin{aligned} A(z) &= c\left[\frac{1+\varkappa}{\overline{z} - ib} - \frac{1}{z + ib} - \frac{z + ib}{(\overline{z} - ib)^2}\right] \\ B(z) &= c\left[\frac{z + ib}{(\overline{z} - ib)^2} - \frac{1+\varkappa}{\overline{z} - ib} - \frac{\varkappa}{z + ib}\right] \end{aligned} \tag{2.12}$$

$$c = \frac{iP}{2\pi(1+\varkappa)}$$

Первое условие (2.1) и условие (2.2) в новых обозначениях перемещений будут

$$v^{\pm}(x, 0) = 0, \qquad \tau_{xy}^{-} = k\frac{d^2u(x, 0)}{dx^2} \tag{2.13}$$

Удовлетворяя этим условиям, на основании (2.10) и (2.11) имеем

$$\begin{aligned} &\Phi_0^-(t) - \overline{\Phi_0^-(t)} - \Phi_0^+(t) + \overline{\Phi_0^+(t)} + n\varkappa\Phi_0'^-(t) + n\Phi_0'^+(t) = \\ &= \overline{A(t)} - A(t) - nB'(t), \qquad -\infty < t < \infty \end{aligned} \tag{2.14}$$

где

$$n = \frac{ik}{G}$$

Функция $F(z)$, определенная формулой

$$F(z) = \begin{cases} \Phi_0(z) + \overline{\Phi}_0(z) - n\Phi_0'(z) & \text{при } z \text{ в } S^+ \\ \Phi_0(z) + \overline{\Phi}_0(z) + n\varkappa\Phi_0'(z) & \text{при } z \text{ в } S^- \end{cases} \tag{2.15}$$

кусочно-голоморфна с линией скачков, совпадающей с действительной осью.

На основании (2.14) и (2.15) имеем

$$F^+(t) - F^-(t) = A(t) - \overline{A(t)} + nB'(t), \qquad -\infty < t < \infty \tag{2.16}$$

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{A(t) - \overline{A(t)} + nB'(t)}{t - z}\,dt \tag{2.17}$$

Используя (2.13) и (2.5), получаем

$$\begin{gathered}\Phi_0^+(t) - \varkappa\overline{\Phi_0^-(t)} = \Pi^+(t) \\ \overline{\Phi_0^+(t)} - \varkappa\Phi_0^-(t) = \Pi^-(t)\end{gathered} \tag{2.18}$$

где $\Pi^+(t)$ и $\Pi^-(t)$ — граничные значения кусочно-голоморфной функции $\Pi(z)$, определяемой следующей формулой:

$$\Pi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{B(t)} - B(t)}{t - z}\, dt \tag{2.19}$$

На основании соотношений (2.15), (2.17) и (2.18) имеем

$$\Phi_0^{'+}(t) - \frac{1+\varkappa}{n\varkappa}\Phi_0^+(t) = -\frac{\varkappa F^+(t) + \Pi^+(t)}{n\varkappa}$$

$$\Phi_0^{'-}(t) + \frac{1+\varkappa}{n\varkappa}\Phi_0^-(t) = \frac{F^-(t) - \Pi^-(t)}{n\varkappa}$$

Решение этой системы дифференциальных уравнений будет

$$\Phi_0^+(t) = e^{\frac{1+\varkappa}{n\varkappa}\int_{t_0}^{t} dt_1}\left[\int_{t_0}^{t} \frac{-\varkappa F^+(t) - \Pi^+(t)}{n\varkappa} e^{-\frac{1+\varkappa}{n\varkappa}\int_{t_0}^{t} dt_1} dt + c_1\right] \tag{2.20}$$

$$\Phi_0^-(t) = e^{-\frac{1+\varkappa}{n\varkappa}\int_{t_0}^{t} dt_1}\left[\int_{t_0}^{t} \frac{F^-(t) - \Pi^-(t)}{n\varkappa} e^{\frac{1+\varkappa}{n\varkappa}\int_{t_0}^{t} dt_1} dt + c_2\right] \tag{2.21}$$

Учитывая, что напряжения должны исчезнуть на бесконечности, имеем

$$\Phi_0^+(t) = \Phi_0^-(t) = 0 \quad \text{при} \quad t = \infty$$

Устремляя t_0 к ∞, находим

$$c_1 = c_2 = 0$$

Функцию $\Phi_0(z)$ найдем из (2.20) и (2.21)

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)}{t - z}\, dt \tag{2.22}$$

Для граничных значений функции $\Phi_0(z)$ окончательно получаем

$$\begin{gathered}\Phi_0^+(t) = c\,\frac{2ib\,\frac{1+\varkappa}{n\varkappa} + \varkappa}{t + ib} - 2ibcm^2 e^{-imt}\int_{\infty}^{t} \frac{e^{imt}}{t + ib}\, dt \\ \Phi_0^-(t) = \frac{c\left(1 - \frac{2bm}{\varkappa}\right)}{t - ib} - \frac{2ibc}{\varkappa(t - ib)^2} - \frac{2ibcm^2}{\varkappa} e^{imt}\int_{\infty}^{t} \frac{e^{-imt}}{t - ib}\, dt\end{gathered} \tag{2.23}$$

где
$$m = \frac{1+\varkappa}{\varkappa}\frac{G}{k}$$

Для касательных напряжений на контакте получаем формулу

$$\tau_{xy} = \frac{2c(1+\varkappa)bm}{i\varkappa(t^2+b^2)}t - \frac{4b^2c(1+\varkappa)}{i\varkappa(t^2+b^2)^2}t +$$

$$+2bcm^2\frac{1+\varkappa}{i\varkappa}\left[\cos mt\left(\int\limits_{\infty}^{t}\frac{t\sin mt}{t^2+b^2}dt - b\int\limits_{\infty}^{t}\frac{\cos mt}{t^2+b^2}dt\right)-\right.$$

$$\left.-\sin mt\left(\int\limits_{\infty}^{t}\frac{t\cos mt}{t^2+b^2}dt + b\int\limits_{\infty}^{t}\frac{\sin mt}{t^2+b^2}dt\right)\right]$$

Значения величины $\dfrac{0.4\tau_{xy}}{mP}$ для некоторых точек границы полуплоскости при различных значениях параметра „b" приведены в табл. 1.

Таблица 1

t \ b	1.0	0.5	0.2	0.1
0.05	−0.0161	−0.0684	−0.4053	−1.1950
0.20	−0.0594	−0.2048	−0.4431	−1.2778
0.50	−0.0996	−0.1606	−0.0694	−0.0166
0.75	−0.0913	−0.0823	−0.0177	−0.0041
1.00	−0.0685	−0.0401	−0.0044	−0.0012
1.25	−0.0489	−0.0196	−0.0002	0.0016
1.50	−0.0330	−0.0094	0.0012	0.0016
2.00	−0.0143	−0.0015	0.0017	0.0013
3.00	−0.0019	0.0014	0.0012	0.0007
4.00	0.0007	0.0014	0.0008	0.0004
6.00	0.0010	0.0008	0.0004	0.0002
8.00	0.0007	0.0003	0.0002	0.0001

Из-за отсутствия достаточно подробных таблиц интегралы были вычислены на ЭВМ „Наири" при помощи известных значений соответствующих интегралов в пределах от 0 до ∞.

Вычисления с абсолютной точностью $0.5\cdot10^{-5}$ проводились при следующих значениях исходных параметров: коэффициент Пуассона $\nu=\dfrac{1}{3}$, $k=Eh_1$, где E — модуль упругости материала полуплоскости, а $h_1=1.5$ ед. длины.

Для определения натяжения в точке $t=0$, на основании (1.12), (1.7), (2.3), (2.5)—(2.8) и (2.22), имеем формулу

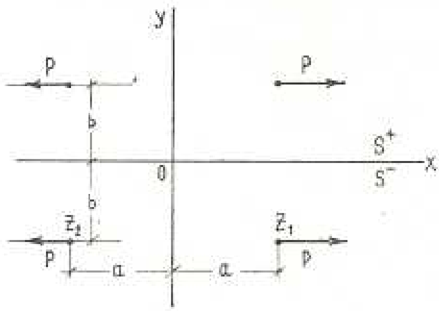
$$T = \frac{2P}{\pi\varkappa}\left[1 + mbe^{mb}\,\mathrm{Ei}(-mb)\right]$$

Значения величины T/P при некоторых значениях параметра „b“ приведены в табл. 2.

Таблица 2

b	1.0	0.5	0.2	0.1
T/P	0.2219	0.2679	0.3149	0.3393

3. Рассмотрим плоское деформированное состояние упругой плоскости с бесконечным упругим прямолинейным включением при действии четырех параллельных оси x сосредоточенных сил, приложенных симметрично относительно включения (фиг. 3).



Фиг. 3.

Здесь также рассматривается только нижняя полуплоскость.

Напряжения и деформации могут быть выражены формулами (2.4) и (2.5), где неизвестные функции в этом случае имеют вид [1]

$$\Phi(z) = -\frac{P}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{1}{z-z_1} + \frac{P}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{1}{z-z_2} + \Phi_0(z)$$

$$\Psi(z) = \frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{1}{z-z_1} - \frac{\bar{z}_1 P}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{1}{(z-z_1)^2} - \tag{3.1}$$

$$-\frac{\varkappa P}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{1}{z-z_2} + \frac{\bar{z}_2 P}{2\pi(1+\varkappa)}\,\frac{1}{(z-z_2)^2} + \Psi_0(z)$$

Продолжая, как и в предыдущем случае, функцию $\Phi_0(z)$ в верхнюю полуплоскость и исключая $\Psi_0(z)$, из формул (2.4), (2.5) и (3.1) получаем

$$\begin{aligned} \sigma_y + i\tau_{xy} &= A_1(z) + \Phi_0(z) - \Phi_0(\bar{z}) + (z-\bar{z})\,\overline{\Phi_0'(z)} \\ 2G(u' + iv') &= B_1(z) + \varkappa\Phi_0(z) + \Phi_0(\bar{z}) - (z-\bar{z})\,\overline{\Phi_0'(z)} \end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$A_1(z) = c_3\left[\frac{1}{z-z_2} - \frac{1}{z-z_1} + \frac{1-\varkappa}{z-\bar{z}_2} - \frac{1-\varkappa}{z-\bar{z}_1} + \right.$$

$$\left. + \frac{z-z_1}{(z-\bar{z}_1)^2} - \frac{z-z_2}{(z-\bar{z}_2)^2}\right]$$

$$B_1(z) = c_3\left[\frac{\varkappa}{z-z_2} - \frac{\varkappa}{z-z_1} + \frac{1-\varkappa}{z-\bar{z}_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{1-\varkappa}{z-\bar{z}_2} - \frac{z-z_1}{(z-\bar{z}_1)^2} + \frac{z-z_2}{(z-\bar{z}_2)^2}\right]$$

$$c_3 = \frac{P}{2\pi(1+\varkappa)}$$

$z_1 = a - ib$, $z_2 = -a - ib$ — точки приложения сосредоточенных сил.

Удовлетворяя условиям (2.13), на основании (3.2) имеем

$$\Phi_0^-(t) - \Phi_0^+(t) - \overline{\Phi_0^-(t)} + \overline{\Phi_0^+(t)} + n\varkappa\Phi_0'^-(t) + n\Phi_0'^+(t) =$$

$$= \overline{A_1(t)} - A_1(t) - nB_1'(t) \tag{3.3}$$

где $n = \dfrac{ik}{G}$.

Поступая аналогично предыдущему случаю, находим

$$\Phi_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)}{t-z}\,dt \tag{3.4}$$

где

$$\Phi_0^+(t) = c_3\frac{2ib(1+\varkappa)+\varkappa^2 n}{n\varkappa}\left(\frac{1}{t-z_1} - \frac{1}{t-z_2}\right) +$$

$$+ 2ic_3 m(\varkappa - bm)e^{-imt}\left(\int_{\infty}^{t}\frac{e^{imt}}{t-z_1}\,dt - \int_{\infty}^{t}\frac{e^{imt}}{t-z_2}\,dt\right)$$

$$\Phi_0^-(t) = c_3\left(1 + \frac{2bm}{\varkappa}\right)\left(\frac{1}{t-\bar{z}_1} - \frac{1}{t-\bar{z}_2}\right) + \tag{3.5}$$

$$+ \frac{2ibc_3}{\varkappa}\left[\frac{1}{(t-\bar{z}_1)^2} - \frac{1}{(t-\bar{z}_2)^2}\right] +$$

$$+ 2ic_3 m\left(1 + \frac{bm}{\varkappa}\right)e^{imt}\left(\int_{\infty}^{t}\frac{e^{-imt}}{t-\bar{z}_1}\,dt - \int_{\infty}^{t}\frac{e^{-imt}}{t-\bar{z}_2}\,dt\right)$$

$$m = \frac{1+\varkappa}{\varkappa}\,\frac{G}{k}$$

Для касательных напряжений на границе полуплоскости получаем формулу

$$\tau_{xy}=2bc_3\left[\frac{2+\varkappa+\dfrac{bm+1}{\varkappa}+bm}{(t+a)^2+b^2}-\frac{2+\varkappa+\dfrac{bm+1}{\varkappa}+bm}{(t-a)^2+b^2}\right]+$$

$$+\frac{4b^3c_3\left(1+\dfrac{1}{\varkappa}\right)}{[(t-a)^2+b^2]^2}-\frac{4b^3c_3\left(1+\dfrac{1}{\varkappa}\right)}{[(t+a)^2+b^2]^2}-$$

$$-\frac{2c_3m(1+\varkappa)}{\varkappa}(\varkappa+bm)\left\{\cos mt\left[\int\limits_{\infty}^{t}\frac{(t-a)\cos mt}{(t-a)^2+b^2}dt+\right.\right.$$

$$\left.+b\int\limits_{\infty}^{t}\frac{\sin mt}{(t-a)^2+b^2}dt-\int\limits_{\infty}^{t}\frac{(t+a)\cos mt}{(t+a)^2+b^2}dt-b\int\limits_{\infty}^{t}\frac{\sin mt}{(t+a)^2+b^2}dt\right]+$$

$$+\sin mt\left[\int\limits_{\infty}^{t}\frac{(t-a)\sin mt}{(t-a)^2+b^2}dt-b\int\limits_{\infty}^{t}\frac{\cos mt}{(t-a)^2+b^2}dt-\right.$$

$$\left.\left.-\int\limits_{\infty}^{t}\frac{(t+a)\sin mt}{(t+a)^2+b^2}dt+b\int\limits_{\infty}^{t}\frac{\cos mt}{(t+a)^2+b^2}dt\right]\right\} \tag{3.6}$$

Значения $\dfrac{0.4\,\tau_{xy}}{mP}$ для некоторых точек границы полуплоскости при $a=1$ ед. длины, вычисленные для тех же значений ν, k, b, что и в п. 2, приведены в табл. 3.

Таблица 3

t \ b	1.0	0.5	0.2	0.1	0.00
0.50	—0.0292	—0.1745	—0.1850	—0.0749	0.0917
0.75	—0.0211	—0.1898	—0.5351	—0.4473	0.1744
1.00	—0.0185	—0.1274	—0.4566	—1.0318	$-\infty$
1.25	—0.0391	—0.2011	—0.5326	—0.4388	0.1886
1.50	—0.0658	—0.2004	—0.1812	—0.0584	0.1210
2.00	—0.0728	—0.0825	0.0128	0.0259	0.0671
3.00	—0.0274	—0.0068	0.0148	0.0227	0.0305
4.00	—0.0071	—0.0033	0.0118	0.0145	0.0171
6.00	0.0011	0.0068	0.0098	0.0111	0.0072
8.00	0.0017	0.0027	0.0033	0.0035	0.0037

Для определения натяжения в точке $t=0$ при $b=0$ получаем формулу

$$T=\frac{4P}{\pi}[\sin ma\,\mathrm{ci}\,(ma)-\cos ma\,\mathrm{si}\,(ma)]$$

Результаты вычислений величины T/P приведены в табл. 4.

Таблица 4

a	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	2.00	3.00	4.00	6.00	8.00
T/P	1.4474	1.3033	1.1893	1.0957	1.0167	0.8896	0.7125	0.5936	0.4435	0.3526

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 1 III 1967

Կ. Ս. ՉՈԲԱՆՅԱՆ, Ա. Ս. ԽԱՉԻԿՅԱՆ

ԲԱՐԱԿԱՊԱՏ ՃԿՈՒՆ ՆԵՐԴՐԱԿՈՎ ԱՌԱՁԳԱԿԱՆ ՄԱՐՄՆԻ ՀԱՐԹ ԴԵՖՈՐՄԱՑՎԱԾ ՎԻՃԱԿԸ

Ա մ փ ո փ ո ւ մ

Հոդվածում դիտարկված են այն պայմանները, որոնց բավարարում են լարումների և դեֆորմացիաների սահմանային արժեքները՝ հարթ դեֆորմացիայի ենթարկված առաձգական մարմնի բարակապատ ճկուն ներդրակի վրա։

Հետազոտված են ուղղագիծ, բարակապատ ներդրակով հարթության առաձգական հավասարակշռության երկու խնդիր՝ ներդրակի նկատմամբ սիմետրիկ կիրառված կենտրոնացված ուժերի ազդեցության տակ։

K. C. CHOBANIAN, A. S. KHACHIKIAN

ON THE PLANE DEFORMATION STATE OF THE ELASTIC BODY WITH A THIN-WALLED FLEXIBLE INCLUSION

S u m m a r y

The conditions for limit values of the stresses and strains on a thin-walled flexible inclusion of the elastic body subjected to plane deformation are considered.

The elastic equilibrium of the infinite plane with a rectilinear thin inclusion under the action of the concentrated forces applied symmetrically to the inclusion are investigated.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. Изд-во АН СССР, М., 1954.
2. *Янке Е.* и *Эмде Ф.* Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, М., 1959.