ՀԱՅԿԱԿԱՆ ՍՍՀ ԳԻՏՈՒԹՅՈՒՆՆԵՐԻ ԱԿԱԴԵՄԻԱՅԻ ՏԵՂԵԿԱԳԻՐ
ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК АРМЯНСКОЙ ССР

Մեխանիկա XX, № 6, 1967 Механика

М. А. АЛЕКСАНДРЯН, А. А. БАБЛОЯН

О НЕКОТОРЫХ ПАРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ ПО ФУНКЦИЯМ ЛЕЖАНДРА

При решении краевых задач математической физики, в случае, когда граничные условия заданы в смешанном виде, часто оказывается целесообразным свести решение задачи к определению неизвестной функции из парных интегральных уравнений.

Парные интегральные уравнения, содержащие функции Бесселя или тригонометрические функции, рассматривались в работах Кинга [1], Басбридж [2], Б. Нобля [3], И. И. Ахиезера [4] и других.

Парные интегральные уравнения, содержащие функции Лежандра с комплексным индексом и с действительным аргументом, рассматривались в работах Гринченко В. Т. и Улитко А. Ф. [5], Баблояна А. А. [6], Руховец А. Н. и Уфлянда Я. С. [7].

В настоящей работе рассматриваются некоторые парные интегральные уравнения по функциям Лежандра с комплексным индексом и с чисто мнимым аргументом. Такие парные интегральные уравнения возникают при решении смешанных задач теории упругости в сплюснутых сфероидальных координатах.

Прежде чем перейти к решению парных интегральных уравнений указанного типа, приведем вспомогательные соотношения, которыми будем неоднократно пользоваться в дальнейшем.

1. Интегральные представления функций Лежандра с комплексным индексом и с чисто мнимым аргументом [8]:

$$P_2(x, \tau) = \frac{\operatorname{cth} \pi\tau}{\pi} \int_x^\infty \frac{q_2(t, \tau)\, dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} = \frac{\operatorname{cth} \pi\tau}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{q_1(t, \tau)\, dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}$$

$$P_1(x, \tau) = \frac{\operatorname{cth} \pi\tau}{\pi} \int_x^\infty \frac{q_1(t, \tau)\, dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} = -\frac{\operatorname{cth} \pi\tau}{\pi} \int_{-\infty}^x \frac{q_2(t, \tau)\, dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \quad (0.1)$$

$$p_\tau(x) = \int_{-\infty}^x \frac{\sin \tau t\, dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} = -\operatorname{th} \frac{\pi\tau}{2} \int_x^\infty \frac{\cos \tau t\, dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}}$$

$$q_\tau(x) = \int_x^\infty \frac{\sin \tau t dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}} = \operatorname{th} \frac{\pi\tau}{2} \int_{-\infty}^x \frac{\cos \tau t dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}}$$

где введены обозначения

$$P_{-{}^1/_2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,x) = P_2(x,\tau) + iP_1(x,\tau)$$

$$q_n(t,\tau) = \cos\tau t\,\mathrm{sh}\frac{\pi\tau}{2} + (-1)^n \sin\tau t\,\mathrm{ch}\frac{\pi\tau}{2} \qquad (n=1,\ 2)$$

$$p_\tau(x) = -\frac{\pi\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi\tau}{2}}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}\left[P_1(x,\tau) + P_2(x,\tau)\right] \tag{0.2}$$

$$q_\tau(x) = \frac{\pi\,\mathrm{sh}\dfrac{\pi\tau}{2}}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}\left[P_2(x,\tau) - P_1(x,\tau)\right]$$

$P_{-{}^1/_2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,x)$ — функция Лежандра.

2. Формула разложения произвольной функции в интеграл по сферическим функциям [9]:

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}\left\{P_2(x,\tau)\int_{-\infty}^\infty f(y)P_2(y,\tau)\,\mathrm{ch}\,y\,dy + \right.$$

$$\left. + P_1(x,\tau)\int_{-\infty}^\infty f(y)P_1(y,\tau)\,\mathrm{ch}\,y\,dy\right\}d\tau \tag{0.3}$$

$$f(x) = 2\int_0^\infty \frac{\tau\,\mathrm{th}\,\pi\tau}{\mathrm{ch}\,\pi\tau}P_n(x,\tau)\,d\tau\int_0^\infty f(y)P_n(y,\tau)\,\mathrm{ch}\,y\,dy \quad (0<x<\infty) \tag{0.4}$$

$$(n=1,\ 2)$$

3. Решения интегральных уравнений Абеля:

$$f(\alpha) = \int_a^\alpha \frac{u(t)\,dt}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha - \mathrm{sh}\,t}} \qquad u(t) = \frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_a^t \frac{f(\alpha)\,\mathrm{ch}\,\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t - \mathrm{sh}\,\alpha}}$$

$$\tag{0.5}$$

$$f(\alpha) = \int_\alpha^b \frac{u(t)\,dt}{\sqrt{\mathrm{sh}\,t - \mathrm{sh}\,\alpha}} \qquad u(t) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dt}\int_t^b \frac{f(\alpha)\,\mathrm{ch}\,\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\mathrm{sh}\,\alpha - \mathrm{sh}\,t}}$$

4. Значения разрывных интегралов

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty q_\tau(x)\sin\tau t\,d\tau = \begin{cases}(\mathrm{sh}\,t - \mathrm{sh}\,x)^{-{}^1/_2} & (t>x)\\ 0 & (t<x)\end{cases}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{cth}\frac{\pi\tau}{2}\,p_\tau(x)\cos\tau t\,d\tau = \begin{cases}-(\mathrm{sh}\,t - \mathrm{sh}\,x)^{-{}^1/_2} & (t>x)\\ 0 & (t<x)\end{cases} \tag{0.6}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty p_\tau(x)\sin\tau t d\tau = \begin{cases}(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^{-1/2} & (t < x)\\ 0 & (t > x)\end{cases} - \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t}} \tag{0.6}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \operatorname{cth}\frac{\pi\tau}{2}\, q_\tau(x)\cos\tau t d\tau = \begin{cases}(\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^{-1/2} & (t < x)\\ 0 & (t > x)\end{cases} + \frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t}}$$

Эти соотношения получаются из (0.1), если рассматривать их как преобразование Фурье и пользоваться соответствующими формулами обращения.

Отметим, наконец, что из (0.1) и (0.2) следует соотношение

$$P_{-1/2+i\tau}(-ix) = \overline{P_{-1/2+i\tau}(ix)} \tag{0.7}$$

откуда заключаем, что мнимая часть $P_1(x, \tau)$ функции Лежандра — функция, нечетная по x, а действительная часть $P_2(x, \tau)$ — функция, четная по x. Это обнаруживается также из интегрального преобразования (0.3).

§ 1. Рассмотрим парные интегральные уравнения

$$\begin{gathered}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}}{\tau}[F_1(\tau)P_1(x, \tau) + F_2(\tau)P_2(x, \tau)]d\tau = g(x) \quad (-\infty < x < a)\\ \int\limits_0^\infty [F_1(\tau)P_1(x, \tau) + F_2(\tau)P_2(x, \tau)]d\tau = h(x) \quad (a < x < \infty)\end{gathered} \tag{1.1}$$

Условия, налагаемые на функции $g(x)$ и $h(x)$, будут выяснены в ходе решения системы (1.1).

Обозначим

$$H(x) = \int\limits_0^\infty [F_1(\tau)P_1(x, \tau) + F_2(\tau)P_2(x, \tau)]d\tau \quad (-\infty < x < a) \tag{1.2}$$

Тогда, если функции $F_n(\tau)$ представим в виде

$$F_n(\tau) = \frac{\tau\operatorname{th}\pi\tau}{\operatorname{ch}\pi\tau}\int\limits_{-\infty}^\infty f(y)P_n(y, \tau)\operatorname{ch} y dy \quad (n = 1, 2) \tag{1.3}$$

то в силу интегрального преобразования (0.3) из второго уравнения (1.1) и (1.2) получим

$$f(y) = \begin{cases}H(y) & (-\infty < y < a)\\ h(y) & (a < y < \infty)\end{cases} \tag{1.4}$$

Преобразуем первое уравнение (1.1). Пользуясь формулами (0.1) интегральных представлений функций $P_n(x, \tau)$ $(n=1, 2)$, первый интеграл системы (1.1) представим в виде

$$\int_0^\infty \frac{\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}}{\tau}\left[F_1(\tau)P_1(x, \tau)+F_2(\tau)P_2(x, \tau)\right]d\tau=$$

$$=-\int_0^\infty \frac{\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}}{\tau}\left\{F_1(\tau)\frac{\operatorname{cth}\pi\tau}{\pi}\int_{-\infty}^x \frac{q_2(t, \tau)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}}-\right.$$

$$\left.-F_2(\tau)\frac{\operatorname{cth}\pi\tau}{\pi}\int_{-\infty}^x \frac{q_1(x, t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}}\right\}d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}}\int_0^\infty \frac{\operatorname{cth}\pi\tau\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}}{\pi\tau}\left[-F_1(\tau)\,q_2(t, \tau)+F_2(\tau)\,q_1(t, \tau)\right]d\tau=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^x \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}}\int_{-\infty}^\infty f(y)\,Q(t, y)\operatorname{ch}y\,dy \tag{1.5}$$

где

$$Q(t, y)=\int_0^\infty \frac{q_1(t, \tau)P_2(y, \tau)-q_2(t, \tau)P_1(y, \tau)}{\operatorname{ch}\pi\tau\operatorname{cth}\frac{\pi\tau}{2}}\,d\tau \tag{1.6}$$

Подставив (1.5) в первое уравнение (1.1) и пользуясь формулой обращения Абеля (0.5), получим

$$\int_{-\infty}^\infty f(y)\,Q(t, y)\operatorname{ch}y\,dy=G(t)\qquad(-\infty<t<a) \tag{1.7}$$

где введено обозначение

$$G(t)=\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^t \frac{g(x)\operatorname{ch}x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}x}} \tag{1.8}$$

Пользуясь (0.1) и формулой обращения для преобразования Фурье, функцию $Q(t, y)$ представим в виде

$$Q(t, y)=\omega(t, y)-\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^y \frac{k(t, z)\,dz}{\sqrt{\operatorname{sh}y-\operatorname{sh}z}} \tag{1.9}$$

где

$$k(t, z) = \frac{t+z}{\operatorname{sh}(t+z)} + \frac{t-z}{\operatorname{sh}(t-z)}, \quad \omega(t, y) = \begin{cases} (\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t)^{-1/2} & (t < y) \\ 0 & (t > y) \end{cases} \tag{1.9'}$$

Учитывая (1.4) и (1.9), интегральное уравнение (1.7) приведем к виду

$$\int_{-\infty}^{t} H(y)\, Q(t, y) \operatorname{ch} y dy + \int_{t}^{a} H(y)\, Q(t, y) \operatorname{ch} y dy +$$

$$+ \int_{a}^{\infty} h(y)\, Q(t, y) \operatorname{ch} y dy = G(t)$$

$$\int_{t}^{a} \frac{H(y) \operatorname{ch} y dy}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{a} H(y) \operatorname{ch} y dy \int_{-\infty}^{y} \frac{k(t, z)\, dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z}} +$$

$$+ \int_{a}^{\infty} h(y) \operatorname{ch} y \left[\frac{1}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{y} \frac{k(t, z)\, dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z}} \right] dy = G(t) \tag{1.10}$$

$$(-\infty < t < a)$$

В соотношение (1.10) вместо функции $H(t)$ введем новую неизвестную функцию

$$F(t) = \int_{t}^{a} \frac{H(y) \operatorname{ch} y dy}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} \tag{1.11}$$

Тогда для определения функции $F(t)$ из (1.10) получим интегральное уравнение Фредгольма второго рода с симметричным ядром (1.9')

$$F(t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{a} k(t, z)\, F(z)\, dz + G_1(t) \quad (-\infty < t < a) \tag{1.12}$$

где $G_1(t)$ определяется формулой

$$G_1(t) = G(t) - \int_{a}^{\infty} \frac{h(y) \operatorname{ch} y dy}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} + \frac{1}{\pi^2} \int_{a}^{\infty} h(y) \operatorname{ch} y\, dy \int_{-\infty}^{y} \frac{k(t, z)\, dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z}} \tag{1.13}$$

После решения интегрального уравнения (1.12) значения интегралов, входящих в систему (1.1), будут вычислены по формулам

$$H(y) = -\frac{1}{\pi \operatorname{ch} y} \frac{d}{dy} \int_{y}^{a} \frac{F(\alpha) \operatorname{ch} \alpha d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} y}} = \frac{F(a)}{\pi (\operatorname{sh} a - \operatorname{sh} y)^{1/2}} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_y^a \frac{F'(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sh}\alpha-\operatorname{sh}y}} \quad (-\infty<y<a) \tag{1.14}$$

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}}{\tau}\left[F_1(\tau)P_1(x,\tau)+F_2(\tau)P_2(x,\tau)\right]d\tau=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{a}\frac{G(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_a^x\frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}t}}\left[\int_t^{\infty}\frac{h(y)\operatorname{ch}y\,dy}{\sqrt{\operatorname{sh}y-\operatorname{sh}t}}-\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{a}F(z)\,k(t,z)\,dz-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{\pi^2}\int_a^{\infty}h(y)\operatorname{ch}y\,dy\int_{-\infty}^{y}\frac{k(t,z)\,dz}{\sqrt{\operatorname{sh}y-\operatorname{sh}z}}\right] \quad (a<x<\infty) \tag{1.15}$$

При получении этих выражений были использованы формулы (1.5), (1.11) и (1.12).

Теперь ясно, что функции $g(x)$ и $h(x)$ должны быть такими, чтобы все интегралы этого параграфа сходились абсолютно, то есть функции $g'(x)$ и $h(x)$ должны быть кусочно-непрерывными и должны удовлетворять условиям, указанным в работе Лебедева Н. Н. и Скальской И. П. [9]. Аналогичным образом парные интегральные уравнения

$$\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}}{\tau}[1-N(\tau)][F_1(\tau)P_1(x,\tau)+F_2(\tau)P_2(x,\tau)]\,d\tau=g(x) \quad (-\infty<x<a)$$

$$\int_0^{\infty}[F_1(\tau)P_1(x,\tau)+F_2(\tau)P_2(x,\tau)]\,d\tau=h(x) \quad (a<x<\infty) \tag{1.16}$$

сводятся к решению интегрального уравнения

$$F(t)=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{a}k^*(t,z)\,F(z)\,dz+G_1^*(t) \tag{1.17}$$

где

$$k^*(t,z)=\frac{t+z}{\operatorname{sh}(t+z)}+\frac{t-z}{\operatorname{sh}(t-z)}+$$

$$+\pi\int_0^{\infty}N(\tau)\left[\cos\tau(t-z)-\frac{\cos\pi t\cos\tau z}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi\tau}{2}}\right]d\tau \tag{1.18}$$

а $G^*(t)$ определяется формулой (1.13), в которой нужно заменить функцию $k(t,z)$ функцией $k^*(t,z)$. Остальные формулы для случая $N(\tau)\neq 0$ сохраняют свою силу при замене $k(t,z)$ на $k^*(t,z)$.

Докажем, что интегральное уравнение (1.12) всегда может быть решено методом последовательных приближений. Действительно, пользуясь значением интеграла

$$\int_0^\infty \frac{xdx}{\operatorname{sh} x} = \frac{\pi^2}{4}$$

при $a < 0$ будем иметь

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{a} |k(t,\ z)|\, dz < \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{0} k(t,\ z)\, dz = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{xdx}{\operatorname{sh} x} = \frac{1}{2}$$

а при $a > 0$ получим

$$\frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{a} |k(t,\ z)|\, dz < \frac{2}{\pi^2}\int_{-\infty}^{0} k(t,\ z)\, dz < 1$$

Если же $a = +\infty$, то интегральное уравнение (1.12) можно решить точно, пользуясь формулой преобразования Фурье.

Отметим, что уравнение (1.12) можно решить точно так же в случае $a = 0$.

Действительно, при $a = 0$ уравнение (1.12) имеет вид

$$F(t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{0} F(z)\left[k(t+z) + k(t-z)\right] dz + G_1(t) \quad (-\infty < t < 0) \quad (1.19)$$

где $k(x)$ — четная функция, т. е. $k(x) = k(-x)$.

Принимая $F(t) = F(-t)$ и $G_1(t) = G_1(-t)$, уравнение (1.19) приводим к виду

$$F(t) = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty} F(z)\, k(t-z)\, dz + G_1(t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

которое, как известно, решается точно.

§ 2. Рассмотрим парные уравнения по функциям

$$\int_0^\infty \tau F(\tau)\, P_n(x,\ \tau)\, d\tau = f(x) \qquad (0 < x < a)$$

$$\int_0^\infty \operatorname{th} \pi\tau \left[1 - N(\tau)\right] F(\tau)\, P_n(x,\ \tau)\, d\tau = g(x) \qquad (a < x < \infty) \qquad (n = 1,\ 2) \quad (2.1)$$

Введем обозначения

$$\varphi(x) = \int_0^\infty \tau F(\tau) P_n(x, \tau)\, d\tau \quad (a < x < \infty)$$

$$\Phi(t) = \int_a^t \frac{\varphi(y) \operatorname{ch} y dy}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} y}} \tag{2.2}$$

Тогда из (2.2) и первого уравнения (2.1) в силу (0.4) будем иметь

$$F(\tau) = \frac{2 \operatorname{th} \pi\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau} \left[\int_0^a f(y) P_n(y, \tau) \operatorname{ch} y dy + \int_a^\infty \varphi(y) P_n(y, \tau) \operatorname{ch} y dy \right] \tag{2.3}$$

Умножая второе уравнение (2.1) на $\operatorname{ch} x (\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t)^{-1/2}$, интегрируя по x от t до ∞ и дифференцируя полученное соотношение по t, получим

$$\int_0^\infty [1 - N(\tau)] F(\tau) q_n(t, \tau)\, d\tau = g_1(t) \quad (a < t < \infty) \quad (n = 1, 2) \tag{2.4}$$

где

$$g_1(t) = -\frac{d}{dt} \int_t^\infty \frac{g(x) \operatorname{ch} x dx}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \tag{2.5}$$

Подставив значение $F(\tau)$ из (2.3) в (2.4), получим

$$\int_0^a f(y) \operatorname{ch} y Q_n(y, t)\, dy + \int_a^\infty \varphi(y) \operatorname{ch} y Q_n(y, t)\, dy = g_1(t) \tag{2.6}$$

$$(a < t < \infty)$$

где

$$Q_n(y, t) = 2 \int_0^\infty \frac{\operatorname{th} \pi\tau}{\operatorname{ch} \pi\tau} [1 - N(\tau)] P_n(y, \tau) q_n(t, \tau)\, d\tau =$$

$$= \begin{cases} (\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} y)^{-1/2} & (t > y) \\ 0 & (t < y) \end{cases} - \int_y^\infty \frac{k_n(t, x)}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} y}}\, dx \tag{2.7}$$

$$k_n(t, x) = \frac{x + t - (-1)^n \pi}{2\pi^2 \operatorname{sh} \frac{x + t}{2}} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty N(\tau) \left| \cos(t - x) - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos(t + x)}{\operatorname{ch} \pi\tau} + (-1)^n \operatorname{th} \pi\tau \sin \tau(t + x) \right| d\tau \quad (n = 1, 2) \tag{2.8}$$

Подставляя (2.7) и (2.8) в соотношение (2.6) и пользуясь обозначением (2.2), для определения функции $\Phi(t)$ получим следующее интегральное уравнение:

$$\Phi(t)=\int_a^\infty k(t,\ x)\,\Phi(x)\,dx+G(t)\qquad (a<t<\infty)\tag{2.9}$$

где ядро интегрального уравнения дано формулой (2.8), а свободный член имеет вид

$$G(t)=g_1(t)-\int_0^a\frac{f(y)\operatorname{ch}y\,dy}{\sqrt{\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}y}}+\int_0^a f(y)\operatorname{ch}y\,dy\int_y^\infty\frac{k(t,\ x)\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}y}}\tag{2.10}$$

После нахождения $\Phi(t)$ из (2.2) получим значение первого интеграла в области $(a<x<\infty)$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi\operatorname{ch}x}\frac{d}{dx}\int_a^x\frac{\Phi(\alpha)\operatorname{ch}\alpha\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}\alpha}}=\frac{\Phi(a)}{\pi\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}a}}+\frac{1}{\pi}\int_a^x\frac{\Phi'(\alpha)\,d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sh}x-\operatorname{sh}\alpha}}$$

и второго интеграла в области $(0<x<a)$

$$\pi\int_0^\infty\operatorname{th}\pi\tau\,[1-N(\tau)]\,F(\tau)\,P_n(x,\ \tau)\,d\tau=\int_0^a\frac{g_1(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}x}}+$$

$$+\int_x^a\left[\int_0^t\frac{f(y)\operatorname{ch}y\,dy}{\sqrt{\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}y}}-\int_0^a f(y)\operatorname{ch}y\,dy\int_y^\infty\frac{k_n(t,\ z)\,dz}{\sqrt{\operatorname{sh}z-\operatorname{sh}y}}-\right.$$

$$\left.-\int_a^\infty\Phi(z)\,k_n(t,\ z)\,dz\right]\frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh}t-\operatorname{sh}x}}\qquad (n=1,\ 2)\tag{2.11}$$

Из (2.8) следует, что если интегральное уравнение при $a=a_0$ можно решить методом последовательных приближений, то его можно решить этим же методом при $a>a_0$.

Нижний предел „a“, при котором уравнение (2.9) разрешимо методом последовательных приближений, зависит от вида функций $N(\tau)$ и в каждом конкретном случае определяется из уравнения

$$\max_{(a<t<\infty)}\int_a^\infty k(t,\ x)\,dx=1$$

При $a=0$ парные уравнения исчезают, то есть остается только выражение вида (0.4), и $F(\tau)$ определяется из (2.1) в замкнутом виде.

§ 3. Теперь рассмотрим парные уравнения

$$\int_0^\infty F(\tau)\,p_\tau(x)\,d\tau = f(x) \qquad (0 < x < a)$$

$$\int_0^\infty \tau \operatorname{cth}\frac{\pi\tau}{2} F(\tau)\,p_\tau(x)\,d\tau = g(x) \qquad (a < x < \infty) \tag{3.1}$$

Пользуясь формулами (0.1), второе уравнение (3.1) представим в виде

$$\int_0^\infty \tau \operatorname{cth}\frac{\pi\tau}{2} F(\tau)\,p_\tau(x)\,d\tau = -\int_x^\infty \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} t - \operatorname{sh} x}}\int_0^\infty \tau F(\tau)\cos\tau t\,d\tau = g(x)$$

откуда в силу (0.5) будем иметь

$$\int_0^\infty F(\tau)\sin\tau t\,d\tau = G(t) \qquad (a < t < \infty) \tag{3.2}$$

где

$$G(t) = \frac{1}{\pi}\int_t^\infty \frac{g(x)\operatorname{ch} x\,dx}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \qquad (a < t < \infty) \tag{3.3}$$

Введем обозначение

$$H(t) = \int_0^\infty F(\tau)\sin\tau t\,d\tau \qquad (0 < t < a) \tag{3.4}$$

тогда из (3.2) и (3.4) для функции $F(\tau)$ получим

$$F(\tau) = \int_0^a H(t)\sin\tau t\,dt + \int_a^\infty G(t)\sin\tau t\,dt \tag{3.5}$$

Подставляя найденное значение $F(\tau)$ из (3.5) в первое уравнение (3.1) и пользуясь интегралом (0.6), для определения неизвестной функции $H(t)$ получим следующее соотношение:

$$\int_0^x \frac{H(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} = \int_0^a \frac{H(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t}} + \int_a^\infty \frac{G(t)\,dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} t}} + \frac{2}{\pi} f(x) \tag{3.6}$$

$$(0 < x < a)$$

Применяя к (3.6) формулу обращения (0.5), для определения функции $H(x)$ получаем интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$H(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^a \frac{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{sh} t}\, H(t)\, dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x}(\operatorname{sh} x+\operatorname{sh} t)}+G_1(x) \qquad (0<x<a) \tag{3.7}$$

где

$$G_1(x)=\frac{1}{\pi}\int_a^\infty \frac{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{sh} t}\, G(t)}{\sqrt{\operatorname{sh} x}(\operatorname{sh} x+\operatorname{sh} t)}dt+\frac{2}{\pi^2}\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(\alpha)\operatorname{ch}\alpha d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh}\alpha}} \tag{3.8}$$

Следуя Титчмаршу [10], уравнение (3.7) приводим к интегральному уравнению типа Винера-Хопфа. Для этого в уравнении (3.7) произведем замену переменных ξ и η

$$\operatorname{sh} x=e^{-\xi}\operatorname{sh} a \qquad \operatorname{sh} t=e^{-\eta}\operatorname{sh} a$$

и введем новую неизвестную функцию

$$H_1(\xi)=H(x)\operatorname{th} x$$

Тогда это уравнение примет вид

$$H_1(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{H_1(\eta)\, d\eta}{\operatorname{ch}\frac{\xi-\eta}{2}}+\varphi(\xi) \qquad (0<\xi<\infty) \tag{3.9}$$

где

$$\varphi(\xi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^0 \frac{G_2(\eta)\, d\eta}{\operatorname{ch}\frac{\xi-\eta}{2}}+\frac{2}{\pi^2}\operatorname{th}\xi\left(\frac{d}{dx}\int_0^x \frac{f(\alpha)\operatorname{ch}\alpha d\alpha}{\sqrt{\operatorname{sh} x-\operatorname{sh}\alpha}}\right)_{x=\operatorname{Arsh}(e^{-\xi}\operatorname{sh} a)} \tag{3.10}$$

$$G_2(\eta)=G(x)\operatorname{th} x \quad \text{при} \quad \operatorname{sh} x=e^{-\eta}\operatorname{sh} a$$

Непосредственно применить метод Винера-Хопфа к уравнению (3.9) невозможно, так как $\int_{-\infty}^{\infty} k(x)\, dx=1$, но пользуясь результатами, полученными в работах И. М. Рапопорта [11] и Ф. Д. Гахова [12], можно получить точное решение уравнения (3.9) в замкнутом виде.

§ 4. В качестве примера рассмотрим задачу о кручении вала, ограниченного однополостным гиперболоидом вращения, когда граничные условия заданы в смешанном виде, т. е. на части поверхности задано перемещение, а на остальной части известно касательное напряжение (фиг. 1).

Как известно [13], эта задача сводится к решению уравнения Митчеля

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2}+\frac{3}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}=0 \tag{4.1}$$

При переходе к сплюснутым сфероидальным координатам

$$r=c\operatorname{ch}\xi\cos\eta \qquad z=c\operatorname{sh}\xi\sin\eta \tag{4.2}$$

уравнение (4.1) примет вид

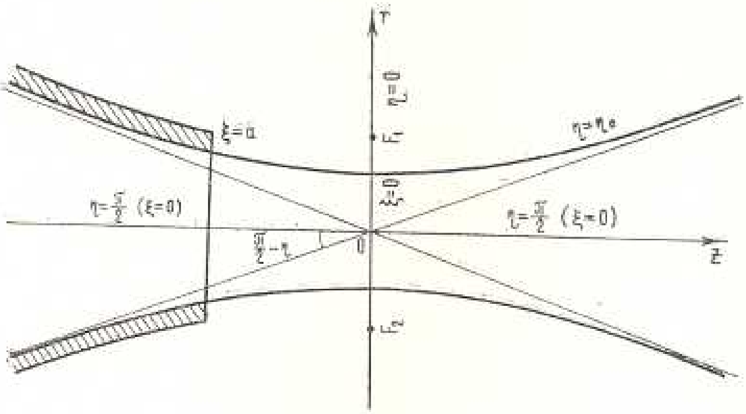
$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial\eta^2}+3\,\mathrm{th}\,\xi\frac{\partial\Psi}{\partial\xi}-3\,\mathrm{tg}\,\eta\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}=0 \tag{4.3}$$

Перемещение и касательные напряжения определяются через функцию перемещения Ψ формулами

$$v=r\Psi(\xi,\ \eta),\qquad \tau_\xi=\frac{Gr}{\sqrt{H}}\frac{\partial\Psi}{\partial\xi},\qquad \tau_\eta=\frac{Gr}{\sqrt{H}}\frac{\partial\Psi}{\partial\eta}$$

где (4.4)

$$H=c^2(\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta)$$



Фиг. 1.

Фундаментальными решениями уравнения (4.3) являются функции

$$\Psi=\frac{1}{\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta}\frac{d^2}{d\xi d\eta}\left\{\begin{array}{l}[AP_n(i\,\mathrm{sh}\,\xi)+BQ_n(i\,\mathrm{sh}\,\xi)][CP_n(\sin\eta)+DQ_n(\sin\eta)]\\ \quad[AP_{-1/2+i\tau}(\sin\eta)+BQ_{-1/2+i\tau}(\sin\eta)]\times\\ \times[CP_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\xi)+DQ_{-1/2+i\tau}(i\,\mathrm{sh}\,\xi)]\end{array}\right. \tag{4.5}$$

Легко проверить, что функции

$$1,\quad \mathrm{sh}\,\xi\sin\eta,\quad \frac{\mathrm{sh}\,\xi}{\mathrm{ch}^2\xi}+\mathrm{arctg}\,(\mathrm{sh}\,\xi),\quad \frac{\sin\eta}{\cos^2\eta}+\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\eta}{2}\right) \tag{4.5'}$$

также являются решениями уравнения (4.3).

Граничные условия для рассматриваемой задачи имеют вид

$$\begin{array}{ll}\tau_\eta(\xi,\ \eta_0)=h_1(\xi) & (a<\xi<\infty)\\ v(\xi,\ \eta_0)=g_1(\xi) & (-\infty<\xi<a)\end{array} \tag{4.6}$$

Учитывая (4.5) и (0.2), функцию перемещения $\Psi(\xi,\ \eta)$ ищем в виде

$$\Psi(\xi,\ \eta)=\int\limits_0^\infty[f_1(\tau)P_1'(\xi,\ \eta)+f_2(\tau)P_2'(\xi,\ \eta)]P'_{-1/2+i\tau}(\sin\eta)\frac{d\tau}{\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta} \tag{4.7}$$

где штрих означает производную по координатам.

Подставляя (4.7) в (4.4), получим

$$\frac{1}{G}\tau_2\sqrt{H} = c\int_0^\infty [f_1(\tau)\,P_1'(\xi,\eta) + f_2(\tau)\,P_2'(\xi,\eta)][P''_{-1/2+i\tau}(\sin\eta) +$$

$$+ \operatorname{tg}\eta P'_{-1/2+i\tau}(\sin\eta)]\,d\tau \tag{4.8}$$

Удовлетворив граничным условиям (4.6), для определения функций $f_n(\tau)$ $(n=1,\ 2)$ получим парные интегральные уравнения

$$\int_0^\infty \operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2}\,\frac{1-N(\tau)}{2}\,[F_1(\tau)P_1'(\xi,\tau) + F_2(\tau)\,P_2'(\xi,\tau)]\,d\tau = g_2(\xi) \quad (-\infty<\xi<a)$$

$$\int_0^\infty [F_1(\tau)\,P_1'(\xi,\tau) + F_2(\tau)\,P_2'(\xi,\tau)]\,d\tau = h_2(\xi) \qquad (a<\xi<\infty) \tag{4.9}$$

где введены обозначения

$$F_n(\tau) = f_n(\tau)\,[P''_{-1/2+i\tau}(\sin\eta_0) + \operatorname{tg}\eta_0 P'_{-1/2+i\tau}(\sin\eta_0)] \quad (n=1,\ 2)$$

$$h_2(\xi) = \frac{1}{G}\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta_0}\,h_1(\xi) \qquad g_2(\xi) = \frac{c_0}{c}\,g_1(\xi) \tag{4.10}$$

$$[1-N(\tau)]\operatorname{th}\frac{\pi\tau}{2} = \frac{\tau P'_{-1/2+i\tau}(\sin\eta_0)\,c_0}{P''_{-1/2+i\tau}(\sin\eta_0) + \operatorname{tg}\eta_0\,P'_{-1/2+i\tau}(\sin\eta_0)}$$

Постоянная c_0 выбирается таким образом, чтобы правая часть последнего равенства (4.10) при возрастании τ стремилась к 1, т. е. при $\tau\to\infty$ $N(\tau)\to 0$.

Пользуясь асимптотическими формулами, для функций Лежандра при больших и при малых значениях индекса [14] получим

$$c_0 = 1 \tag{4.11}$$

$$N(\tau) = \frac{5\operatorname{tg}\eta_0}{2\tau} + \frac{21-80\operatorname{tg}^2\eta_0}{16\tau^2} + \frac{1144\operatorname{tg}^3\eta_0 + 9\operatorname{tg}^2\eta_0 - 724\operatorname{tg}\eta_0 + 9}{128\,\tau^3} + 0\left(\frac{1}{\tau^4}\right)$$

$$\tau\to\infty$$

$$N(\tau) = 1 - \cfrac{2}{2\pi\operatorname{tg}\eta_0 + \cfrac{\pi K\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\eta_0}{2}\right)\right|}{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\eta_0}{2}\right)K'\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\eta_0}{2}\right)\right|}} \qquad \tau\to 0 \tag{4.12}$$

где $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Предварительно рассмотрим парные уравнения (1.16), где производные функций $g(x)$ и $h(x)$ равны соответственно $g_2(x)$ и $h_2(x)$.

При этом функции $h(x)$ и $g(x)$ определены с точностью до постоянных слагаемых $h(a)$ и $g(a)$.

Выясним те условия, при которых решения парных уравнений (1.16) и (4.9) совпадают. Парные уравнения (1.16) сводятся к решению интегрального уравнения (1.17) с ядром (1.18). При этом интегралы, входящие в (1.16), вычисляются по формулам (1.14) и (1.15), где вместо функции $k(t, z)$ нужно подставить выражение (1.18).

Из (1.14) и (1.15) следует, что для совпадения решений этих двух парных уравнений нужно положить

$$F(a) = 0 \tag{4.13}$$

$$G(a) - \int_a^\infty \frac{h(y)\operatorname{ch} y\,dy}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} a}} - \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^a F(z)\,k^*(a, z)\,dz -$$

$$- \frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty h(y)\operatorname{ch} y\,dy \int_{-\infty}^y \frac{k^*(a, z)\,dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} z}} = 0 \tag{4.13'}$$

Из интегрального уравнения (1.17) следует, что условия (4.13) и (4.13′) равносильны, то есть они выполняются одновременно.

Примем $h(a) = 0$, а значение $g(a)$ определим из соотношения (4.13′).

Учитывая вышесказанное, рассматриваемую задачу сводим к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно функции $F'(t)$

$$F'(t) = -\int_{-\infty}^a F'(z)\,k_3(t, z)\,dz + G'(t) \qquad (-\infty < t < a) \tag{4.14}$$

где

$$k_3(t, z) = k_1(t+z) - k_1(t-z) - k_2(t-z)$$

$$k_1(x) = \frac{x}{\pi^2 \operatorname{sh} x} - \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{N(\tau)\cos\tau x}{\operatorname{ch}^2\frac{\pi\tau}{2}}\,d\tau \tag{4.15}$$

$$k_2(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty N(\tau)\cos\tau x\,d\tau \qquad k_n(-x) = k_n(x) \quad (n = 1, 2)$$

$$G'(t) = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^t \frac{g_2(\alpha)\operatorname{ch} t\,d\alpha}{(\operatorname{sh} t - \operatorname{sh}\alpha)^{1/2}} - \int_a^\infty \frac{h_2(\alpha)\operatorname{ch} t\,d\alpha}{(\operatorname{sh}\alpha - \operatorname{sh} t)^{1/2}} -$$

$$- \frac{1}{\pi^2}\int_a^\infty k_3(t, z)\,dz \int_z^\infty \frac{h_2(\alpha)\operatorname{ch} z\,d\alpha}{(\operatorname{sh}\alpha - \operatorname{sh} z)^{1/2}} - \frac{1}{\pi^2}\int_{-\infty}^a k_3(t, z)\,dz \int_a^\infty \frac{h_2(\alpha)\operatorname{ch} z\,d\alpha}{(\operatorname{sh}\alpha - \operatorname{sh} z)^{1/2}} \tag{4.16}$$

Из (1.14) следует, что напряжение в области $(-\infty < \alpha < a)$ определяется формулой

$$H(\xi) = -\frac{G}{\pi \sqrt{\operatorname{ch}^2 \xi - \cos^2 \eta_0}} \frac{d}{d\xi} \int_{\xi}^{a} \frac{F'(\alpha)\, d\alpha}{(\operatorname{sh} \alpha - \operatorname{sh} \xi)^{1/2}}, \quad (-\infty < \xi < a) \quad (4.17)$$

а перемещения в точках на границе однополостного гиперболоида вращения вне штампа определяются формулой

$$Q(x) = \frac{c}{\pi} \frac{d}{dx} \left\{ \int_{-\infty}^{a} \frac{G(t)\, dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} - \int_{a}^{x} \frac{dt}{\sqrt{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} t}} \left[\int_{t}^{\infty} \frac{h(y) \operatorname{ch} y\, dy}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{a} F(z)\, k(t, z)\, dz - \frac{1}{\pi^2} \int_{x}^{\infty} h(y) \operatorname{ch} y\, dy \int_{-\infty}^{y} \frac{k(t, z)\, dz}{\sqrt{\operatorname{sh} y - \operatorname{sh} t}} \right] \right\}$$

$$(a < x < \infty)$$

Вопрос разрешимости уравнения (4.14) методом последовательных приближений исследован в конце первого параграфа.

Институт математики и механики
АН Армянской ССР

Поступила 7 V 1967

Մ. Ա. ԱԼԵՔՍԱՆԴՐՅԱՆ, Ա. Հ. ԲԱԲԼՈՅԱՆ

ԼԵԺԱՆԴՐԻ ՖՈՒՆԿՑԻԱՆԵՐՈՎ ՄԻ ՔԱՆԻ ԶՈՒՅԳ ԻՆՏԵԳՐԱԼ ՀԱՎԱՍԱՐՈՒՄՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Ամփոփում

Մաթեմատիկական ֆիզիկայի հավասարումներ լուծելիս, երբ եզրային պայմանները տրված են խառը ձևով, հաճախ նպատակահարմար է լինում խնդիրը բերել անհայտ ֆունկցիայի գտնելուն՝ զույգ ինտեգրալ հավասարումներից:

Զույգ ինտեգրալ հավասարումները, որոնք պարունակում են Բեսելի ֆունկցիաներ, կամ եռանկյունաչափական ֆունկցիաներ, դիտարկված են [1—4] և այլ աշխատանքներում: Կոմպլեքս ինդեքսով և իրական արգումենտով Լեժանդրի ֆունկցիաներ պարունակող զույգ ինտեգրալ հավասարումները դիտարկվել են վերջերս՝ [5—7] աշխատանքներում:

Ներկա աշխատանքում դիտարկվում են կոմպլեքս ինդեքսով և զուտ կեղծ արգումենտով Լեժանդրի ֆունկցիաներով զույգ ինտեգրալ հավասարումներ, որոնք հանդիպում են սեղմված սֆերոիդալ կոորդինատներով առաձգականության տեսության խառը խնդիրներ լուծելիս:

M. A. ALEXANDRIAN, A. A. BABLOYAN

CONCERNING SOME PAIRS OF INTEGRAL EQUATIONS WITH LEGENDRE FUNCTIONS

S u m m a r y

In solving equations of mathematical physics, when the boundary condition are given in mixed expressions, it is often necessary to reduce the problem to a determination of the unknown function from dual integral equations.

Dual integral equations that involve Bessel's functions or trigonometric functions have been treated in [1—4], et al..

Dual integral equations involving Legendre's functions with complex indexes and real arguments have been treated lately in [5—7], et al..

ЛИТЕРАТУРА

1. *King L. V.* On the Acoustic Radiation Pressure on Circular Disck: Inertia and Diffraction Corrations. Proc. Roy. Soc. London (ser. A), 1935, vol. 153, № 878, p. 1.
2. *Busbridge J. W.* Dual integral equations. Proc. London Math. Soc., 1938, vol. 44, № 115.
3. *Noble B.* Certain dual integral equations. J. Math. and Phys., 1958, vol. 37, № 2, p. 128.
4. *Ахиезер И. И.* К теории спаренных интегральных уравнений. Записки математ. отделения физ.-мат. факультета Харьковского математического общества, т. 25, сер. 4, изд. ХГУ, Харьков, 1957, 5—31.
5. *Гринченко В. Т., Улитко А. Ф.* Об одной смешанной граничной задаче теплопроводности для полупространства. Инж. физ. ж., т. 5, вып. 10, 1963.
6. *Баблоян А. А.* Решение некоторых парных интегральных уравнений. ПММ, т. 28, 1964, 1115—1123.
7. *Руховец А. Н., Уфлянд Я. С.* Об одном классе парных интегральных уравнений и их приложениях в теории упругости. ПММ, т. 30, 1966, 271—277.
8. *Александрян М. А.* Об одном интегральном представлении функций Лежандра с комплексным индексом при чисто мнимых аргументах. Изв. АН АрмССР, серия Механика, т. 19, № 6, 1966, 3—6.
9. *Лебедев Н. Н., Скальская И. П.* Об одном разложении произвольной функции в интеграл по сферическим функциям. ПММ, т. 30, 1966, 252—258.
10. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье. Гостехиздат, М., 1948.
11. *Рапопорт И. М.* Об одном классе сингулярных интегральных уравнений. Докл. АН СССР, т. 59, № 8, 1948. 1403—1406.
12. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. Физматгиз, М., 1963.
13. *Абрамян Б. Л., Арутюнян Н. Х.* Кручение упругих тел. Физматгиз, М., 1963.
14. *Журина М. И.* и *Кармазина Л. Н.* Таблицы функций Лежандра. Изд. АН СССР, М., 1962.