

Р. Н. ОВАКИМЯН

## О НАГРУЗКАХ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ

Оболочки, широко применяемые в качестве несущих конструкций в различных магнитогидродинамических аппаратах, особенно в плазменных и дуговых ракетных двигателях, часто используются и как проводники тока.

В этом случае большие токи, необходимые для эффективной работы МГД-двигателей, непосредственно подводятся к рабочему телу-плазме через оболочку, обладающую хорошей проводимостью. Вследствие выделения джоулева тепла и соответствующего повышения температуры токонесущей оболочки, а также действия пондеромоторных сил, особенно интенсивных при наложении сильных магнитных полей для управления плазмой, напряжения в оболочке могут достигнуть значительной величины. Таким образом, развитие космического двигателестроения требует всестороннего исследования напряженного состояния тонкостенных конструкций, находящихся под действием нагрузок электромагнитного характера.

В настоящей статье сделана попытка в рамках теории упругих оболочек определить выражения нагрузок, действующих в электромагнитном поле на круговую цилиндрическую оболочку.

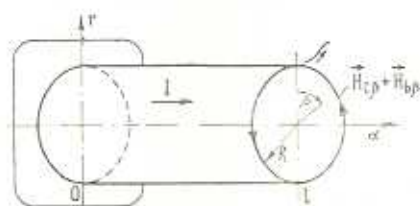
Рассмотрим оболочку в системе  $\alpha, \beta, r$ . Обозначим через  $R$  радиус средней поверхности,  $h$  — толщину,  $R + \frac{h}{2} = a$  — внешний

радиус,  $R - \frac{h}{2} = b$  — внутренний ра-

диус оболочки. Выберем начало координат на левом краю оболочки, а ось  $\alpha$  совместим с осью оболочки (фиг. 1). Предполагаем, что материал оболочки изотропен, магнитные свойства также одинаковы по всем направлениям. Процесс считаем установившимся.

Пусть в направлении  $\alpha$  протекает постоянный электрический ток силы  $\vec{I} = \int_S \vec{j} dS$ , где  $\vec{j}$  — плотность тока, а интеграл берется по

всему поперечному сечению оболочки  $S$ . Определим температуру нагрева и пондеромоторную силу, действующую на токонесущую оболочку.



Фиг. 1.

## 1. Температура нагрева

Количество тепла  $q_{\tau}$ , выделяемое в единице объема проводника при протекании тока плотности  $j$ , по закону Джоуля-Ленца равно

$$q_{\tau} = j^2 \rho \quad (1.1)$$

где  $\rho$  — удельное электрическое сопротивление. Для металлических проводников зависимость  $\rho$  от температуры имеет следующий вид:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha_s (t - t_0)] \quad (1.2)$$

где  $\alpha_s$  — температурный коэффициент удельного сопротивления ( $\alpha_s = \text{const}$ ),  $t$  (°C) — температура нагрева оболочки,  $\rho_0$  — значение удельного сопротивления при начальной температуре  $t_0$ .

В общем виде дифференциальное уравнение теплопроводности при наличии равномерно распределенных источников тепла  $q_{\tau}$  с учетом (1.1) и (1.2) будет следующим:

$$\text{div } \lambda \text{ grad } t + j^2 \rho_0 [1 + \alpha_s (t - t_0)] = 0 \quad (1.3)$$

где  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности.

Для цилиндрической формы металлических проводников в диапазоне температур, при котором еще сохраняются упругие свойства материала оболочки, с погрешностью порядка  $\frac{h}{R} < \frac{1}{20}$ , принятой в теории оболочек [1], можно считать, что

$$\lambda \approx \lambda_0 = \text{const}, \quad S = S_0 [1 + 2\alpha_l (t - t_0)] \approx S_0 = \text{const}, \quad j \approx \frac{I}{S_0} = \text{const} \quad (1.4)$$

где  $\alpha_l$  — температурный коэффициент линейного расширения ( $\alpha_l = \text{const}$ ).

На основании (1.4) в (1.3)  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial z^2} = 0$ . Перепишем уравнение теплопроводности (1.3) в следующем виде:

$$\frac{d^2 t}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dt}{dr} + k^2 \left( t - t_0 + \frac{1}{\alpha_s} \right) = 0 \quad (1.5)$$

где  $k = j \sqrt{\frac{\rho_0 \alpha_s}{\lambda_0}} = \text{const}$ . Общее решение уравнения Бесселя (1.5) при  $b < r < a$  будет

$$t = t_0 - \frac{1}{\alpha_s} + C_1 J_0(kr) + C_2 Y_0(kr) \quad (1.6)$$

где  $J_n(z)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка 1-го рода,  $Y_n(z)$  — функция Вебера  $n$ -го порядка,  $C_1$  и  $C_2$  — постоянные, определяемые из граничных условий.

\* Индекс „0“ снизу соответствует параметрам оболочки при  $t_0$ .

Имеем следующие граничные условия:

1) на внешней поверхности оболочки ( $r = a$ ) происходит теплообмен с окружающей средой по закону Ньютона-Рихмана

$$-\lambda_0 \frac{dt}{dr} \Big|_{r=a} = h_t(t - t_{\infty}) \Big|_{r=a}$$

где постоянная  $h_t$  — коэффициент теплообмена, вычисляемый отдельно для каждого конкретного случая, например, по методу [2], а  $t_{\infty}$  — температура окружающей среды. Не уменьшая общности, примем  $t_{\infty} = t_0$ ;

2) на внутренней поверхности оболочки ( $r = b$ ) примем, что теплообмен отсутствует и

$$\frac{dt}{dr} \Big|_{r=b} = 0$$

Определив при этих граничных условиях  $C_1$  и  $C_2$  и подставив их значения в (1.6), получим для температуры срединной поверхности ( $r = R$ ) следующее выражение:

$$t = t_0 + \left\{ \frac{J_1(kb) Y_0(kR) - Y_1(kb) J_0(kR)}{[J_1(kb) Y_0(ka) - Y_1(kb) J_0(ka)] - \frac{k^2 \rho_0}{h_t} [J_1(kb) Y_1(ka) - Y_1(kb) J_1(ka)]} - 1 \right\} \frac{1}{\alpha_3} = \text{const} \quad (1.7)$$

В большинстве практических случаев  $ka < 1$ , что дает возможность ограничиться только первыми двумя членами рядов, представляющих функции Бесселя и Вебера при  $n = 0$  и 1. Тогда, не приводя здесь громоздких вычислений, формулу (1.7) можно представить в следующем виде:

$$t = t_0 + \frac{I^2 \rho_0}{4\pi^2 R^2 h h_t - I^2 \rho_0 \alpha_3} = \text{const} \quad (1.8)$$

Заметим, что коэффициент теплопроводности  $\lambda_0$  явно не входит в (1.8), но при оценке порядка величины  $k$  значение  $\lambda_0$  принималось во внимание.

## 2. Пондеромоторная сила

Элементарный объем проводника, по которому протекает ток плотности  $\vec{j}$ , испытывает в магнитном поле  $\vec{H}$  пондеромоторную силу  $\vec{f}$ , равную

$$\vec{f} = [\vec{j}, \vec{B}] \quad (2.1)$$

где  $\vec{B}$  — магнитная индукция. В статье применяется система единиц

СИ, так что  $\vec{B} = \mu \mu_0 \vec{H}$ , где  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left| \frac{\text{гН}}{\text{л}} \right|$  — магнитная проницаемость вакуума,  $\mu$  — относительная магнитная проницаемость. Для проводников  $\mu \approx 1$  (ферромагнитные материалы не рассматриваются).

В общем случае  $\vec{H}$  есть напряженность магнитного поля, создаваемого как посторонними источниками, так и самим током, на который эта сила действует, т. е.  $\vec{H} = \vec{H}_n + \vec{H}_c$ . Собственное магнитное поле  $\vec{H}_c$  можно определить по уравнениям Максвелла

$$\text{div } \vec{B}_c = 0, \quad \text{rot } \vec{H}_c = \vec{j} \quad (2.2)$$

Решив (2.2) с учетом (1.4), получим для срединной поверхности следующие значения проекций  $\vec{H}_c$  на оси координат  $\alpha, \beta, r$ :

$$H_{c\alpha} = H_{cr} = 0, \quad H_{c\beta} \approx -j \frac{h}{2} \approx -\frac{I}{4\pi R} = \text{const} \quad (2.3)$$

Полное значение напряженности магнитного поля  $\vec{H}$  будет

$$\vec{H} = H_{\alpha\alpha} \vec{e}_\alpha + (H_{\beta\beta} + H_{c\beta}) \vec{e}_\beta + H_{rr} \vec{e}_r \quad (2.4)$$

где  $\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta, \vec{e}_r$  — единичные орты-векторы.

Подставив (2.4) в (2.1) с учетом (2.3) и приняв  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , получим следующее выражение для  $\vec{j}$ :

$$\vec{j} = -\mu_0 \frac{I}{2\pi R h} \left[ H_{rr} \vec{e}_r - \left( H_{\beta\beta} - \frac{I}{4\pi R} \right) \vec{e}_\beta \right] \quad (2.5)$$

Заметим, что составляющая ponderomotorной силы в направлении тока всегда равна нулю.

### 3. Расчет напряженного состояния

В качестве примера рассмотрим часть конструкции магнитной коаксиальной ударной трубки (МКУТ), используемой в качестве ракетного двигателя [3]. Для создания сильного магнитного поля в азимутальном направлении в ударную трубку вставляется центральный проводник. Внешнее магнитное поле  $\vec{H}_{\beta\beta}$  совпадает с направлением собственного магнитного поля  $\vec{H}_c$ .

Один торец ( $z = 0$ ) закреплен полностью, а другой ( $z = l$ ) совершенно свободен (фиг. 1). Собственный вес оболочки не учитываем.

Вследствие симметричности внешней нагрузки относительно оси  $x$  в уравнениях теории оболочек [4]  $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ . В этом случае сразу можно считать, что кручение и сдвиг отсутствуют:

$$\omega = \tau = 0, \quad v = 0, \quad H_{12} = H_{21} = 0, \quad S_{12} = S_{21} = 0 \quad (3.1)$$

В силу (3.1) с учетом (2.5) и (1.8) получаются следующие соотношения:

уравнения равновесия

$$T_1 = \text{const}, \quad \frac{T_2}{R} - \frac{dN_1}{dx} = f, h, \quad N_2 = 0, \quad \frac{dM_1}{dx} = N_1 \quad (3.2)$$

геометрические соотношения

$$\varepsilon_1 = \frac{du}{dx}, \quad \varepsilon_2 = \frac{w}{R}, \quad \chi_1 = -\frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \chi_2 = 0 \quad (3.3)$$

физические соотношения

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_2) - \frac{Eh}{1-\nu} \alpha_T (t - t_0) \\ T_2 &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu\varepsilon_1) - \frac{Eh}{1-\nu} \alpha_T (t - t_0) \\ M_1 &= D(\chi_1 + \nu\chi_2), \quad M_2 = D(\chi_2 + \nu\chi_1) \end{aligned} \quad (3.4)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$$

Примем, что коэффициент Пуассона  $\nu = \text{const}$ , а модуль упругости  $E$  зависит от температуры следующим образом [5]:

$$E = E_0 [1 - \alpha_E (t - t_0)] \quad (3.5)$$

где  $\alpha_E$  — температурный коэффициент упругости ( $\alpha_E = \text{const}$ ).

Имеем следующие граничные условия:

$$\text{при } x = 0 \quad u = w = 0, \quad \varphi = \frac{dw}{dx} = 0 \quad (3.6)$$

$$\text{при } x = l \quad T_1 = N_1 = M_1 = 0 \quad (3.7)$$

Из первого уравнения (3.2) в силу (3.7)  $T_1 = 0$  по всей длине оболочки.

Сведем систему уравнений (3.2)–(3.4) к одному обыкновенному дифференциальному уравнению 4-го порядка с постоянными коэффициентами

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{R^2} w = \frac{Eh}{R} \alpha_T (t - t_0) + f, h$$

Общее решение этого уравнения будет

$$w = e^{mz} (D_1 \cos mz + D_2 \sin mz) + e^{-mz} (D_3 \cos mz + D_4 \sin mz) + R z_t (t - t_0) + \frac{f_r R^2}{E} \quad (3.8)$$

где  $m = \frac{1}{\sqrt{Rh}} \sqrt[4]{3(1-\nu^2)}$ , а  $D_1, D_2, D_3, D_4$  — постоянные, определяемые из граничных условий.

Будем считать, что длина оболочки  $l$  такова ( $l > R$ ), что можно пренебречь членом  $e^{mz} (D_1 \cos mz + D_2 \sin mz)$  при  $z > 0$  [1] в уравнении (3.8) и

$$w = e^{-mz} (D_3 \cos mz + D_4 \sin mz) + R z_t (t - t_0) + \frac{f_r R^2}{E}$$

Заметим, что слагаемое, пропорциональное  $e^{-mz} (D_3 \cos mz + D_4 \sin mz)$ , с незначительной погрешностью следует принять равным нулю при  $z = l$  для удовлетворения граничных условий (3.7).

Из граничных условий (3.6) находим, что  $D_3 = D_4 = -R \left[ z_t (t - t_0) + \frac{f_r R}{E} \right]$ , и величина прогиба  $w$  будет выражаться следующим образом:

$$w = R \left[ z_t (t - t_0) + \frac{f_r R}{E} \right] \left[ 1 - \sqrt{2} e^{-mz} \cos \left( mz - \frac{\pi}{4} \right) \right] \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.2)–(3.4) с учетом (3.6), (3.7), получим остальные величины напряженного и деформированного состояния оболочки. В частности,

$$u = \left[ z_t (t - t_0) + \frac{f_r R}{E} \right] z + \frac{\nu}{m} \left[ z_t (t - t_0) + \frac{f_r R}{E} \right] (1 - e^{-mz} \cos mz) \quad (3.10)$$

$$T_z = Eh \left[ z_t (t - t_0) + \frac{f_r R}{E} \right] \left[ 1 - \sqrt{2} e^{-mz} \cos \left( mz - \frac{\pi}{4} \right) \right] - Eh z_t (t - t_0) \quad (3.11)$$

$$M_1 = \frac{Eh^2}{\sqrt{6(1-\nu^2)}} \left[ z_t (t - t_0) + \frac{f_r R}{E} \right] e^{-mz} \sin \left( mz - \frac{\pi}{4} \right), \quad M_2 = \nu M_1 \quad (3.12)$$

Влияние силы тока  $I$  на  $w$  и  $T_z$  графически показано соответственно на фиг. 2, 3 при различных значениях напряженности внешнего магнитного поля  $H_{в3}$ .

Например, медный цилиндр  $R = 0.21$  [м],  $\frac{h}{R} = \frac{1}{30}$ ,  $l = 0.63$  [м] как часть конструкции действующей ударной трубки [3] с характе-



Կտուցված են դրաֆիկներ թաղանթի հատվածային մեծությունների համար՝ կախված էլեկտրական հոսանքի ուժից, տարրեր մազնիսական դաշտերի դեպքում:

R. N. OVAKIMIAN

## LOADS ON THE CYLINDRICAL SHELL IN THE ELECTROMAGNETIC FIELD

### S u m m a r y

In the present paper the problem of determination of loads (heating and pondermotor force) on the cylindrical shell placed in the electromagnetic field is considered.

### Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Гольденвейзер А. А. Теория упругих тонких оболочек. Гостехиздат, М., 1953.
2. Шорин С. Н. Теплопередача. Госиздат, М.—А., 1952.
3. Ионные, плазменные и дуговые ракетные двигатели. Госатомиздат, М., 1961.
4. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. Физматгиз, М., 1961.
5. Кэй Дж., Лэби Т. Таблицы физических и химических постоянных. Физматгиз, М., 1962.