

В. Н. МОСКАЛЕНКО

## СТОХАСТИЧЕСКИЕ ТЕРМОУПРУГИЕ КРАЕВЫЕ ЭФФЕКТЫ В ПЛАСТИНАХ

Дается решение задачи об определении случайного поля температур и термоупругих напряжений в пластине, омываемой неизотермическими турбулентными потоками. В предположении, что поле температур в каждом потоке является стационарной случайной функцией времени и однородной случайной функцией пространственных координат, выводятся формулы для дисперсий термоупругих напряжений усилий и моментов вблизи заземленного края пластины и на удалении от него. Изучается влияние температурных краевых условий на стохастические термоупругие краевые эффекты.

1. Пусть упругая теплопроводящая пластина толщины  $h$  находится в тепловом контакте с двумя средами — верхней ( $z > h/2$ ) с температурой  $T_+$ , и нижней ( $z < -h/2$ ) с температурой  $T_-$ . Пусть при этом теплообмен пластины со средами происходит по закону Ньютона с коэффициентами теплообмена  $k_+$ ,  $k_-$  для верхней и для нижней поверхностей пластины соответственно.

В рамках гипотезы Кирхгофа-Лява и предположения о линейном законе распределения температуры по толщине пластины нестационарное поле температур и деформированное состояние пластины описываются следующими уравнениями [1, 2]

$$L\Gamma = \frac{2\varepsilon}{h^2} \Theta \quad (1.1)$$

$$P_{\beta, \gamma} u_{\gamma} - \varepsilon(1 + \nu) \frac{\partial T_1}{\partial x_{\beta}} = 0 \quad (1.2)$$

$$\Delta \Delta w + \frac{2\alpha}{h} (1 + \nu) \Delta T_2 = 0 \quad (\beta, \gamma = 1, 2)$$

Здесь  $L$  — линейный дифференциальный оператор с компонентами

$$L_{11} = \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta + \frac{2\varepsilon}{h^2}, \quad L_{12} = L_{21} = \frac{2\eta}{h^2}$$

$$L_{22} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{\chi} \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) + \frac{2(\varepsilon + 2)}{h^2}$$

Кроме того,  $\Delta$  — оператор Лапласа на срединной плоскости пластины,  $\varepsilon = \frac{1}{2}(\beta_+ + \beta_-)$ ,  $\eta = \frac{1}{2}(\beta_+ - \beta_-)$  — вспомогательные теплофизи-

ческие параметры,  $\beta_{\pm} = k_{\pm} h / \lambda$  — коэффициенты Био для поверхностей пластины,  $\gamma$  — коэффициент температуропроводности,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности материала пластины. Входная вектор-функция  $\Theta$  определяется формулами

$$\Theta = e_1 \Theta_1 + e_2 \Theta_2, \quad \Theta_{1,2} = \frac{\beta_+ T_+ \pm \beta_- T_-}{\beta_+ + \beta_-}$$

$T_1, T_2$  — средняя температура и средний градиент по толщине пластины,  $\alpha$  — коэффициент линейного температурного расширения,  $\nu$  — коэффициент Пуассона,  $u_1, u_2$  — компоненты тангенциального смещения срединной плоскости пластины,  $w$  — прогиб,  $P_{ij}$  — линейные дифференциальные операторы

$$P_{11} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}, \quad P_{12} = P_{21} = \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}$$

$$P_{22} = \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

Введем „эквивалентное“ напряжение по формуле

$$\sigma^e = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2 \quad (1.3)$$

В дальнейшем понадобится выражение для „эквивалентных“ усилий и „эквивалентных“ моментов

$$N^2 = N_{11}^2 + N_{22}^2 - N_{11} N_{22} + 3N_{12}^2, \quad M^2 = M_{11}^2 + M_{22}^2 - M_{11} M_{22} + 3M_{12}^2 \quad (1.4)$$

2. Пусть температуры  $T_+, T_-$  турбулентных потоков являются стационарными случайными функциями времени  $t$  и однородными случайными функциями пространственных координат  $x_1, x_2$ . Тогда вектор-функцию  $\Theta$  можно представить в виде интегрального канонического разложения [4]

$$\Theta = \langle \Theta \rangle + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [a' \varphi'(k_1, k_2, \omega) + a'' \varphi''(k_1, k_2, \omega)] e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega$$

В дальнейшем можно ограничиться представлением вида [5]

$$\Theta = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a \varphi(k_1, k_2, \omega) e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} dk_1 dk_2 d\omega \quad (2.1)$$

Случайная функция  $a(k_1, k_2, \omega)$  имеет корреляционную функцию

$$\langle a(k_1, k_2, \omega) a^*(k'_1, k'_2, \omega') \rangle =$$

$$= \Phi(k_1, k_2, \omega) \delta(k_1 - k'_1) \delta(k_2 - k'_2) \delta(\omega - \omega')$$

Здесь звездочка означает переход к комплексно-сопряженной величине,  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака.

Для вектор-функции  $T$  справедливо интегральное каноническое разложение

$$T = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a \psi(k_1, k_2, \omega; x_1, x_2) e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega$$

Детерминированная вектор-функция  $\psi$  должна удовлетворять уравнению

$$e^{-i\omega t} L(\psi e^{i\omega t}) = \frac{2\varepsilon}{h^2} \varphi e^{i(k_1 x_1 + k_2 x_2 + \omega t)} \quad (2.2)$$

и заданным краевым условиям.

В случае полубесконечной пластины ( $x_1 \geq 0$ ) решение уравнения (2.2), удовлетворяющее условию ограниченности, имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= [(f_1 \varphi_1 - f \varphi_2) e^{i k_1 x_1} + C_1 e^{-p_1 x_1} + \gamma_2 C_2 e^{-p_2 x_1}] e^{i k_2 x_2} \\ \psi_2 &= [(f_2 \varphi_2 - f \varphi_1) e^{i k_1 x_1} + \gamma_1 C_1 e^{-p_1 x_1} + C_2 e^{-p_2 x_1}] e^{i k_2 x_2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Здесь для сокращения приняты следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{K_2}{G}, \quad f_2 = \frac{K_1}{G}, \quad f = \frac{\gamma_1}{G\varepsilon}, \quad G = K_1 K_2 - \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon^2} \\ p_{1,2} &= \frac{\varepsilon^{1/4}}{h} \left\{ K_1 + 3K_2 - \frac{k_1^2 h^2}{\varepsilon} \mp 2 \left[ \left(1 + \frac{3}{\varepsilon}\right)^2 + 3 \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon^2} \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \\ \gamma_1 &= \gamma \left[ \frac{1}{6} h^2 (k_1^2 + p_1^2) - \varepsilon K_1 \right]^{-1}, \quad \gamma_2 = \gamma \left[ \frac{1}{2} h^2 (k_1^2 + p_2^2) - \varepsilon K_1 \right]^{-1} \\ K_1 &= 1 + \frac{h^2}{2\varepsilon} \left( k_1^2 + k_2^2 + \frac{i\omega}{\lambda} \right), \quad K_2 = 1 + \frac{2}{\varepsilon} + \frac{h^2}{6\varepsilon} \left( k_1^2 + k_2^2 + \frac{i\omega}{\lambda} \right) \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования  $C_1, C_2$  определяются из граничных условий при  $x_1 = 0$ .

Интегральные канонические разложения для компонент смещения  $u_1, u_2, u_3 = w$  будут

$$u_j = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a v_j(k_1, k_2, \omega; x_1, x_2) e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega \quad (j = 1, 2, 3) \quad (2.4)$$

Функция  $v_j$  должна удовлетворять заданным граничным условиям и уравнениям вида (1.2), в которых вместо  $T_1, T_2$  следует подставить  $\psi_1, \psi_2$  соответственно.

Канонические разложения для напряжений, усилий и моментов имеют вид

$$\begin{aligned} \sigma_{31} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a \left( \frac{1}{h} n_{31} - \frac{12z}{h^3} m_{31} \right) e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega \\ N_{31} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} a n_{31}(k_1, k_2, \omega; x_1, x_2) e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$M_{\beta_1} = \int \int \int \overline{am_{\beta_1}(k_1, k_2, \omega; x_1, x_2) e^{i\omega t} dk_1 dk_2 d\omega} \quad (2.5)$$

Для полубесконечной пластины ( $x_1 \geq 0$ ) функции  $v_i$ , удовлетворяющие условиям ограниченности на бесконечности ( $x_1 \rightarrow \infty$ ,  $x_2 \rightarrow \pm \infty$ ), определяются формулами

$$\begin{aligned} v_1 &= v_{10} + q(B_1 + B_2 q x_1) e^{-qx_1 + ik_2 x_2} \\ v_2 &= v_{20} - ik_2 \left[ B_1 - \left( \frac{3-\nu}{1+\nu} - q x_1 \right) B_2 \right] e^{-qx_1 + ik_2 x_2} \\ v_3 &\equiv W = W_0 + (B_3 + B_4 x_1) e^{-qx_1 + ik_2 x_2} \end{aligned}$$

Здесь  $v_{j0}$ ,  $W_0$  — частное решение,  $q = |k_2|$  — корень характеристического уравнения,  $B_{1-4}$  — постоянные интегрирования.

3. Пусть полубесконечная пластина ( $x_1 \geq 0$ ) с изотермическим заземленным краем  $x_1 = 0$  омывается турбулентными потоками. Соответствующие граничные условия для температур  $T_1$ ,  $T_2$  будут

$$T_1 = T_2 = 0 \quad (x_1 = 0) \quad (3.1)$$

Граничные условия для компонент вектора смещений имеют вид

$$u_1 = u_2 = w = \frac{\partial w}{\partial x_1} = 0 \quad (x_1 = 0)$$

Функции  $\psi_i$  ( $i = 1, 2$ ) должны удовлетворять условиям вида (3.1). Используя формулы (2.3), находим выражения для постоянных интегрирования  $C_1$ ,  $C_2$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{b} [-\bar{\tau}_1 (f_1 + x_1 f) + \bar{\tau}_2 (f + x_2 f_2)] \\ C_2 &= \frac{1}{b} [-\bar{\tau}_2 (f_2 + x_2 f) + \bar{\tau}_1 (f + x_1 f_1)] \\ (b &= 1 - x_1 x_2) \end{aligned}$$

Аналогичным образом находим выражение для канонических функций  $v_i$

$$\begin{aligned} v_1 &= [(f_1 \bar{\tau}_1 - f \bar{\tau}_2) v_1^{(0)} + C_1 v_1^{(1)} + x_2 C_2 v_1^{(2)}] e^{ik_2 x_2} \\ v_2 &= [(f_1 \bar{\tau}_1 - f \bar{\tau}_2) v_2^{(0)} + C_1 v_2^{(1)} + x_2 C_2 v_2^{(2)}] e^{ik_2 x_2} \\ W &= [(f_2 \bar{\tau}_2 - f \bar{\tau}_1) W^{(0)} + x_1 C_1 W^{(1)} + C_2 W^{(2)}] e^{ik_2 x_2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь для сокращения приняты следующие обозначения:

$$v_i^{(r)} = \frac{\alpha(1+\nu)}{k_2^2 - p_r^2} \left[ p_r (e^{-p_r x_1} - e^{-q x_1}) + \frac{1+\nu}{3-\nu} (q - p_r) q x_1 e^{-q x_1} \right]$$

$$v_2^{(r)} = -ik_2 \frac{\alpha(1+\nu)}{k_2^2 - p_r^2} \left[ e^{-p_r x_1} - e^{-q x_1} + \frac{1+\nu}{3-\nu} (q-p_r) x_1 e^{-q x_1} \right]$$

$$W^{(r)} = \frac{2\alpha(1+\nu)}{h(k_2^2 - p_r^2)} \left[ e^{-p_r x_1} - e^{-q x_1} + (p_r - q) x_1 e^{-q x_1} \right]$$

$$(p_0 = -ik_1, \quad r = 0, 1, 2)$$

Подставляя выражения (2.4) и (2.5) в формулы (1.4), получаем с учетом (3.2) выражения для канонических функций

$$n_{\beta_1} = -[(f_1 \bar{\varphi}_1 - f \bar{\varphi}_2) n_{\beta_1}^{(0)} + C_1 n_{\beta_1}^{(1)} + \alpha_2 C_2 n_{\beta_1}^{(2)}] e^{ik_2 x_2}$$

$$m_{\beta_1} = [(f_2 \bar{\varphi}_2 - f \bar{\varphi}_1) m_{\beta_1}^{(0)} + \alpha_1 C_1 m_{\beta_1}^{(1)} + C_2 m_{\beta_1}^{(2)}] e^{ik_2 x_2}$$

Здесь обозначено

$$n_{11}^{(r)} = \frac{\alpha E h}{k_2^2 - p_r^2} \left\{ k_2^2 \left[ e^{-(p_r - q)x_1} - \frac{1-\nu}{3-\nu} + \frac{1+\nu}{3-\nu} (q-p_r) x_1 \right] - \frac{2p_r q}{3-\nu} \right\} e^{-q x_1}$$

$$n_{22}^{(r)} = \frac{\alpha E h}{k_2^2 - p_r^2} \left\{ -p_r^2 e^{-(p_r - q)x_1} + \right.$$

$$\left. + q p_r + q(q-p_r) \left( \frac{3+\nu}{3-\nu} - \frac{1+\nu}{3-\nu} q x_1 \right) \right\} e^{-q x_1}$$

$$n_{12}^{(r)} = ik_2 \frac{\alpha E h}{k_2^2 - p_r^2} \left\{ -p_r e^{-(p_r - q)x_1} + \right.$$

$$\left. + \left( \frac{2}{3-\nu} q + \frac{1-\nu}{3-\nu} p_r \right) - \frac{1+\nu}{3-\nu} (q-p_r) q x_1 \right\} e^{-q x_1}$$

$$(r = 0, 1, 2)$$

Кроме того,

$$m_{11}^{(r)} = \frac{\alpha E h^2}{6(k_2^2 - p_r^2)} \left[ k_2^2 \left\{ e^{-(p_r - q)x_1} - \right. \right.$$

$$\left. - 1 - (q-p_r) x_1 \right\} + \frac{2q}{1-\nu} (q-p_r) \left. \right\} e^{-q x_1}$$

$$m_{22}^{(r)} = \frac{\alpha E h^2}{6(k_2^2 - p_r^2)} \left\{ -p_r^2 e^{-(p_r - q)x_1} + \right.$$

$$\left. + k_2^2 + (q-p_r) k_2^2 x_1 + \frac{2\nu q}{1-\nu} (q-p_r) \right\} e^{-q x_1}$$

$$m_{12}^{(r)} = ik_2 \frac{\alpha E h^2}{6(k_2^2 - p_r^2)} \left\{ -p_r e^{-(p_r - q)x_1} + p_r + (q-p_r) q x_1 \right\} e^{-q x_1}$$

$$(r = 0, 1, 2)$$

Представляет практический интерес сопоставить статистические характеристики напряжений, возникающих вблизи изотермического заземленного края и на удалении от него. Вычислим отношение дисперсий. Для упрощения выкладок введем дополнительные предположения. Примем, что температура нижнего потока постоянна ( $T_- \equiv 0$ ), а коэффициенты равны ( $\beta_+ = \beta_- = \varepsilon$ ,  $\gamma = 0$ ). Тогда  $\theta_1 = \theta_2 = \frac{1}{2} T_+$ , и отождествляя  $\Phi$  с  $\Phi_{T_+}$ , находим  $\varphi_1 = \varphi_2 = 1/2$ .

Случай, когда дисперсия нижнего потока отлична от нуля, анализируется в конце параграфа. Равенство коэффициентов Био может соответствовать, например, обтеканию пластины одинаковыми жидкостями.

Дисперсия „эквивалентного“ момента, определяемого формулой (1.4), при  $x_1 = 0$  будет

$$s_{M}^2(0) = \frac{\alpha^2 E^2 h^4 (1 - \nu + \nu^2)}{36 (1 - \nu)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2^2 |p_2 + ik_1|^2}{(k_1^2 + k_2^2) |p_2 + q|^2 |K_2|^2} \Phi dk_1 dk_2 d\omega \quad (3.3)$$

Выражение для дисперсии „эквивалентного“ момента, вычисленного в точке, достаточно удаленной от заделки, имеет вид

$$s_{M}^2(\infty) = \frac{\alpha^2 E^2 h^4}{144} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(k_1, k_2, \omega)}{|K_2|^2} dk_1 dk_2 d\omega \quad (3.4)$$

Аналогичным образом находим для эквивалентного тангенциального усилия

$$s_{N}^2(0) = \frac{\alpha^2 E^2 h^2 (4 - \nu + \nu^2)}{(3 - \nu)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{k_2^2 |p_1 + ik_1|^2}{(k_1^2 + k_2^2) |p_1 + q|^2 |K_1|^2} \Phi dk_1 dk_2 d\omega \quad (3.5)$$

$$s_{N}^2(\infty) = \frac{\alpha^2 E^2 h^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(k_1, k_2, \omega)}{|K_1|^2} dk_1 dk_2 d\omega$$

Дисперсии эквивалентного напряжения  $\sigma$  при  $z = h/2$  определяются формулами

$$s_{\sigma}^2(0) = \alpha^2 E^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} \frac{|p_1 + ik_1|^2}{|p_1 + q|^2} \frac{1}{|K_1|^2} + \right. \\ \left. + \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \frac{|p_2 + ik_1|^2}{|p_2 + q|^2} \frac{1}{|K_2|^2} + \right. \\ \left. + 2 \frac{1 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)(1 - \nu)} \operatorname{Re} \left[ \frac{(p_1 + ik_1)(p_2^* - ik_1)}{(p_1 + q)(p_2^* + q) K_1 K_2^*} \right] \right\} \frac{\Phi k_2^2 dk_1 dk_2 d\omega}{k_1^2 + k_2^2} \quad (3.6)$$

$$s_z^2(\infty) = \frac{1}{4} \alpha^2 E^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{1}{K_1} + \frac{1}{K_2} \right|^2 \Phi dk_1 dk_2 d\omega \quad (3.6)$$

Коэффициенты концентрации напряжений, усилий и моментов можно вычислить по дисперсиям  $n = s(0)/s(\infty)$ . Для дальнейших вычислений необходимо знать вид спектральной плотности  $\Phi = (k_1, k_2, \omega)$ .

Предположим, что масштаб корреляции температуры в верхнем турбулентном потоке в направлении  $x_1$  велик по сравнению с масштабом корреляции в направлении оси  $x_2$ . Это предположение удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными [6, 7].

Тогда можно приближенно положить

$$\Phi(k_1, k_2, \omega) = \Phi(k_2, \omega) \delta(k_1)$$

Введем дальнейшие предположения. Будем считать, что масштаб корреляции  $l_2$  в направлении оси  $x_2$  достаточно велик, так что выполняются неравенства  $l_2^2 \gg h^2$ ,  $l_2^2 \gg h^2$ . Первое неравенство, как нетрудно заметить, является условием применимости уравнений теории тонких пластин.

Второе предположение по существу вытекает из первого, так как представляющие наибольший практический интерес значения коэффициента Био имеют порядок единицы [6, 7].

Если, кроме того, временной масштаб корреляции  $\tau$  удовлетворяет неравенствам

$$\tau \gg \frac{h^2}{\gamma}, \quad \tau \gg \frac{h^2}{\varepsilon \gamma} \quad (3.7)$$

то выражения для коэффициентов концентрации примут особенно простой вид

$$n_M = 2 \frac{(1 - \nu + \nu^2)^{1/2}}{1 - \nu}, \quad n_N = 2 \frac{(4 - \nu + \nu^2)^{1/2}}{3 - \nu} \quad (3.8)$$

$$n_s = \frac{2 + \varepsilon}{1 + \varepsilon} \left[ \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 2} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)(1 - \nu)} - \frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon + 2)^2} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right]^{1/2}$$

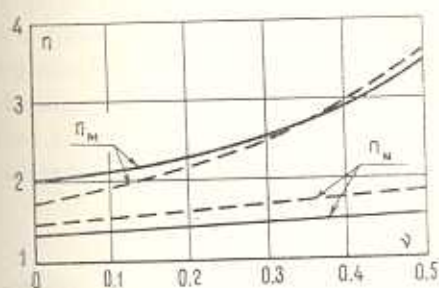
Коэффициенты концентрации усилий и моментов зависят только от коэффициента Пуассона  $\nu$ . Графики зависимости коэффициентов  $n_M$ ,  $n_N$  показаны на фиг. 2.

Аналогичным образом для адиабатически изолированного края находим

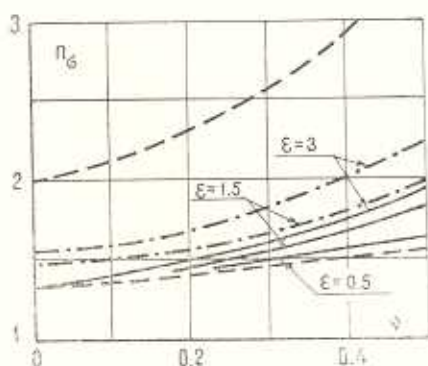
$$n_M = \frac{(3 - \nu^2)^{1/2}}{1 - \nu}, \quad n_N = \frac{(19 - 4\nu + \nu^2)^{1/2}}{3 - \nu} \quad (3.9)$$

$$n'_0 = \frac{2 + \varepsilon}{2(1 + \varepsilon)} \left[ \frac{19 + 4\nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{2\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{3 + 2\nu + \nu^2}{(3 - \nu)(1 - \nu)} + \frac{\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon)^2} \frac{3 + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right]^{1/2} \quad (3.9)$$

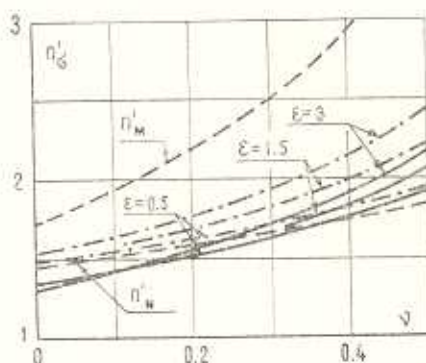
Вычисленные по формулам (3.9) графики зависимости коэффициентов концентрации  $n_M$ ,  $n_N$  показаны на фиг. 1 пунктирными линиями. Коэффициенты концентрации напряжений  $n_\sigma$  зависят от коэффициента Пуассона и параметра  $\varepsilon$ . Результаты вычислений коэффициента  $n_\sigma$  по формуле (3.8) для изотермического края приведены на фиг. 2. Пунктиром для сравнения приведены соответствующие значения коэффициентов  $n_M$ ,  $n_N$ . Аналогичные графики для адиабатически изолированного края приведены на фиг. 3.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

В случае, если температура верхнего и нижнего потока статистически независимы и их дисперсии совпадают по величине, то вместо формул (3.8), (3.9) для коэффициентов концентрации напряжений получим



$$n_s = 2 \frac{2 + \varepsilon}{(4 + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)^{1/2}} \left[ \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon)^2} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right]^{1/2} \quad (3.10)$$

$$n_s' = \frac{2 + \varepsilon}{(4 + 4\varepsilon + 2\varepsilon^2)^{1/2}} \left[ \frac{19 + 4\nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{\varepsilon^2}{(2 + \varepsilon)^2} \frac{3 + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right]^{1/2}$$

Результаты вычислений по формулам (3.10) приведены графически на фиг. 2, 3 штрих-пунктирными линиями.

Если отказаться от предположений (3.7), которые соответствуют лишь ограниченной области экспериментальных данных [6, 7], и рассмотреть в качестве предельного случая временной белый шум  $\Phi(k_2, \omega) = \Phi(k_2)$ , то выражения для коэффициентов концентрации усилий и моментов сохранят свой вид, а коэффициенты концентрации напряжений при  $T_- \equiv 0$  примут вид

$$n_s = 2 \left[ \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{6\varepsilon}{2\varepsilon + 3} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)(1 - \nu)} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right]^{1/2} \left( 1 + \frac{6\varepsilon}{2\varepsilon + 3} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^{-1/2}$$

$$n_s' = \left[ \frac{19 + 4\nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{6\varepsilon}{2\varepsilon + 3} \frac{3 + 2\nu + \nu^2}{(3 - \nu)(1 - \nu)} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{3 + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right]^{1/2} \left( 1 + \frac{6\varepsilon}{2\varepsilon + 3} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^{-1/2}$$

Аналогичным образом, в случае двухсторонних пульсаций температурного поля вместо формул (3.10) находим

$$n_s = 2 \left[ \frac{4 - \nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} - \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{1 - \nu + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right]^{1/2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^{-1/2}$$

$$n_s' = \left[ \frac{19 + 4\nu + \nu^2}{(3 - \nu)^2} + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \frac{3 + \nu^2}{(1 - \nu)^2} \right]^{1/2} \left( 1 + \frac{3\varepsilon}{2 + \varepsilon} \right)^{-1/2}$$

В общем случае произвольной спектральной плотности  $\Phi(k_1, k_2, \omega)$  при вычислениях по формулам (3.3) — (3.6) могут быть применены численные методы.

Վ. Ն. ՄՈՍԿԱԼԵՆԿՈ

ԱՏՈՆԵԱՍՏԻԿ ԶԵՐԲԱ-ԱՌԱԶԳՎԱԿԱՆ ԵԶՐԱՅԻՆ ԷՖԵԿՏՆԵՐԸ ՍԱԼԵՐՈՒՄ

Ա. մ. ֆ. ռ. ֆ. ռ. ի. մ.

Ուսումնասիրվում են՝ ոչ իզոթերմիկ, տուրբուլենտ հոսքերով շրջապատված շերտավորված շերտավորված և շերտատառածգրական լարումների պատահական

զաշտերը: Ենթադրվում է, որ երկու հոսքերի շերմաստիճանները հանդիսանում են պատահական ստացիոնար էրգոդիկ ֆունկցիաներ կոորդինատներից ու ժամանակից: Որոշված են շերմաստաձգական լարումների, մոմենտների ու հակադրումների զիսպերսիաները կոշտ ամրակցված եզրի մոտ և նրանից հեռու:

Հետազոտված են՝ շերմալին և զրալին պալմանների ադհեզովմունք ստոխաստիկ շերմաստաձգական և զրալին էֆեկտների վրա: Որպես օրինակ, զիտարկված է իզոթերմ և ադիաբատ կերպով մեկուսացված եզրը:

V. N. MOSKALENKO

## STOCHASTIC THERMOELASTIC EDGE EFFECTS IN PLATES

### Summary

The solution of some thermal and thermoelastic stochastic problems is given for plates contacting with non-isothermal turbulent streams. It is supposed that both stream temperatures are stochastic stationary ergodic functions of coordinates and time. Dispersions for thermoelastic stresses, forces and moments are detected. The effect of edge temperature conditions is analysed. The isothermal and adiabatic edges are considered as examples.

### ЛИТЕРАТУРА

1. Болотин В. В. Уравнения нестационарных температурных полей в тонких оболочках при наличии источников тепла. ПММ, т. 24, № 2, 1960.
2. Болотин В. В. Динамические задачи термоупругости для пластин и оболочек при наличии излучения. Труды конференции по теории пластин и оболочек. Изд. КФАН СССР, Казань, 1961.
3. Москаленко В. Н., Меркулов В. И. О температурном поле в пластине, обтекаемой турбулентными потоками. Докл. научно-техн. конф. МЭИ, М., 1965.
4. Пугачев В. И. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления. Физматгиз, 1960.
5. Болотин В. В., Москаленко В. Н. Случайные термоупругие напряжения в оболочках. Труды VI Всесоюзной конференции по теории пластин и оболочек. Баку, 1966.
6. Субботин В. И., Ибраимов М. Х., Меркулов В. И., Номофилов Е. В., Тынчинский Н. А. Пульсации температуры в стенке трубы в условиях интенсивного конвективного теплообмена. Атомная энергия, т. 18, в. 5, 1965.
7. Субботин В. И., Ибраимов М. Х., Номофилов Е. В. Статистическое исследование турбулентных пульсаций в жидкости. Теплофизика высоких температур, № 1, 1964.